УДК 515.(075.8)
О.Ю.Нечипоренко
Луцький інститут розвитку людини «Україна»

КЛАСИФІКАЦІЯ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Числові послідовності, як і будь який математичний об'єкт, мають свої характеристики та закономірності. Спроба розглянути їхні типи, види та властивості може розширити область застосування послідовностей та збільшити клас задач в яких вони будуть використовуватись.

Ключові слова: *послідовність, класифікація, дослідження.*

Постановка проблеми

Класифікація - це процес групування об'єктів дослідження або спостереження у відповідності з їх загальними ознаками. В результаті розробленої класифікації утворюється класифікаційна система.

Зазвичай, класифікація об'єктів відбувається згідно правил розподілу заданої множини об'єктів на підмножини у відповідності встановленим ознакам їх подібності та відмінності. Чи можна встановити такі ознаки для множини існуючих послідовностей?

З будь якої даної множини (сукупності E) яких завгодно об'єктів можна утворювати послідовності.

Послідовність будується в такий спосіб. Вказується деякий об'єкт a_1 з множини E, що називається першим членом послідовності; потім вказується об'єкт a_2, що безпосередньо слідує за a_1, і називається другим членом; далі, вказується об'єкт a_3, що безпосередньо слідує за a_2 і називається третім членом, і т.д.

Об'єкти a_1, a_2, a_3 і т.д. - не обов'язково різні, серед них можуть бути й однакові. Процес побудови послідовності полягає в тому, що якщо вже зазначений деякий "n-й член", що одержав "порядковий номер", або індекс n, то вказується "безпосередньо наступний" за ним "$(n+1)$-й член" з індексом $(n+1)$.

Способи задання послідовностей розділяють на: табличний, аналітичний, рекурентний, графічний та описовий.

Послідовність задана аналітично, якщо задана формула її n-го члена $y_n=f(n)$.

Наприклад, $y_n=f(n)=2n-1$, послідовність непарних чисел.

Рекурентний спосіб задання послідовностей полягає в тому, що вказується правило, яке дозволяє обчислювати n-й член послідовності, якщо відомі її попередні члени. Назва походить від латинського слова *recurrere* – повертатись.

При графічному заданні послідовності уздовж осі Ox відкладено номери членів послідовності, а уздовж осі Oy – величини її членів. Графік послідовності розглядається як дискретна модель лінії з рівномірним кроком уздовж осі Ox.

Описовий спосіб задання послідовностей полягає в тому, що пояснюється з яких елементів складається послідовність. Наприклад, "Всі члени послідовності рівні 1".

Об'єктом послідовності можуть бути: число, функції, геометричні об'єкти, вектори, випадкові величини. Враховуючи це всі послідовності можна розділити на типи: числові послідовності, функціональні послідовності, послідовності геометричних об'єктів, послідовність векторів, послідовність випадкових величин (рис.1.).

Найбільш поширені та найчастіше використовувані – числові послідовності.

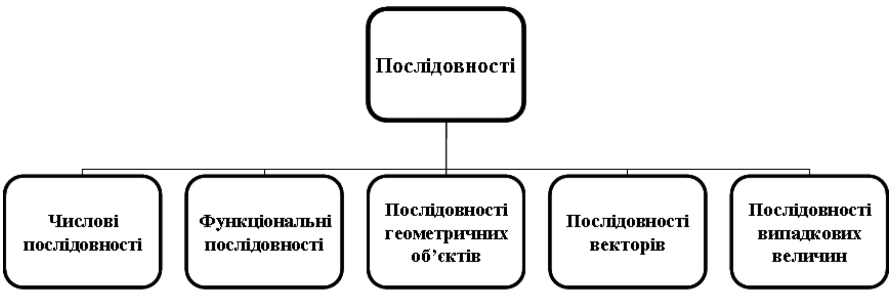

Рис. 1.

