

УДК 514.18

В.Г.Грищенко, О.В.Гуда, В.В.Нікуліна

Луцький національний технічний університет

### РЕГУЛЯРНА ЗАДАЧА АВТОМАТИЗОВАНОГО ВИЗНАЧЕННЯ КООРДИНАТ ПЛОСКОГО ЕЛЕМЕНТА АПРОКСИМУЮЧОЇ ПОВЕРХНІ

В роботі розглянуто рішення регулярної задачі визначення координат плоского елемента апроксимуючої поверхні, результатом якого є визначення аплікату вузлових точок теоретичної поверхні.

Ключові слова: дискретне моделювання, апроксимація криволінійних поверхонь, шарнірно-стержневі системи, аплікати вузлових точок.

Важливу роль при проектуванні архітектурно-будівельних конструкцій відіграє початковий етап конструювання і вибір ефективних методів його здійснення. Дискретне моделювання криволінійних форм – апроксимація поверхні просторовою сіткою шарнірно-стержневою системою має ряд переваг, що полягають перш за все в простоті розрахунків в процесі проектування, а також в можливості урахування ряду факторів, що впливають на форму конструйованої поверхні та пошук оптимальних параметрів, таких як матеріалоемність, міцність конструкції, її власна вага, естетичний вигляд тощо. Дискретному проектуванню складних поверхонь присвячено широкий спектр досліджень провідних учених - геометрів України, зокрема професорів Михайленка В.Є., Ковальова С.М. та їх учнів [2]. Дискретне моделювання дає змогу спростити розв'язання задач проектування поверхонь оболонок при врахуванні ряду факторів, які впливають на процес формотворення. Проблемі апроксимації криволінійної поверхні присвячена і ця робота.

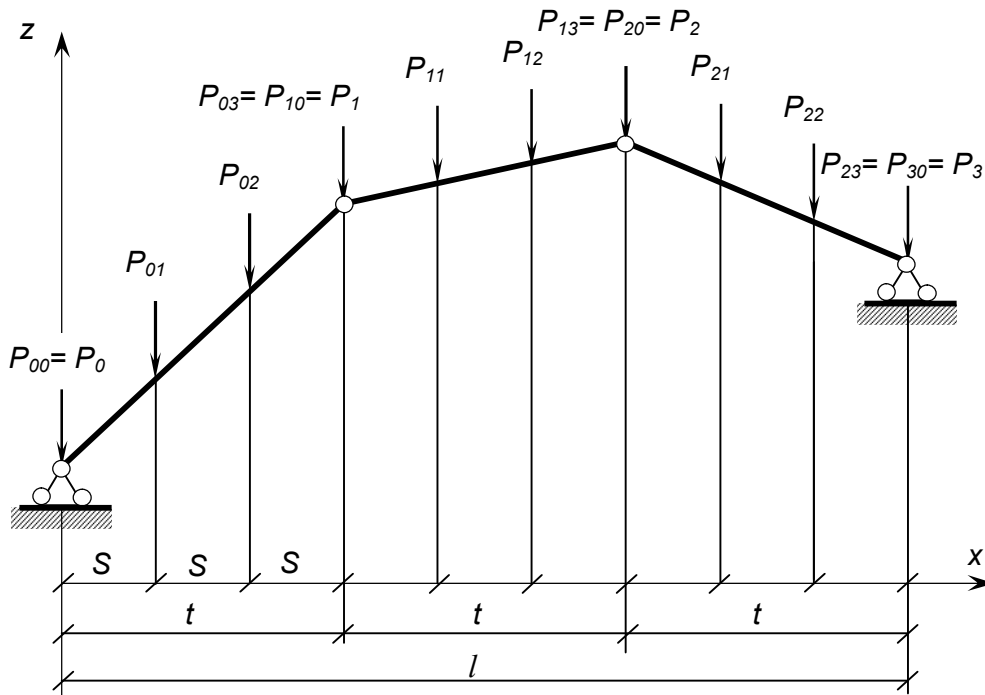


Рис.1

Геометрія макета може бути фактором формотворення його поверхні, якщо координати її виміру знаходяться у повній відповідності з силами, що діють на вузлові точки умовно прийнятої шарнірнозчленованої стержневої системи – сітки, вузлові точки якої є шарніри, з'єднані жорсткими стержнями – ланками, що можуть змінювати свою довжину залежно від розміщення вузлових точок [1]. На ланки ламаної діють умовні вертикальні сили, значення яких залежать від координат експериментальних точок, тобто точок дискретного каркаса, отриманих в результаті обміру макета [2].

