УДК 621.798:681.5.015
Б.О.Пальчевський, О.М.Шаповал
Луцький національний технічний університет

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ВІТОК І МЕЖ ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ СТРУКТУРИ ТЕХНОЛОГІЧНИХ МАШИН

У статті наведено застосування запропонованого коефіцієнта відносної готовності для розв'язання методом віток і меж задачі оптимізації функціонально-модульної структури технологічної машини для пакування сипких продуктів.

Ключові слова: *оптимізація, пакування, технологічна машина.*

За останні роки асортимент пакувального обладнання – технологічних машин – автоматів (далі ТМ) значно зріс − переважно за рахунок збільшення числа типорозмірів функціональних модулів (ФМ), що входять до їх складу. Тому все більш актуальною є проблема оптимізації структури ТМ за декількома критеріями одночасно в процесі їх проектування.

Задача оптимізації структури ТМ на основі функціонально-модульного проектування належить до задач дискретної, тобто цілочисельної оптимізації. Тому для її вирішення доцільно використовувати методи комбінаторики, а саме методи повного та направленого перебирання. Методи першої групи застосовуються у тих випадках, коли структура ТМ налічує незначну кількість елементів − ФМ і їх типорозмірів відповідно. Коли ж їх число зростає, то збільшується і кількість варіантів структури, тож виникає потреба відсіювати неперспективні, покроково звужуючи коло пошуку до оптимального результату. Найбільш придатними з цієї точки зору є методи другої групи, один з яких − метод віток і меж. [1-5]

Розглянемо процедуру розв'язання задачі оптимізації з допомогою вказаного методу на прикладі автомату для пакування сипких продуктів.

До структурного складу пакувального автомату даного призначення входять такі типові ФМ (табл. 1). Кожен із них характеризується такими показниками, як надійність та вартість. Необхідно знайти таку множину ФМ, щоб надійність автомату була максимально високою, а вартість при цьому не перевищувала гранично допустимого значення.

Отже, прийнявши за критерій оптимізації надійність ТМ, математичну модель задачі сформулюємо наступним чином:

$$f(X)=\sum_{i=1}^{n}\hat{E}_{ij}\cdot x_{ij}\rightarrow \max, X\in G$$

при умові

$$\begin{cases} \sum\limits_{i,j=1}^{n} v_{ij}\cdot x_{ij}\le v_{\tilde{A}\text{Ð}} \\ x_{ij}\in\{0;\ 1\},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n} \\ x_{ij}-\ddot{o}^3\ddot{e}^3 \end{cases},$$

де $f(X)$ − функція мети; $X=(\tilde{o}_{11},...,\tilde{o}_{\scriptscriptstyle 3j},...,x_n),\tilde{o}_{\scriptscriptstyle 3j}$ – множина функціональних модулів, що формують склад пакувального автомату, при чому $\tilde{o}_{\scriptscriptstyle 3}$ = 1, якщо функціональний модуль входить до *n*-го варіанту структури пакувального автомату; $\tilde{o}_{\scriptscriptstyle 3}$ = 0, якщо не входить;

G – скінченна множина розглядуваних ФМ;v_i − вартість, грн.

У випадку вибору надійності в якості критерія оптимізації процес розв'язку задачі ускладнюється тим, що коефіцієнт готовності $K_Г$, що характеризує надійність, не є адитивним, тобто $K_Г$ ТМ в цілому не можна отримати шляхом безпосереднього сумування $K_Г$ тих ФМ, які входять до її складу. У зв'язку із цим виникає потреба ввести коефіцієнт, перехід до якого спростив би математичний апарат розрахунку.

Нами запропоновано використовувати коефіцієнт відносної готовності із наступних міркувань. Як відомо, коефіцієнт готовності ТМ визначають із формули виду:

$$\hat{E}_{\tilde{A}}=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{\hat{E}_{\tilde{A}1}}-1\right)+\left(\frac{1}{\hat{E}_{\tilde{A}2}}-1\right)+\left(\frac{1}{\hat{E}_{\tilde{A}3}}-1\right)+...+\left(\frac{1}{\hat{E}_{\tilde{A}n}}-1\right)}, \quad (1)$$

де $K_{Г1}$ - $K_{Гn}$ – коефіцієнти готовності ФМ.

