

УДК 539.3

О.В.Максимович

Луцький національний технічний університет

### НАПРУЖЕНИЙ СТАН БІЛЯ ЖОРСТКИХ ВКЛЮЧЕНЬ ІЗ ЗАОКРУГЛЕНИМИ КУТОВИМИ ТОЧКАМИ В АНІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИНКАХ

Запропоновано методику дослідження напруженого стану анізотропних пластинок із жорсткими включеннями, що мають кутові точки, яка ґрунтується на сумісному застосування методу інтегральних рівнянь та асимптотичних співвідношень для напружень. Досліджено вплив радіусу кривини на напружений стан біля заокруглених вершин включень із кутовими точками для різних анізотропних матеріалів.

Ключові слова: напружений стан, анізотропні пластини, асимптотика.

Для дослідження напруженого стану ізотропних пластинок складної форми широко використовується метод граничних інтегральних рівнянь (МГІР). В роботах [1, 2] показано, що цей метод достатньо ефективний для анізотропних пластинок з гладкими криволінійними включеннями практично довільної форми. Інші методи дослідження напружень біля включень у анізотропних пластинках розглядалися в роботах [3].

На практиці значний інтерес становлять включення з кутовими точками. Ефективність МГІР у таких випадках знижується, оскільки напруження можуть прямувати до нескінченності. У таких випадках стосовно ізотропних пластинок розроблені модифіковані методи [4], в яких при застосуванні МГІР використовуються асимптотичні співвідношення для напружень.

Метою роботи є розробка аналогічного підходу для дослідження напруженого стану анізотропних пластинок з жорсткими включеннями, що містять заокруглені кутові точки з довільним радіусом кривини.

Розглянемо випадок, коли жорстке включення має кутові точки. В околі кутових точок напруження можуть бути нескінченними, в зв'язку з цим ефективність безпосереднього використання МГІР для таких задач знижується. Для встановлення асимптотики напруженого стану в околі вершини розглядають клин, який займає область  $-\phi < \varphi < \phi$ .

Відомо, що комплексні потенціали в околі вершини клина мають степеневу особливість вигляду [5]

$$\Phi(z_1) = Az_1^{m-1}, \Psi(z_2) = Bz_2^{m-1},$$

де  $m$  – дійсна стала,  $A$  і  $B$  – комплексні сталі. На гранях клина  $\pm\phi$  маємо  $z_j = rd_j(\pm\phi)$ ,  $dz_j/ds = d_j(\pm\phi)$ , де  $d_j(\theta) = \cos\theta + s_j \sin\theta$ ,  $r$  – радіальна координата. Вимагаючи, щоби переміщення на гранях клина були рівними нулю, отримуємо систему рівнянь відносно комплексних невідомих  $A = A_1 + iA_2, B = B_1 + iB_2$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} [Ap_1(\cos\phi + s_1 \sin\phi)^m + Bp_2(\cos\phi + s_2 \sin\phi)^m] = 0, \\ \operatorname{Re} [Aq_1(\cos\phi + s_1 \sin\phi)^m + Bq_2(\cos\phi + s_2 \sin\phi)^m] = 0, \\ \operatorname{Re} [Ap_1(\cos\phi - s_1 \sin\phi)^m + Bp_2(\cos\phi - s_2 \sin\phi)^m] = 0, \\ \operatorname{Re} [Aq_1(\cos\phi - s_1 \sin\phi)^m + Bq_2(\cos\phi - s_2 \sin\phi)^m] = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Значення параметра  $m$  визначається з умови, що детермінант із коефіцієнтів матриці даної системи при дійсних невідомих  $A_1, A_2, B_1, B_2$  рівний нулю.

Таким чином, отримуємо представлення для потенціалів у загальному випадку у вигляді

$$\Phi(z_1) = \frac{A}{z_1^\mu}, \Psi(z_2) = \frac{B}{z_2^\mu}, \quad (2)$$

де  $\mu = 1 - m$ .

Розраховані показники  $0 < \mu < 1$  в особливих розв'язках для значень кутів  $90 < \phi \leq 180$  для різних ортотропних матеріалів наведено в таблицях 1 і 2. Зазначимо, що при кутах менших за  $90^\circ$  особливість в потенціалах відсутня.

Таблиця 1.

Степінь  $\mu$  біля особливої частини (симетричний випадок).