Під дією сил шарнірно-стержнева система, прагнучи зайняти опосередковане положення відносно експериментальних точок, приходять в самоврівноважений стан. Абсциси (ординати) вузлових точок визначаються заданим кроком апроксимації, аплікати обчислюються з умови рівноваги шарнірно-стержневої системи.

Відрізки ламаної – участки теоретичної лінії. Величини умовних вертикальних сил пропорціональні різниці експериментальних і теоретичних аплікат.

У випадку обміру кривої поверхні мова іде про апроксимацію кривої лінії відрізками прямих [3].

В більшості випадків експериментальний набір точок ми отримуємо в результаті обміру з рівномірним кроком. Якщо крок вимірювання вкладається в межах кроку апроксимації ціле число разів, то мова іде про регулярну задачу апроксимації. Розв'язання такої задачі можна представити в матричному вигляді.

Розглянемо зображену на рис.1 шарнірно-стержневу (шарнірно-балочну) систему, що імітує ламану апроксимації. Загальна довжина  $l$  ламаної поділена кроком  $t$  апроксимації на  $n$  прогонів. Кожний прогін розділений кроком обміру  $s$  на  $m$  участків.

$$S = \frac{t}{m} = \frac{l}{mn}. \quad (1)$$

Вузлові точки (шарнірні опори) занумеровані індексом  $i=0,1,2,\dots,n$ ; кожна експериментальна точка – умовна сила – позначається символом  $P_{i,j}$ ;  $j$  – порядковий номер експериментальної точки в межах прогону. Експериментальна точка, проекція якої збігається з вузловою точкою в плані, позначається через  $P_i$ .

У відповідності з вищесказаним, прийmemo:

$$P_{i,j} = k(Z'_{i,j} - Z_{i,j}), \quad (2)$$

де  $Z_{i,j}$  – поточна координата ланки ламаної;  $Z'_{i,j}$  – експериментальна координата;  $k$  – коефіцієнт пропорціональності;  $k \neq 0$ .

Для експериментальних точок, які безпосередньо діють на вузли:

$$P_i = k(Z'_i - Z_i) \quad (3)$$

З рівняння прямої, що проходить через 2 точки,

$$\begin{aligned} Z_{i,j} &= Z_i + \frac{Z_{i+1} - Z_{i,j}}{m}; \\ i &= 0, 1, 2, \dots, n-1; \\ j &= 0, 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (4)$$

Тоді 
$$P_{i,j} = k \left( Z'_{i,j} - Z_i - \frac{Z_{i+1} - Z_i}{m} j \right) = k \left[ Z'_{i,j} - \left( 1 - \frac{j}{m} \right) Z_i - \frac{j}{m} Z_{i+1} \right]$$

Задача зводиться до розв'язання системи рівнянь рівноваги кожного вузла ламаної і визначення теоретичних аплікат вузлових точок  $Z_i$ .

Число невідомих дорівнює  $n$ ; число реакцій в опорах (вузлових точках) також дорівнює  $n$ .

