УДК 620.10

С.В.Ротко, В.В.Шваб'юк, В.О.Ротко

Луцький національний технічний університет

РОЗРАХУНОК ТРАНСТРОПНИХ ПЛИТ МЕТОДОМ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ГАНКЕЛЯ

Розглядається контактна задача згину трансверсально-ізотропної плити на пружній основі під дією розподіленого навантаження. Розв'язок задачі шукається методом інтегральних перетворень Ганкеля. Для розрахунку використовується уточнена теорія плит середньої товщини, що враховує деформації поперечного зсуву та обтиснення.

Ключові слова: *згин, деформація, зсув, обтиснення.*

Метод інтегральних перетворень дістав досить широке застосування як у задачах згину тонких пластинок [5,6], так і в крайових задачах для пружних шарів на пружних і абсолютно жорстких основах [1,6]. Але якщо перетворення Фур'є і Лапласа зручно використовувати для прямокутних, а перетворення Мелліна – для клиноподібних пластин, то перетворення Ганкеля ефективне у задачах для областей і навантажень із осьовою симетрією. За допомогою перетворення Ганкеля можна отримати розв'язки багатьох крайових задач теорії пружності для півпростору та необмеженої товстої плити. Широкий огляд цих задач міститься у монографії Я.С. Уфлянда [6]. У роботах [2,3] згадані перетворення ще називають інтегралами Фур'є або перетвореннями Фур'є-Бесселя.

У даній статті розглядається контактна задача згину трансверсально-ізотропної плити на пружній основі під дією розподіленого навантаження. Умови роботи такої плити відповідають умовам, у яких знаходяться плити дорожнього та аеродромного покриттів. Для отримання розв'язків задач використовується інтегральне перетворення Ганкеля. Вперше доцільність використання методу інтегрального перетворення Ганкеля у задачах згину тонких пластинок Кірхгофа детально обґрунтовано Г. Юнгом [5]. Ним отримано загальний вираз для вертикального переміщення круглої пластинки під дією симетрично розподіленого навантаження. Дещо раніше, використовуючи властивості бесселевих функцій, а фактично інтегрального перетворення Ганкеля, Д. Голл [5] отримав розв'язок задачі для пластинки, що лежить на півнескінченній пружній основі. Цю ж задачу, але вже у постановці уточненої теорії згину ізотропних пластин Нагді [7], розв'язано К. Пістером і Р. Вестманом у роботі [4]. Поширення цих розв'язків для різних основ і видів навантажень дається у книзі С. Тимошенка і С. Войновського-Крігера "Пластинки і оболонки" [5].

Згідно з означенням, наведеним у роботі [6], перетворенням Ганкеля функції, заданої на проміжку $0 < r < \infty$, навивається інтеграл

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(r) J_\nu(\lambda r) r dr, \tag{1}$$

де $J_\nu(\lambda r)$ – функція Бесселя, $(0 \le \lambda < \infty, \nu > -1/2)$.

Якщо функція $f(r)$ кусково-неперервна на кінцевому проміжку, що належить інтервалу $(0,\infty)$ і задовольняє умовам Діріхле на відкритому проміжку $0 < r < R$, то справедлива формула обернення Ганкеля [6]

$$f(r) = \int_0^\infty \tilde{f}(\lambda) \cdot J_\lambda(\lambda r) \lambda \cdot d\lambda, \ (0 < r < \infty). \tag{2}$$

При цьому вважається, що інтеграл $J = \int_0^\infty |f(r)| \sqrt{r} dr$ сходиться.