$\phi, ^\circ$	Ізо	CF1	CF1 <sub>90</sub>	CF2	EF
95	0,02810	0,03059	0,00461	0,03082	0,02128
100	0,05525	0,05974	0,00925	0,06021	0,04201
135	0,25553	0,24835	0,05026	0,25103	0,19889
155	0,37646	0,36077	0,10143	0,36318	0,31997
170	0,45545	0,44738	0,22030	0,44844	0,42954
180	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5

Рівняння має також і обмежені розв'язки

$$\Phi(z_1) = Cz_1^{\mu_2}, \Psi(z_2) = Dz_2^{\mu_2},$$

при  $0 < \mu_2 < 1$ .

Таблиця 2.

Степінь  $\mu_2$  біля регулярної частини (симетричний випадок).

$\phi, ^\circ$	Ізо	CF1	CF1 <sub>90</sub>	CF2	EF
105	0,0466	0,00714	0,0505	0,01254	0,04348
120	0,2023	0,02716	0,1977	0,04828	0,17771

На основі аналізу проведених розрахунків біля витягнутих включень різної форми можна зробити висновок, що найбільшими є нормальні напруження на межі пластинки і вони виникають при розтязі в поздовжньому напрямку або під гострим кутом до нього.

Для дослідження напруженого стану проводимо розв'язування поставленої задачі МГПР [1]. Для опису граничного контуру включення, що має кутові точки, використовується функція, якою конформно відображається область, що займає пластинка на зовнішність одиничного круга у вигляді

$$\omega(\sigma) = c\sigma + \sum_{n=0}^N \frac{c_n}{\sigma^n}, \quad (3)$$

де  $\sigma = e^{i\theta}, 0 < \theta \leq 2\pi$  при різних кількостях членів в ряді –  $N$ ,  $c_n$  – відомі коефіцієнти. Кривина визначається за формулою

$$k_r = \frac{1}{|\omega'(\sigma)|} \left( 1 + \operatorname{Re} \frac{\sigma \omega''(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \right). \quad (4)$$

Розрахунки проводили при різних кількостях членів у ряді  $N = N_{jj}, j = 1 \dots K$ . Радіуси кривини в околі кутових точок будуть зменшуватись при збільшенні кількості членів ряду. Для випадку жорсткого включення, як правило, максимальними є нормальні напруження в околі кутових точок. Позначимо отримані в результаті розрахунків за МГПР максимальні нормальні відносні напруження  $\sigma_{\max} / p$  в заокругленій вершині отвору через  $\sigma_j$  і відносні радіуси кривини  $\rho = r/a$  заокруглених вершин – через  $\rho_j$ , де  $a$  – характерний розмір отвору. Максимальні відносні нормальні напруження, які позначимо через  $S$ , при малих відносних радіусах кривини  $\rho$  в заокруглених вершинах отвору будемо шукати у вигляді

$$S(\rho) = \frac{C_1}{\rho^{\mu_1}} + C_2 \rho^{\mu_2}, \quad (5)$$

де  $C_1, C_2$  – сталі, які залежать від форми отвору поза вершиною та від прикладеного навантаження. Ці сталі визначаємо методом найменших квадратів так, щоби величина

$$I = \sum_{j=1}^K [S(\rho_j) - \sigma_j]^2 \tag{6}$$

була мінімальною.

**Результати розрахунків.**

Розглянемо пластинку із жорстким включенням, межа якого утворена перетином дуг кіл під кутом  $\alpha$ , при поздовжньому розтягу зусиллями  $p$ .

Результати розрахунків при  $\alpha = 30^\circ$  для ізотропної та анізотропних пластинок, що виготовлені із матеріалів CF1, CF1<sub>90</sub>, CF2, EF зображено на рис. 1 кривими 1-5 відповідно. На рисунках наведено додатково значення показників та знайдених методом найменших квадратів сталих  $C_{1,2}$  у формулі (5).

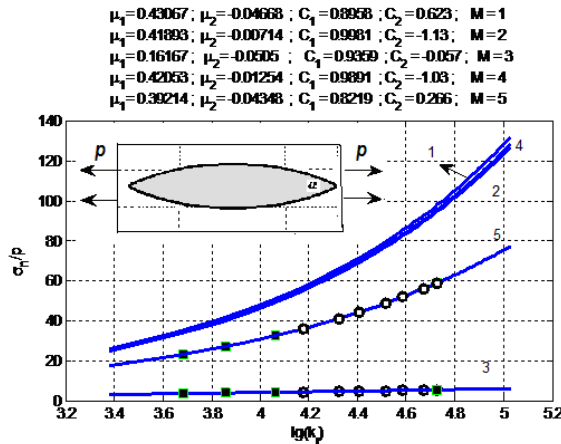


Рис.1. Круговий двокутник, кут між дугами кола  $\alpha = 30^\circ$ .