Числовою послідовністю заданої множини чисел називається функція, що визначає на множині натуральних чисел числа заданої множини, тобто функція виду $y = f(x)$, $x \in N$, де N - множина натуральних чисел (або функція натурального аргументу), позначається $y = f(n)$ або y_1, $y_2,\dots, y_n,\dots$. Значення y_1, y_2, $y_3,\dots$ називаються відповідно першим, другим, третім, ... членами послідовності. Для побудови послідовності задається число a_1, після цього задається число a_2, яке безпосередньо прямує за число a_1; далі задається число a_3, яке безпосередньо прямує за числом a_2 і т.д.

Процес побудови послідовності полягає в тому, що при наявності деякого n-го члену вказується $(n+1)$-й, який прямує безпосередньо за n-им. Такий процес може закінчитися на деякому об'єкті a_n, що має індекс, рівний натуральному числу N; це відбудеться в тому випадку, якщо не буде зазначено ніякого об'єкта, що безпосередньо слідує за об'єктом a_N. Тоді N-й член послідовності a_N називається її останнім членом; індекс N у цьому випадку позначає число членів послідовності. Сама послідовність тоді називається – скінченна послідовність: $a_1, a_2, a_3, \dots a_N$..

Але процес побудови послідовності можна уявляти собі і необмежено тривалим. У такому випадку не буде існувати останнього елемента послідовності; яке б не було натуральне число N, за членом послідовності a_n, що має індекс n, буде безпосередньо випливати член a_{n+1}, що має індекс, на одиницю більший. Тобто, в результаті побудови виходить нескінченна послідовність, це означає, що, яке б не було натуральне число N, завжди найдеться член послідовності, що має індекс N.

Істотна відмінність нескінченної послідовності від скінченної полягає в тому, що скінченна послідовність може бути задана безпосереднім перерахуванням членів послідовності (яка б велика не була їх кількість), тоді як для нескінченної послідовності таке перерахування принципово неможливо: $a_1, a_2, a_3, \dots a_n \dots$, тобто $\{a_n\}$.

Рис. 2.

Дана характеристика є властивістю числових послідовностей. Крім скінченності та нескінченності числові послідовності ще мають ряд інших властивостей. Основні з них: обмеженість, монотонність, збіжність та періодичність (рис.2.).

Послідовність $\{a_n\}$ елементів називається обмеженою зверху (справа) якщо всі її елементи менші одного і того ж числа M: $a_n<M$ $(n=1, 2, 3, \dots)$. Відповідно обмеженою знизу (зліва), якщо всі її елементи більші одного і того ж числа m: $a_n >m$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, для усіх n.

Послідовність є обмеженою, якщо вона обмежена і зверху і знизу $M<a_n<m$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ для усіх n. Будь яка скінченна послідовність очевидно обмежена.

Монотонна послідовність це така послідовність a_n, що для всіх $n=1,2,\dots$ виконується: строго зростаюча послідовність – така послідовність a_n, що для всіх $n=1, 2, \dots$ виконується нерівність $a_n < a_{n+1}$; неспадна послідовність – така послідовність a_n, що для всіх $n=1, 2, \dots$ виконується нерівність $a_n \leq a_{n+1}$; строго спадна послідовність – така послідовність a_n, що для всіх $n=1,2,\dots$ виконується нерівність $a_n > a_{n+1}$; незростаюча послідовність – така послідовність a_n, що для всіх $n=1, 2, \dots$ виконується нерівність $a_n \geq a_{n+1}$.

Послідовність $\{a_n\}$, що має границю a, називається збіжною до a або просто збіжною послідовністю. Якщо послідовність має границю рівну 0, то вона є нескінченно малою числовою послідовністю.

Послідовність, що не має границі, називається розбіжною послідовністю. А послідовності, що мають своєю границею одну з нескінченностей зі знаком $+\infty$ або $-\infty$, або нескінченність без знака ∞ є нескінченно великими числовими послідовностями.