Таблиця 1

Функціонально-модульний склад автомату
для пакування сипких продуктів

Назва ФМ	Позначення ФМ	Варіант конструкції ФМ (типорозмір)	Критерії оптимізації			Відношення $B_i/K_{ВГi}$
			Надійність (K_i)		Вартість (v_i)	
			$K_{Гi}$	$K_{ВГi}$		
Бункер	x_1	x_{11}	0,99	0,0101	2560	253465
Дозатор	x_2	x_{21}	0,97	0,0309	15100	488673
		x_{22}	0,98	0,0204	5600	274509
		x_{23}	0,96	0,0417	3540	84892
Механізм подачі плівки	x_3	x_{31}	0,98	0,0204	5600	274510
Рукавоутворювач	x_4	x_{41}	0,99	0,0101	3540	350495
Датчик мітки	x_5	x_{51}	0,99	0,0204	2300	112745
Механізм поздовжнього зварювання	x_6	x_{61}	0,98	0,0204	9200	450980
		x_{62}	0,97	0,0309	9380	303560
Блок керування	x_7	x_{71}	0,99	0,0101	3400	336634
Мезанізмпоперечного зварювання: Зварні губки (ЗГ)	x_8	x_{81}	0,98	0,0204	10100	495098
ЗГ з механізмом відрізання		x_{82}	0,97	0,0309	12040	389644
ЗГ з механізмом протяжки		x_{83}	0,96	0,0417	13200	316547
ЗГ з вмонтованим дататором		x_{84}	0,97	0,0309	11900	385113
ЗГ з механізмами протяжки і відрізання		x_{85}	0,94	0,0638	14020	219749
ЗГ з механізмом відрізання і вмонтованим дататором		x_{86}	0,96	0,0417	12500	299760
ЗГ з механізмом протяжки і вмонтованим дататором		x_{87}	0,95	0,0526	13900	264258
ЗГ з механізмами протяжки, відрізання і вмонтованим дататором		x_{88}	0,93	0,0757	14600	192866
Механізм протягування рукава	x_9	x_{91}	0,97	0,0309	1560	50485
		x_{92}	0,96	0,0417	2300	55156
Відрізні ножі	x_{10}	x_{101}	0,96	0,0417	1470	35252
Дататор	x_{11}	x_{111}	0,97	0,0309	5000	161812
		x_{112}	0,98	0,0204	4370	214215

Зробимо наступні перетворення:

$$\frac{1}{\hat{E}_{\tilde{A}}}-1=\frac{1-\hat{E}_{\tilde{A}}}{\hat{E}_{\tilde{A}}}=\frac{\hat{E}_{\ddot{I}}}{\hat{E}_{\tilde{A}}}, \qquad (2)$$

де $K_П$ – коефіцієнт простоювання.

Підставивши $\frac{\hat{E}_{\ddot{I}}}{\hat{E}_{\tilde{A}}}$ у формулу (1), отримаємо

$$\hat{E}_{\tilde{A}}=\frac{1}{1+\frac{\hat{E}_{\ddot{I}1}}{\hat{E}_{\tilde{A}1}}+\frac{\hat{E}_{\ddot{I}2}}{\hat{E}_{\tilde{A}2}}+\frac{\hat{E}_{\ddot{I}3}}{\hat{E}_{\tilde{A}3}}+\ldots+\frac{\hat{E}_{\ddot{I}з}}{\hat{E}_{\tilde{A}з}}}, \qquad (3)$$