У випадку згину круглих пластинок Кірхгофа-Лява, диференціальне рівняння Софі Жермен

$\Delta^2 w = q/D$ перемножується на величину $rJ_0(\lambda r)dr$ і інтегрується по частинах у межах $r=0$ і $r=\infty$. Якщо при цьому $w=0$ при $r>R$ (радіус пластинки), то в результаті отримуємо:

$$\tilde{w}(\lambda) = \int_0^\infty w(r)J_0(\lambda r)rdr = \lambda^{-4} \cdot q(\lambda), \tag{3}$$

де $q(\lambda) = (C_1 + \lambda^2 C_2)J_0(\lambda R) + \lambda(C_2 + \lambda^2 C_4)J_1(\lambda R) + +\frac{1}{D}\int_0^R q(\rho)J_0(\lambda\rho)\rho d\rho$; $J_0(\lambda R)$, $J_1(\lambda R)$ – функції Бесселя нульового і першого порядків, C_i - постійні, які визначають із граничних умов на краю пластинки $r=R$ і умов, щоб функція $w(\lambda)$ була обмеженою. Використовуючи формулу (2) обернення Ганкеля до рівняння (3) легко отримуємо вираз для вертикального переміщення пластинки:

$$w(r) = \int_0^\infty \tilde{w}(\lambda)J_0(\lambda R) \cdot \lambda \cdot d\lambda \tag{4}$$

Аналогічним методом можна скористатись і у випадку, коли пластинка знаходиться на пружній основі Вінклера. Тільки в цьому випадку до лівої частини бігармонійного рівняння Софі Жермен необхідно додати вираз – $kw(r)$, де k -коєфіціент постелі.

1. Згин плит на пружній основі під дією розподіленого навантаження

Задачі згину ізотропних плит на пружних основах різних типів розглянуті в низці робіт, які згадані вище. Разом з тим, тільки у деяких з них ведуться дослідження, пов’язані з урахуванням впливу поперечної анізотропії на величини максимальних напружень і переміщень у плитах. У даному підрозділі розглядається осесиметрична задача згину нескінченної трансверсально-ізотропної плити на пружній основі (пружному півпросторі), якою може бути плита дорожнього чи аеродромного покриттів під дією розподіленого навантаження. Визначаються контактні переміщення і напруження на поверхні розділу з урахуванням деформації поперечного зсуву і обтиснення.

Розглянемо згин нескінченої трансверсально-ізотропної плити, віднесеної до циліндричної системи координат r, θ, γ. Плита лежить на пружній основі і згинається розподіленим по площі круга $(r=R)$ навантаженням. Приймемо, що поверхня розділу плити та пружної основи є ідеально гладкою, тому дотичні напруження $\tau_{r\gamma}$ $\tau_{\theta\gamma}$ на цій поверхні вважаються відсутніми. Таким чином граничні умови на зовнішніх поверхнях плити записуються у такому вигляді:

$$\begin{gathered} \sigma_\gamma = q^+(r) \text{ для } (0 \le r \le \infty, \gamma = h); \\ \sigma_\gamma = -q^-(r) \text{ для } (0 \le r \le R, \gamma = -h); \\ \tau_{r\gamma}(r,\gamma) = \tau_{\theta\gamma}(r,\gamma) = 0 \text{ для } \gamma = \pm h, \end{gathered} \tag{5}$$

де $q^-(r)$ – вертикальне навантаження, прикладене до лицевої поверхні плити $(\gamma=-h)$; $q^+(r)$ - невідомий контактний тиск, який виникає між нижньою поверхнею плити і пружною основою; $2h$ – товщина плити.

Будемо виходити зі співвідношень узагальненої моделі трансверсально-ізотропних плит, які стосовно до даного класу осесиметричних задач можна записати у вигляді [8]:

а) розрахункових рівнянь згину:

$$D\Delta^2\hat{w} = (1-\varepsilon_1\Delta)q_2; D\Delta w_\tau = -\frac{5}{4}\varepsilon_\tau q_2, \tag{6}$$

де $\varepsilon_1 = \frac{h^2}{10(1-\nu)}\left(8\frac{G}{G'} - 3\nu''\right), \varepsilon_\tau = \frac{0.8h^2 G}{(1-\nu)G'},$

$$\varepsilon_2 = \frac{0.1h^4}{2(1-\nu^2)}(1-\nu'' G'/2G) \cdot \frac{E}{E'}, \hat{w} = w + \frac{\varepsilon_2}{D}q_2.$$