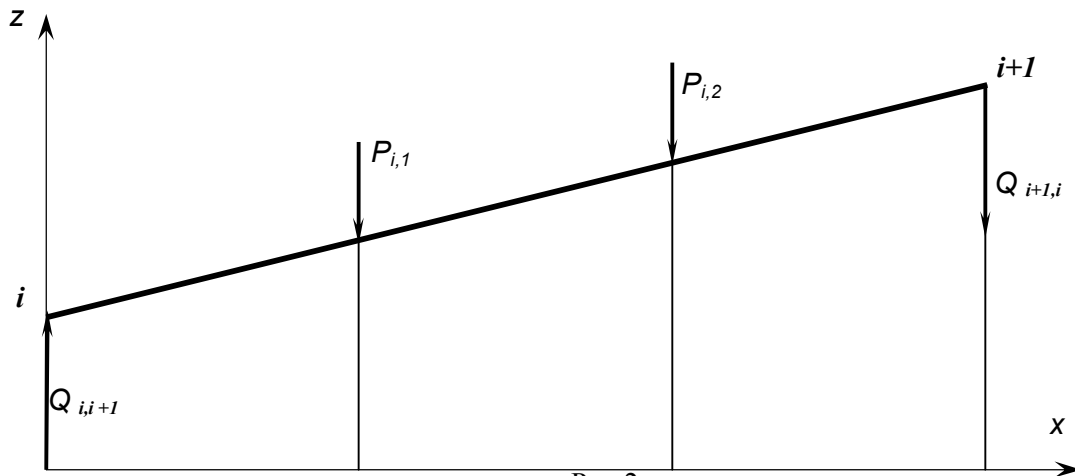


Рис.2

З умови рівності нулю суми моментів всіх вертикальних сил, що діють на балку (ланку ламаної) відносно її опор(вузлових точок), визначаємо реактивні сили (рис.2), що діють на опору справа ( $Q_{i+1,i}$ ) і зліва ( $Q_{i,i+1}$ ).

$$\sum M_i(F) = 0;$$

$$S \sum_{j=1}^{m-1} P_{i,j} + Q_{i+1,i}ms = 0;$$

$$Q_{i+1,i} = -\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} P_{i,j} j$$

(5)

$$\sum M_{i+1}(F) = 0;$$

$$S \sum_{j=1}^{m-1} (m-j)P_{i,j} - Q_{i,i+1}ms = 0;$$

$$Q_{i,i+1} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} (m-j)P_{i,j}.$$

З умови рівності нулю реакцій, що виникають в опорах, отримуємо рівняння рівноваги вузлових точок ламаної.

Сума проєкцій на вісь Z всіх вертикальних сил, що діють на опору i (рис.3), дорівнює нулю:

$$\sum F(Z) = 0.$$

При  $i=1,2,\dots,n-1$ :

$$R_i = P_i - Q_{i,i-1} + Q_{i,i+1} = 0.$$

При  $i=0$ :

$$R_0 = P_0 + Q_{0,1} = 0.$$

При  $i=n$ :

$$R_n = P_n - Q_{n,n-1} = 0.$$

(6)