тоді

$$\frac{1}{\hat{E}_{\tilde{A}}}=1+\frac{\hat{E}_{\ddot{I}1}}{\hat{E}_{\tilde{A}1}}+\frac{\hat{E}_{\ddot{I}2}}{\hat{E}_{\tilde{A}2}}+\frac{\hat{E}_{\ddot{I}3}}{\hat{E}_{\tilde{A}3}}+\ldots+\frac{\hat{E}_{\ddot{I}з}}{\hat{E}_{\tilde{A}з}}, \qquad (4)$$

таким чином

$$\frac{\hat{E}_{\ddot{I}}}{\hat{E}_{\tilde{A}}}=\sum_{з=1}^{n}\frac{\hat{E}_{\ddot{I}з}}{\hat{E}_{\tilde{A}з}} \qquad (5)$$

Введене співвідношення назвемо коефіцієнтом відносної готовності і позначимо як $K_{ВГ}$:

$$\frac{\hat{E}_{\ddot{I}}}{\hat{E}_{\tilde{A}}}=\sum_{з=1}^{n}\frac{\hat{E}_{\ddot{I}з}}{\hat{E}_{\tilde{A}з}}=K_{ВГ}$$

Даний коефіцієнт відображає накопичення ненадійності ТМ при зростанні числа ФМ, з яких вона складається. Тому якщо надійність виражати саме через $K_{ВГ}$, то задача максимізації перетвориться на задачу мінімізації.

Виходячи із вказаних зауважень, функцію мети представимо у вигляді:

$$f(X) = \sum_{i,j=1}^{n} \hat{E}_{\text{ÂÃ}ij} \cdot x_{ij} \to \min, X \in G$$

а обмеження залишимо без змін:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i.j=1}^{n} v_{ij} \cdot x_{ij} \le v_{\text{ÃÐ}} \\ x_{ij} \in \{0;\ 1\},\ i = \overline{1,n},\ \ j = \overline{1,n} \\ x_{ij} - \text{ö³ë³} \end{cases}.$$

Отже, для даної задачі функція мети набуде виду:

$$f(X_{\text{ïî÷}}) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} \to \min,$$

а обмеження для неї встановимо:

$$\begin{cases} \sum\limits_{\text{³},j=1}^{n} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} \le 45000 \\ x_{ij} \in \{0;\ 1\},\ i = \overline{1,n},\ \ j = \overline{1,n} \\ x_{ij} - \text{ö³ë³} \end{cases}$$

Однак слід зауважити, що оскільки наявність у складі автомату тих ФМ, для яких представлено по одному типорозміру, є обов’язковою для виконання відповідних функцій, то їхні параметри в ході розв’язання задачі враховувати не будемо, тому для спрощення розрахунку приймемо для розгляду множину:

$$X_{\text{поч}} = \{x_2;\ x_6;\ x_8;\ x_9;\ x_{10};\ x_{11}\},$$

а функцію мети представимо як:

$$f(X) = x_2 + x_6 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} \to \min.$$

Тоді накладене обмеження буде рівне різниці між прийнятим граничним значенням по вартості і сумою вартостей тих ФМ, які не ввійшли до множини $X_{\text{поч}}$.

$$\begin{cases} \sum\limits_{\text{³}=1}^{n} x_2 + x_6 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} \le 27600 \\ x_{ij} \in \{0;\ 1\},\ i = \overline{1,n},\ \ j = \overline{1,n} \\ x_{ij} - \text{ö³ë³} \end{cases}.$$

Виберемо довільний варіант структури. Відобразимо його множиною X_1 :

$$X_1 = \{x_{21};\ x_{61};\ x_{81};\ x_{91};\ x_{101};\ x_{111}\},$$

Наступним кроком є визначення порядку зростання значень відповідних співвідношень $\frac{v_i}{\hat{E}_{\text{ÂÃ³}}}$ по кожному x_i із множини X_1:

$$\frac{v_{101}}{K_{ВГ101}} < \frac{v_{91}}{K_{ВГ91}} < \frac{v_{111}}{K_{ВГ111}} < \frac{v_{61}}{K_{ВГ61}} < \frac{v_{21}}{K_{ВГ21}} < \frac{v_{81}}{K_{ВГ81}}.$$