Тут крапками зображено розраховані МГП відносні нормальні максимальні напруження, кривими – знайдені за формулою (5) залежно від відносної кривини  $k_r = 1/\rho$ . Аналогічні результати для кутів  $\alpha = 60^\circ, 90^\circ$  зображені на рис. 2, 3.

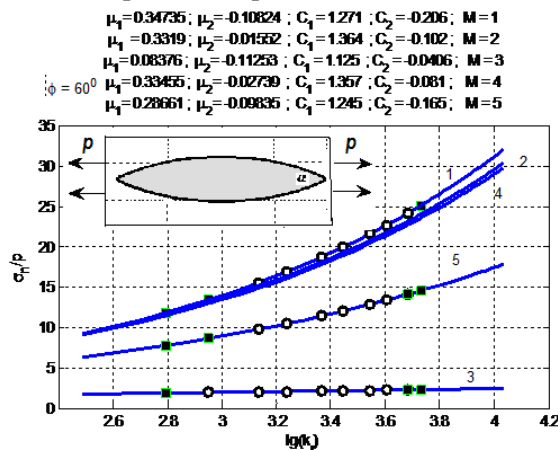


Рис.2. Круговий двокутник, кут між дугами кола  $60^\circ$ .

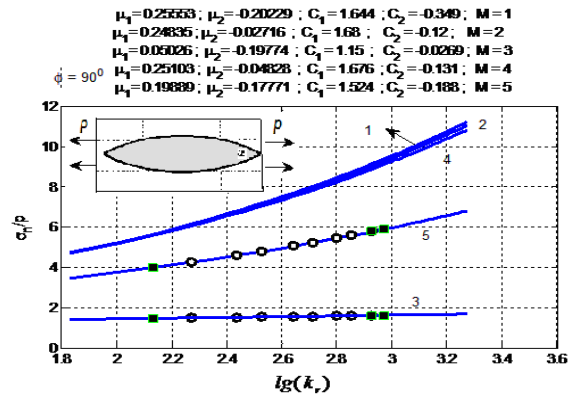


Рис.3. Круговий двокутник, кут між дугами кола  $90^\circ$ .

При розрахунках параметр  $a$  покладали рівним піввідстані між кутовими точками.

Із наведених графіків видно, що максимальні нормальні напруження практично однакові для ізотропного матеріалу і матеріалів із високою мірою анізотропії CF1, CF2 (криві 1-3), коли пластинка розтягується в напрямку з більшою жорсткістю матеріалу. Виконано розрахунки також для включень, що мають форми ромба, прямокутника, рівностороннього многокутника. Показано, що у всіх розглянутих випадках запропонований підхід дає можливість з високою точністю визначати напруження в околі заокруглених кутових точок.

**Висновки.** Встановлені прості формули, які дають можливість розраховувати максимальні напруження в заокруглених вершинах отворів із кутовими точками залежно від радіусів кривини. Отримані формули є практично точними для різних анізотропних матеріалів. Формули (5) при знайдених коефіцієнтах  $C_{1,2}$  практично точно описують максимальні напруження, які знайдені за МГР.

Запропонований підхід дає можливість досліджувати напружений стан в околі заокруглених вершин з довільним радіусом кривизни в анізотропних пластинках. Такі дослідження дають можливість проводити розрахунок на міцність композитних пластинчатих елементів конструкцій з повним врахуванням форми негладких включень.

1. Божидарнік В. В., Максимович О.В. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. –Луцьк: ЛДТУ, 2003. 226с.
2. Божидарнік В.В. Двовимірні задачі теорії пружності і термопружності структурно-неоднорідних тіл.-Львів:Світ,1998.- 352 с.
3. Космодамианский А.С., Меглинский В.В. Растяжение анизотропной пластинки с эллиптическими отверстиями, подкрепленными жесткими кольцами // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений, равновесии и колебаниях упругих тел. –Изд.во Саратов. ун-тета, -1964. -С. 61–69.
4. М.П. Саврук, А. Казберук. Единый подход к решению задач о концентрации напряжений около острых и закругленных угловых вырезов// Приклад. механика. — 2007. — 43, -№2. —С. 70-87.
5. Денисюк И.Т. Напряжения анизотропной пластинки с угловыми включениями.// Прикладна механіка.-1999.-№2.-С.76-84.