Періодична послідовність – послідовність, в якої існує таке натуральне число *T*, що починаючи з деякого *n*, виконується рівність $y_n = y_n + T$. Число *T* називається довжиною періоду. Наприклад: послідовність $y_n = (-1)^n$ періодична з довжиною періоду $T = 2$.

Види числових послідовностей так само різноманітні як і їх властивості (рис. 3.).

Найпростіший вид числових послідовностей – стаціонарна послідовність, тобто послідовність $\{a_n\}$, всі елементи якої мають те саме значення (тобто рівні між собою): $a_n=a$, $n=1, 2, ...$, складається з одного елемента.

Один з цікавих видів послідовностей це подвійна (або двовимірна) послідовність дійсних чисел, занумерованих двома індексами: a_{mn}, $m=1,2,…$, $n=1,2,…$ Подвійна послідовність у порівнянні зі звичайними послідовностями (тобто такими, у яких нумерація відбувається одним індексом) має ряд специфічних особливостей: існує, наприклад, декілька визначень границь подвійної послідовності, не еквівалентних між собою. Дана послідовність може інтерпретуватись як модель дискретного точкового каркасу певної поверхні.

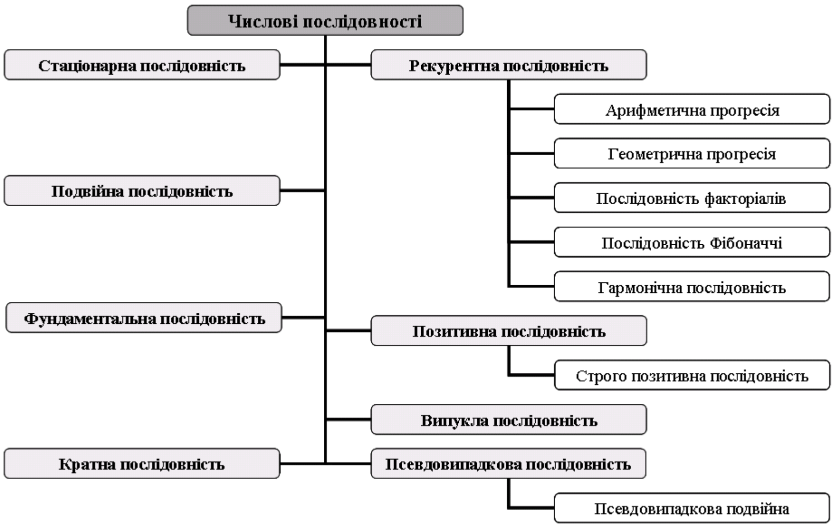

Рис. 3.

Наступний вид послідовності може інтерпретуватись як ламана на площині *x, y*. Випукла послідовність – послідовність дійсних чисел $\{a_n\}$, $n=0,1, ...$, що задовольняють умові $2a_n < a_{n-1} + a_{n+1}$; $n = 1,2,...$. Якщо припустити, що $\Delta a_n=a_n - a_{n+1}$, $\Delta^2 a_n = \Delta a_n - \Delta a_{n+1}$, то попередню умову можна записати у вигляді $\Delta^2 a_n \geq 0$, $n = 0, 1, …$ Тобто, ламана на площині *x, y* з вершинами в точках $x=n$, $y=a_n$ є випуклою.

Найбільш відомий та поширений вид – рекурентні послідовності, тобто послідовності $a_0, a_1, a_2, ...$, що задовольняють співвідношенню виду $a_{n+p}+c_1a_{n+p-1}+…+c_p\, a_n=0$, де $c_1, ... , c_p$ – сталі. Це співвідношення дозволяє обчислити один за іншим члени послідовності, якщо відомі перші *p* членів.