Початковий опорний план визначимо наступним чином: нехай x_{101} =1, оскільки $\frac{v_{101}}{\hat{E}_{\text{ÂÃ}101}}$ найменше. Віднімаючи від сумарної граничної вартості вартість даного ФМ, одержимо вартість, яка розділиться між рештою ФМ даної множини, тобто:

$$x_{101} = 1,\ v_{\text{гр}} = 27600 - 1470 = 26130;$$
$$x_{91} = 1,\ v_{\text{гр}} = 26130 - 1560 = 24570;$$
$$x_{111} = 1,\ v_{\text{гр}} = 24570 - 5000 = 19570;$$
$$x_{61} = 1,\ v_{\text{гр}} = 19570 - 9200 = 10370;$$

Для наступного елементу v_{21} = 15100 < $v_{\text{гр}}$ = 10370, тому x_{21} буде дробовим. Елемент, що залишився − x_{81}, буде рівним нулю.

Таким чином, початковий опорний план:

$$X_1{}' = \left\{\frac{10370}{15100};\ 1;\ 0;\ 1;\ 1;\ 1\right\}.$$

Оскільки $x_{81} = 0$, то всі варіанти структури, що мають у своєму складі елемент x_{81}, можна вважати неперспективними. Замінимо його на еквівалентний − x_{82}. Так як він окрім основної функції виконує ще й допоміжну, то із множини X_1 вилучимо також елемент $x_{101,}$ адже одну і ту ж функцію може виконувати лише один ФМ. Дробовий елемент залишаємо без змін. Тоді множина, яку розглядатимемо далі, буде включати в себе:

$$X_2 = \{x_{21}; x_{61}; x_{82}; x_{91}; x_{111}\}.$$

Тоді

$$\frac{v_{91}}{K_{ВГ91}} < \frac{v_{111}}{K_{ВГ111}} < \frac{v_{82}}{K_{ВГ82}} < \frac{v_{61}}{K_{ВГ61}} < \frac{v_{21}}{K_{ВГ21}},$$

отож

$$x_{91} = 1, x_{111} = 1, x_{82} = 1, v_{гр} = 9090.$$

$v_{61} = 9200 < v_{гр} = 9090$, тому x_{61} буде дробовим, а $x_{21} = 0$.

Новий опорний план:

$$X_2{}' = \left\{0;\ \frac{9090}{9200};\ 1;\ 1;\ 1\right\}.$$

Міркуючи аналогічно, далі матимемо:

$$X_3 = \{x_{22}; x_{61}; x_{82}; x_{91}; x_{111}\},$$

отож

$$x_{91} = 1, x_{111} = 1, x_{22} = 1, x_{82} = 1, v_{гр} = 3400.$$

$v_{61} = 9200 < v_{гр} = 3400$, тому x_{61} – дробовий:

$$X_3{}' = \left\{1;\ \frac{3400}{9200};\ 1;\ 1;\ 1\right\}.$$

Нульові члени відсутні, тому замінимо дробовий елемент x_{61} на еквівалентний йому x_{62}. Будемо мати:

$$X_4 = \{x_{22}; x_{62}; x_{82}; x_{91}; x_{111}\}.$$

Тоді $x_{91} = 1, x_{111} = 1, x_{22} = 1x_{62} = 1, v_{гр} = 6060$.

Звідси $v_{82} = 12040 < v_{гр} = 6060$, тому x_{82} буде дробовим:

$$X_4{}' = \left\{1;\ 1;\ \frac{6060}{12040};\ 1;\ 1\right\}.$$

Введемо чергову заміну v_{82} на v_{83}. Отримаємо множину:

$$X_5 = \{x_{22}; x_{62}; x_{83}; x_{101}; x_{111}\}.$$

Тоді $x_{101} = 1, x_{111} = 1, x_{22} = 1, x_{62} = 1, v_{гр} = 6150$.