б) виразів для напружень і вертикального переміщення:

$$\sigma_r = -\frac{E\gamma}{1-\nu^2}\left(\frac{d^2\omega_1}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\cdot\frac{d\omega_1}{dr}\right)+A'\sigma_\gamma; \tag{7}$$

$$\tau_{r\gamma} = G'\left(1-\frac{\gamma^2}{h^2}\right)\cdot\frac{dw_\tau}{dr};\ \sigma_\gamma = q_1(r)+\frac{1}{4}\left(3\frac{\gamma}{h}-\frac{\gamma^3}{h^3}\right)\cdot q_2(r);$$

$$W(r,\gamma) = \omega(r)+2\alpha_0\gamma\cdot q_1/E'+A'\cdot\Delta\omega\cdot\frac{\gamma^2}{2}+\frac{\alpha_0\cdot q_2}{8E'h}\cdot B(\gamma),$$

де $w_1 = w - w_\tau\left(1-\frac{\gamma^2}{h^2(3+\kappa_0)}\right)+\frac{3\gamma^2\cdot q_2}{8(3+\kappa_0)E'h};$

$$B(\gamma) = 6A_2\gamma^2 - A_3\frac{\gamma^4}{h^2},\ q_1 = \frac{1}{2}(q^+ - q^-),\ q_2 = q^+ + q^-,$$

$$\kappa_0 = \frac{3\nu''}{\left(2G/G'-\nu''\right)},\ \alpha_0 = 0.5-\nu'\cdot A',\ A' = \frac{\nu''}{(1-\nu)}.$$

$$A_2 = 1+\frac{A'E'}{2\alpha_0 G'},\ A_3 = 1+\frac{3A'E'}{2\alpha_0 G'(3+\kappa_0)} = A_2 - \frac{\nu''A'E'}{4\alpha_0 G}.$$

У співвідношеннях (8.6), (8.7) відсутні рівняння і члени, що враховують роботу плити як мембрани. Згідно досліджень [5] плита працює на згин у випадках, коли

$$W(0,h)-W(R,h) < \left(\frac{2}{5}\div\frac{2}{3}\right)h.$$

Вираз для вертикального переміщення в області контакту плити з основою має вигляд:

$$W(r,h) = \omega(r)+0.5A'\cdot\Delta\omega\cdot h^2+\frac{2\alpha_0 hq_1}{E'}+ \tag{8}$$

$$+\alpha_0 q_2 h(6A_2 - A_3)/8E'.$$

Застосовуючи до рівнянь (6), (8) перетворення Ганкеля нульового порядку і розв'язуючи цю систему відносно трансформанти $\tilde{W}(\lambda,h)$, отримаємо:

$$\tilde{W}(\lambda,h) = \int_0^\infty W(r,h)J_0(\lambda r)rdr = \tilde{q}_2(\lambda)\cdot\frac{f(\lambda)}{D\lambda^4}+\frac{2\alpha_0 h\tilde{q}_1(\lambda)}{E'},$$

де

$$\tilde{q}_i(\lambda) = \int_0^\infty q_i(r)\cdot J_0(\lambda r)\cdot rdr, (i=1.2); \tag{9}$$

$f(\lambda) = (1+\varepsilon_1\lambda^2-\varepsilon_2\lambda^4)(1-0.5A'\lambda^2h^2)+\alpha_0 D\lambda^4 hB(1)/8E';\ J_0(\lambda r)$ – функція Бесселя нульового порядку.

Між вертикальним переміщенням і тиском на поверхні розділу існує зв'язок у формі [4,5]:

$$W(r,h) = -\int_0^\infty \tilde{q}^+(\lambda)\cdot K(\lambda)\cdot J_0(\lambda r)\lambda d\lambda\,. \tag{10}$$

Звідки отримаємо – $\tilde{W}(\lambda,r) = -K(\lambda)\tilde{q}^+(\lambda)$,

де $K(\lambda)$ – величина, за допомогою якої можна моделювати характер основи. Для випадку пружного півпростору $K(\lambda) = \frac{1}{k_0\cdot\lambda}$, а у випадку основи Вінклера – $K(\lambda) = \frac{1}{k}$. Тут

$k_0 = \dfrac{E_0}{2(1-\nu_0^2)}, E_0$ і ν_0 – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона для півпростору; k – коефіцієнт постелі пружної основи типу Вінклера.