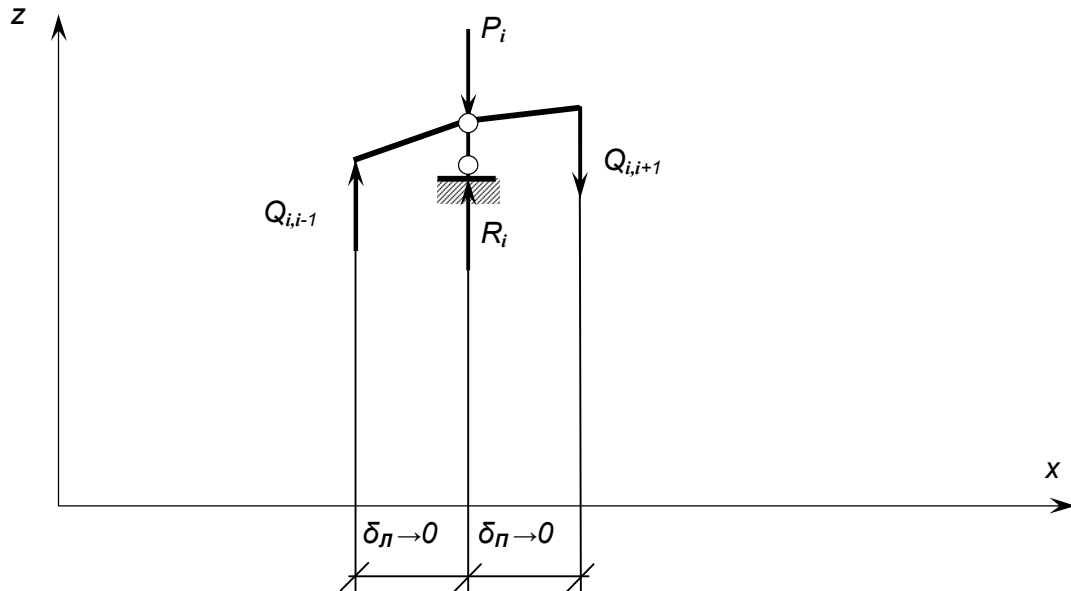


Рис.3

У ці рівняння замість активних сил  $D$  і реактивних  $Q$  підставляємо їх значення. В результаті для кожного шарніра отримаємо неоднорідне лінійне рівняння відносно шуканих аплікату вузлів. Наприклад, для проміжних опор ( $i=1,2,\dots,n-1$ ) рівняння матиме вигляд:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m^2} \left[ \sum_{j=1}^{m-1} j(m-j) \right] Z_{i-1} + \left\{ 1 + \frac{1}{m^2} \sum_{j=1}^{m-1} [j^2 + (m-j)^2] \right\} Z_i + \\ & + \frac{1}{m^2} \left[ \sum_{j=1}^{m-1} j(m-j) \right] Z_{i+1} = \frac{1}{m} \left[ \sum_{j=1}^{m-1} j Z'_{i-1,j} + \sum_{j=1}^{m-1} j(m-j) Z'_{i-1,j} \right] + Z'_i. \end{aligned} \quad (7)$$

Звернемо суми в лівих частинах цих рівнянь і перепишемо їх у вигляді матрично-векторного рівняння:

$$\begin{bmatrix} \alpha'' & \alpha' & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha' & \alpha & \alpha' & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha' & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & \alpha' \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha' & \alpha'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ Z_2 \\ \dots \\ Z_{n-1} \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}, \quad (8)$$

яке містить  $n+1$  скалярних рівнянь з  $n+1$  невідомими. Коефіцієнти матриці:

$$\alpha = \frac{2m^2 + 1}{3m}; \quad (9)$$

$$\alpha' = \frac{m^2 - 1}{6m};$$

$$\alpha'' = \frac{(2m+1)(m+1)}{6m};$$

вільні члени:

$$b_i = b_i' + b_i'';$$

$$b_i' = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} j Z_{i-1,j}'; \quad i=1,2,3,\dots,n$$

$$b_i'' = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} (m-j) Z_{i,j}' + Z_{i,0}'; \quad i=0,1,2,\dots,n-1.$$

$$b_0' = 0;$$

$$b_n'' = Z'.$$

При значеннях коефіцієнтів, виражених формулами (9), визначник системи відмінний від нуля, отже, вона має єдиний розв'язок.

Вихідними даними для обчислення координат вузлових точок є  $n$ ,  $m$ ,  $Z'_{i+j}$ ,  $Z'$ , де:  $n$  – число прогонів;  $m$  – число участків у прогоні;  $Z'_{i,j}$  – експериментальні аплікати;  $Z'$  – аплікати останнього вузла ламаної.

Алгоритм обчислення включає:

- визначення коефіцієнтів матриці;
- визначення вільних членів;
- визначення невідомих.

Висновки

Плоский елемент є складовою частиною каркаса регулярної сітки на квадратному плані. Результат розв'язання задачі апроксимації є визначення аплікат вузлових точок теоретичної поверхні. Запропонована схема може бути застосована при розв'язанні задач дискретного моделювання споріднених з названими поверхнями за допомогою сучасних комп'ютерно-інтегрованих технологій.

1. Бегунов Г.Б., Трофимов В.И. О распределении усилий в пространственных стержневых покрытиях. – В кн.: Строительная механика и расчет сооружений – М., 1968. – №3. – С. 10-14.
2. Грищенко В.Г. Аппроксимация результатов измерения поверхности упорядоченной пространственной сетью. – В кн.: Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: Будівельник, 1983. - Вип. 36. – С. 49-51.
3. Грищенко В.Г., Гуда О.В., Нікуліна В.В. Геометрія архітектурного макета як фактор формотворення. - В кн.: Наукові нотатки. – Луцьк, 2002. – Вип. 11. – С 24-27.
4. Грищенко В.Г. Аппроксимация результатов измерения поверхности упорядоченной пространственной сетью. – В кн.: Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: Будівельник, 1983. – Вып.36. – С.49-51.
5. Ковалев С.М., Абдураимов М.М. Оптимизация геометрических параметров стержневых конструкций. В кн.: Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: КГТУСА, 1994. - Вып. 57.- С. 42-44.
6. Ковалев С.М., Абдураимов М.М. Оптимизация геометрических параметров стержневых конструкций. В кн.: Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: КГТУСА, 1994. – Вып. 57. – С. 42-44.