Звідси $v_{83} = 13200 < v_{гр} = 6150$, тому x_{83} буде дробовим:

$$X_5{}' = \left\{1;\ 1;\ \frac{6150}{13200};\ 1;\ 1\right\}.$$

Замінюємо v_{83} на v_{84}. Отримаємо множину:

$$X_6 = \{x_{22}; x_{62}; x_{84}; x_{91;}\, x_{101}\}.$$

Тоді $x_{101} = 1, x_{91} = 1, x_{22} = 1, x_{62} = 1, v_{гр} = 9590$.

Звідси $v_{84} = 11900 < v_{гр} = 9590$, тому x_{84} буде дробовим:

$$X_6{}' = \left\{1;\ 1;\ \frac{9590}{11900};\ 1;\ 1\right\}.$$

Вводимо чергову заміну v_{84} на v_{85}. Одержимо:

$$X_7 = \{x_{22}; x_{62}; x_{85}; x_{111}\}.$$

Тоді $x_{111} = 1, x_{85} = 1, x_{22} = 1, v_{гр} = 3980$.

Звідси $v_{62} = 9380 < v_{гр} = 3980$, тому $x_{62} = \dfrac{3980}{9380}$.

Як бачимо, елемент x_{62} як і x_{61} набув дробового значення. Щоб визначити, котрий із них обрати, підставимо x_{61} у множину X_7 і проведемо аналогічне порівняння.

У даному випадку будемо мати:

$$\frac{v_{111}}{\hat{E}_{\hat{A}\tilde{A}111}} < \frac{v_{85}}{\hat{E}_{\hat{A}\tilde{A}85}} < \frac{v_{22}}{\hat{E}_{\hat{A}\tilde{A}22}} < \frac{v_{61}}{\hat{E}_{\hat{A}\tilde{A}61}}.$$

Звідси $v_{61} = 9200 < v_{\text{гр}} = 3980$, тому $\tilde{o}_{61} = \frac{3980}{9200}$.

В результаті маємо $\tilde{o}_{61} = \frac{3980}{9200} > \tilde{o}_{62} = \frac{3980}{9380}$, тому перевагу слід надати елементу x_{61}. Віднімемо його вартість від початкової граничної і одержимо

$$v'_{ГР} = 27600 - 9200 = 18400.$$

Щоб компенсувати цей вибір, перейдемо до розгляду наступного по величині відношення $\frac{v_з}{\hat{E}_{\hat{E}\tilde{A}з}}$ елемента. Ним є x_{22}. Замінимо його на x_{23}, тоді

$$X_8 = \{x_{23}; x_{61}; x_{85}; x_{111}\}.$$

Одержимо:

$$x_{23} = 1,\ v'_{\tilde{A}Ð} = 18400 - 3540 = 14860;$$

$$x_{111} = 1,\ v'_{\tilde{A}Ð} = 14860 - 5000 = 9860.$$

Маємо $v_{85} = 14020 < v'_{\tilde{A}Ð} = 9860$, тому x_{85} буде дробовим.

$$X_8' = \left\{1;\ 1;\ 1;\ \frac{9280}{14020}\right\}.$$

Змінюємо v_{85} на v_{86}. Отримаємо множину:

$$X_9 = \{x_{23}; x_{61}; x_{86}; x_{91}\}.$$

$$x_{91} = 1,\ x_{23} = 1,\ x_{86} = 1,\ v'_{\tilde{A}Ð} = 800.$$

Одержаний опорний план

$$X_9' = \{\ 1;\ 1;\ 1;\ 1\}.$$

Множина X_9' не містить нульових та дробових елементів, а тому відповідає умові задачі. Елемент x_{92} не перевіряємо, тому що при $\frac{v_{91}}{\hat{E}_{\hat{A}\tilde{A}91}} < \frac{v_{92}}{\hat{E}_{\hat{A}\tilde{A}92}}$ результат покращитись не може.

Перевіримо решту варіантів, які залишились нерозглянутими.