Виходячи з рівнянь (9), (10) легко отримати залежності між трансформантами $\tilde{q}^+(\lambda)$ і $\tilde{q}^+(\lambda)$

$$\tilde{q}^+(\lambda) = -\frac{f^-(\lambda)\cdot\tilde{q}^-(\lambda)}{f^+(\lambda) + D\lambda^4 \cdot K(\lambda)}.$$

Тут $f^{\pm}(\lambda) = f(\lambda) \pm \dfrac{\alpha_0 h D \lambda^4}{E'}$.

Ця залежність дозволяє, використавши формулу обернення Ганкеля (2) при відповідному значенні $K(\lambda)$, знайти вираз для контактного тиску, який виникає між плитою і пружним півпростором

$$q^+(r) = -\int_0^\infty \frac{q^-(\lambda)\cdot f^-(\lambda) J_0(\lambda r)\lambda d\lambda}{f^+(\lambda) + D\lambda^3 / k_0}. \tag{11}$$

2. Згин транстропної плити рівномірно розподіленим навантаженням

Розглянемо випадок, коли плита навантажена рівномірно розподіленим навантаженням $(q^-(r) = q = const)$. При такому навантаженні вираз для трансформанти $\tilde{q}^-(\lambda)$ дорівнює

$$\tilde{q}^-(\lambda) = \frac{R}{\lambda}\cdot J_1(\lambda R)\cdot q, \tag{12}$$

де $J_1(\lambda r)$ – функція Бесселя першого порядку. Підставивши значення транформанти $\tilde{q}^-(\lambda)$ у вирази (10), (11), з урахуванням залежностей (7)-(9), отримаємо розрахункові формули для переміщень, напружень і тисків на поверхні розділу:

$$W(r,h) = \frac{\eta h q}{k_0}\int_0^\infty \psi(t)\cdot J_1(\eta t) J_0(\zeta t)\cdot\frac{dt}{t}, \tag{13}$$

$$q^+(r) = -\eta q\cdot\int_0^\infty \psi(t)\cdot J_1(\eta t) J_0(\zeta t)\cdot dt, \tag{14}$$

$$\sigma_r(0,\gamma) = \frac{3}{4}\cdot\frac{\gamma}{h}\cdot q\cdot\eta(1+\nu)\times\int_0^\infty\left(F_1(t) + \frac{\gamma^2}{h^2}\cdot F_2(t)\right)\cdot\tilde{\psi}(t)\cdot J_1(\eta t)\cdot t dt + A'\sigma_\gamma, \tag{15}$$

де $\psi(t) = \dfrac{f^-(t)}{f^+(t) + Dt^3 / k_0 h^3}, \zeta = \dfrac{r}{h}$,

$$\tilde{\psi}(t) = \left(\frac{D}{k_0} + \frac{2\alpha_0 t D}{E'}\right)\cdot\left(h^3 f^+(t) + \frac{Dt^3}{k_0}\right)^{-1},$$

$$F_1(t) = 1 - \frac{t^2}{10(1-\nu)}\cdot\left(\frac{2G}{G'} + 3\nu''\right) - \frac{\varepsilon_2 t^4}{h^4},\ F_2(t) = \left(\frac{2G}{G'} + \frac{t^2 G}{E'}\right)\cdot\left(1 - \frac{\nu'' G'}{2G}\right)\cdot\frac{t^2}{6(1-\nu)},$$

$$t = \lambda h,\quad f^{\pm}(t) = f(t) \pm \frac{\alpha_0 D t^4}{h^3 E'}.$$

Якщо у наведених формулах покласти відношення $\dfrac{G}{G'} = \dfrac{E}{E'} = 0,$ то отримуємо формули [5], знайдені за допомогою рівнянь класичної теорії тонких пластинок. У випадку, коли $A' = \kappa_0 = \varepsilon_2 = 0$, будемо мати результати, що відповідають гіпотезам уточненої теорії Е.Рейсснера [2].