Класичними прикладами рекурентної послідовності є:

- послідовність Фібоначчі: $1,1,2,3,5,8, ..., a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$;
- арифметична прогресія: $a_{n+1}-a_n=d$, $(n=1, 2, 3, ...)$, з $a_1 = a$;
- геометрична прогресія: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, $(n=1, 2, 3, ...)$, з $a_1 = a$;
- послідовність факторіалів: $a_{n+1}=(n+1)a_n$, $(n=1, 2, 3, ...)$ з початковим даним $a_1=1$, послідовність має вигляд $1,2,6,24,120, ..., n!, …$, причому загальний член задається формулою $a_n= n!= 1*2*3*…*n$.
- гармонічна послідовність $\{a_n\}=\{1/n\}$ (кожен її член, починаючи з другого, є середнє гармонійне між попереднім і наступним членами).

Послідовність $\{a_n\}$ елементів множини P називається фундаментальною (або послідовністю Коші), якщо для будь-якого елемента $\varepsilon>0$ з P існує натуральне число n_0 (що залежить від ε) таке, що $|a_p - a_q| < \varepsilon$ для довільних p і q, більших за n_0.

Послідовність дійсних чисел $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ на проміжку $[a, b]$ така, що для будь якого многочленна $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, нетотожного нулеві і невід'ємного на $[a, b]$ вираз $\varphi(P) = a_0\mu_0 + a_0\mu_0 + \ldots + a_n\mu_n \geq 0$ є позитивною послідовністю. Якщо ж для будь якого такого многочлена буде $\varphi(P)>0$, то послідовність є строго позитивною.

Наступний вид, послідовність чисел, що була обчислена по деякому визначеному арифметичному правилу, але має усі властивості випадкової послідовності чисел. Така послідовність є псевдовипадковою. І як її підвид – псевдовипадкова подвійна послідовність – в якій елементи приймають два можливих значення 0 і 1 (або –1 і +1).

Наступна – k-кратна послідовність, елементів даної множини X - відображення k-ого ступеня (N^k) множини натуральних чисел N у множині X. Елементом (або членом) кратної послідовності f: $N^k \to X$ є упорядкований комплекс із $k+1$ елементів $(n_1, \ldots, n_k, x)$, де $x=f(n_1, \ldots, n_k)$, $x \in X$, $(n_1, \ldots, n_k) \in N^k$ тобто $n_j \in N$, $j=1, 2, \ldots, k$, який позначається через $x_{n_1 \ldots n_k}$.

Трансфінітна послідовність елементів даної множини X – відображення деякого відрізка [1, β] або напівінтервалу [1, β) порядкових (трансфінітних – порядковий тип нескінченної цілком впорядкованої множини) чисел у множину X. Елементом, або членом, транс фінітної послідовності f: $[1, \beta] \to X$, відповідно $[1, \beta) \to X$, називається впорядкована пара (α, x), x=f(α), $x \in X$, $a \in [1, \beta]$ (відповідно $a \in [1, \beta)$), яка позначається через x_α.

Висновки

Звичайно в обсязі однієї статті не можливо розглянути всю множину послідовностей, але очевидне одне – різноманіття видів послідовностей дає широкий спектр для дослідження можливостей які можуть відкритись при їх детальному вивченні та застосуванні до різного роду задач.

1. Энциклопедия элементарной математики: в 5 т. / Александров С., Маркушевич А.И., Хинчин А.Я. – М. ГИТТЛ, – 1991.
2. Математическая энциклопедия: в 5 т. / Соломенцев Б. Д., Летов А.М., Новиков П. С., Виноградов А. И., Ершов А. П. и др. – М. ГИТТЛ, – 1985.
3. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Спеціальні розділи. Випуск 1: [навч. посіб. для аспір. та пошук.] / Ковальов С.М., Ігумен М.С., Пустюльга С.І., Михайленко В.Є., Бурчак І.Н. – Луцьк: Редакційно-видавничий відділ ЛДТУ, 2006. – 256с.