Замінимо x_{86} на x_{87}. Отримаємо множину:

$$X_{10} = \{x_{23}; x_{61}; x_{87}; x_{101}\}.$$

$$x_{101} = 1,\ x_{23} = 1,\ v'_{ГР} = 13390.$$

При $v_{87} = 13900 < v'_{ГР} = 13390$ x_{87} буде дробовим:

$$X_{10}' = \left\{\ 1;\ 1;\ 1;\ \frac{13390}{13900}\right\}.$$

Змінюємо x_{87} на x_{88}:

$$X_{11} = \{x_{23}; x_{61}; x_{88}\}.$$

Тоді $x_{23} = 1$, $x_{88} = 1$; $v'_{ГР} = 260$.

Опорний план буде:

$$X_{11}' = \{\ 1;\ 1;\ 1\},$$

що означає, що одержана множина X_{11} також може бути розв'язком задачі.

Отже, маємо два варіанти структури, які задовольняють умовам оптимізації, виражені множинами $X_9 = \{x_{23}; x_{61}; x_{86}; x_{91}\}$ та $X_{11} = \{x_{23}; x_{61}; x_{88}\}$.

Щоб визначити, який з них кращий, порахуємо для них значення цільової функції.

Оскільки $f(X) \to \min$, а $f(X_9) = 0{,}2058 > f(X_{11}) = 0{,}2089$, то оптимальний розв'язок відповідає множині елементів X_9:

$$X_{\text{опт}} = X_9 = \{x_{23}; x_{61}; x_{86}; x_{91}\}.$$

Результати структур автомату, одержані в результаті розв'язання задачі, зведені в табл. 2.

Таблиця 2

Варіанти структур пакувального автомату

Варіант структури	Елементи, що формують структуру	Сумарна вартість	Сумарний $K_{ВГ}$
X_1	x_{21}; x_{61}; x_{81}; x_{91}; x_{101}; x_{111}	42430	0,1752
X_2	x_{21}; x_{61}; x_{82}; x_{91}; x_{111}	42900	0,144
X_3	x_{22}; x_{61}; x_{82}; x_{91}; x_{111}	33400	0,1335
X_4	x_{22}; x_{62}; x_{82}; x_{91}; x_{111}	33580	0,144
X_5	x_{22}; x_{62}; x_{83}; x_{101}; x_{111}	34650	0,1656
X_6	x_{22}; x_{62}; x_{84}; x_{91}; x_{101}	29910	0,1548
X_7	x_{22}; x_{62}; x_{85}; x_{111}	34000	0,146
X_8	x_{23}; x_{61}; x_{85}; x_{111}	31760	0,1568
X_9	x_{23}; x_{61}; x_{86}; x_{91}	26800	0,1347
X_{10}	x_{23}; x_{61}; x_{87}; x_{101}	28110	0,1564
X_{11}	x_{23}; x_{61}; x_{88}	27340	0,1378

Висновок: показано, що використання запропонованого коефіцієнта відносної готовності при застосуванні методу віток і меж для вирішення задачі оптимізації структури ТМ дозволило значно зменшити об’єм розрахунків при пошуку кращого варіанту її компонування. Це особливо важливо у випадках, коли задача ускладнюється необхідністю розглянути значну кількість ФМ та їх типорозмірів.

1. Зайченко Ю.П. Исследование операций: Учебник. – 6 изд., перераб. И доп. – К.: Издательский дом “Слово”, 2003. 688 с.
2. Кіндрацький Б.І., Сулим Г.Т. Раціональне проектування машинобудівних конструкцій: Монографія. – Львів: КІНПАТРІ ЛТД, 2003. – 280 с.
3. Пальчевський Б.О. Автоматизація технологічних процесів (виготовлення і пакування виробів): навч. посіб. – Львів: Світ, 2007. – 392 с.
4. Сухарев А.Г., Тихомов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986.
5. Шкурба В.В. Задача трех станков. – М.: Наука, 1976.