Для випадку пружної основи типу Вінклера з коефіцієнтом постелі k будемо мати:

$$W(r,h) = -\frac{1}{k}\cdot q^{+}(r);$$
$$q^{+}(r) = -\eta q\cdot\int_0^{\infty}\psi_k(t)\cdot J_1(\eta t)\cdot J_0(\zeta t)dt; \qquad (16)$$
$$\sigma_r(0,\gamma) = \frac{3}{4}\cdot\frac{\gamma}{h}\cdot q\cdot\eta(1+\nu)\int_0^{\infty}\left(F_1(t)+\frac{\gamma^2}{h^2}F_2(t)\right)\times\times\tilde{\psi}_k(t)\cdot J_1(\eta t)\cdot t^2dt + A'\sigma_{\gamma},$$

де $\psi_k(t) = \dfrac{f^{-}(t)}{f^{+}(t)+\dfrac{Dt^4}{kh^4}}$, $\tilde{\psi}_k(t) = \left(\dfrac{D}{(kh)}+\dfrac{2\alpha_0 D}{E'}\right)\cdot\left(h^4\cdot f^{+}(t)+\dfrac{Dt^4}{k}\right)^{-1}$.

Поклавши у формулах (15), (16) відношення $\dfrac{D}{k_0}=\dfrac{D}{k}=0$, будемо мати відповідну задачу для плити на абсолютно жорсткій основі. На рис. 1 криві 1, $1'$ і 2, $2'$ відображають розподіл контактного тиску $\tilde{q}=\dfrac{q^{+}(0)}{q}$ і побудовані відповідно для відношень $\frac{R}{h}=1$ і $\dfrac{R}{h}=2$. Причому криві *1, 2* побудовані для ізотропного $(\nu=\nu_0=0.5)$, а криві $1', 2'$ – для транстропного $\left(\frac{E}{E'}=\frac{G}{G'}=5,\ \nu=\nu''=\nu_0=0.15\right)$ матеріалів.

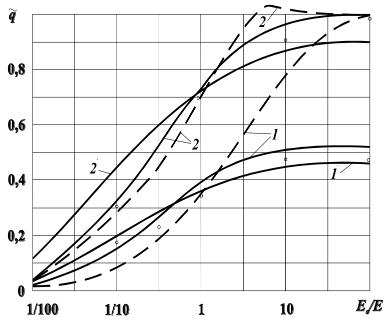

Рис. 1. Графіки розподілу тиску на поверхні розмежування плити з пружною основою

Штрихові лінії побудовані згідно рівнянь класичної теорії тонких пластинок Кірхгофа. Кружечки на рисунку відповідають результатам тривимірної теорії пружності [4], коли $\nu=\nu_0=0.5$.

Висновок. Аналіз кривих, зображених на рисунку, вказує на велику залежність наведених характеристик як від відношень E_0/E, так і від поперечної анізотропії плити (особливо для нормальних напружень $\tilde{\sigma}$). З рисунку також видно, що розроблений варіант теорії пластин дав результати, які дуже близькі до розв'язків теорії пружності. Разом з тим, при відношеннях $R>4h$, контактні тиски, знайдені для ізотропної плити на базі рівнянь різних теорій, практично співпадають.

1. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, пластины и оболочки на упругом основании. - М.:Госфизматлит, 1960. – 491 с.
2. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках. -М.:Мир, 1982.-544с.
3. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел : Пер. с англ., т.2.М.: Изд.-во " Мир".1969. – 864 с.
4. Пистер К., Вестман Р. Изгиб пластинок на упругом основании //Труды Амер.Об-ва инж. механиков. Сер.Е.Прикл.механика. 1962. №2.– С.165-171.
5. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. -М.: Физматгиз, 1963.- 635с.
6. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.-Л.: Изд.-во АН СССР, 1963.– 402 с.
7. Швабюк В.И. Учет эффекта сжимаемости нормали в контактных задачах для трансверсально изотропных плит //Прикл.механика. – К.:1980. Т.16. №. 4.– С.71-77.