УДК 519.63
В.В.Завіша, М.М.Москальков
Луцький національний технічний університет
КНАУ

АЛГОРИТМ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ‘ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ГЕНЕРАЦІЮ АКУСТИЧНИХ КОЛИВАНЬ

В роботі проведено аналіз дисперсійних властивостей різнецевої схеми для системи рівнянь коливань п’єзонапівпровідникового кристала.

Ключові слова: *різнецева система, сіткові гармоніки, дисперсійне рівняння.*

Проблеми фізики діелектриків, що знаходяться на межі з механікою суцільного середовища, останнім часом інтенсивно розвиваються. Це пов'язано з дослідженням електропружних полів, що виникають при п’єзоефекті. Інтерес до цих досліджень пов'язаний зі швидким розвитком ряду областей сучасної техніки - електроакустики, мікроелектроніки, радіотехніки, автоматики, вимірювальної техніки та ін.

Нестаціонарний режим роботи, різноманітність форм п'єзоелементів і зв'язність електричного та акустичного полів призводять до великих математичних труднощів розв’язку задачі електропружності аналітичними методами або їх навіть взагалі неможливо розв'язати. Тому чисельні методи є ефективними методами вирішення таких завдань і дозволяють замінити фізичний експеримент математичним моделюванням.

Було встановлено, що в деяких п’єзонапівпровідникових кристалах (наприклад, CdS), які знаходяться в сильному електричному полі, за певних умов можлива генерація звукових хвиль. Математична модель цього процесу та умови генерації були розглянуті в [1], [2] при сильно спрощеннях відносно крайових умов та джерела живлення електричної енергії. В роботах [4] та [5] проаналізовані умови генерації гармонік різницевою схемою для цієї задачі, яка має відмінні від диференціальної задачі дисперсійні та дисипативні властивості.

В даній роботі побудована різницева схема для нелінійної моделі процесів генерації звукових хвиль, розроблений алгоритм реалізації схеми та проведено дисперсійний аналіз лінійної моделі цієї схеми.

Диференційні рівняння для безрозмірних змінних $0 < x < L,\ \ t > 0$ мають вигляд [1]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \delta\, n + \chi \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}, \quad (1)$$

$$v\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - n = 0, \quad (2)$$

$$c\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{v}\frac{\partial n}{\partial x} + \frac{c}{v}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + w + n + nw = J(\tau), \quad (3)$$

$$J(\tau) = -b\int_0^L w(x,t)dx \quad (4)$$

де $J(t)$ – відносне відхилення току; δ –безрозмірний параметр (малий), що характеризує зв’язність рівняння пружних коливань в кристалі (1) з рівнянням зміну електричного току (3); v – безрозмірна дрейфова швидкість електронів; с – швидкість звуку з урахуванням п’єзоефекту; χ – коефіцієнт в’язкості (малий параметр); $b = \dfrac{R}{R_i L}$, де R- опір кристала до постійного току; R_i – внутрішній опір джерела живлення; L – безрозмірна довжина кристала.

Якщо розглянути кристал, що вільний від деформацій на кінцях відрізку $x \in [0, L]$, то маємо граничні умови [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0. \quad (5)$$

Електрично нейтральному кристалу відповідають крайові умови [1]:

$$w(0,t) = w(L,t)\,, \tag{6}$$

$$(n - \frac{1}{v}\frac{\partial n}{\partial x})\Big|_{x=0} = (n - \frac{1}{v}\frac{\partial n}{\partial x})\Big|_{x=L}\,. \tag{7}$$

З рівняння (3) та крайових умов (6), (7) отримуємо

$$nw\big|_{x=0} = nw\big|_{x=L}\,,$$

а звідси, через (6):

$$n(0,t) = n(L,t)\,. \tag{8}$$

Беручи до уваги рівняння (7) та (8), маємо

$$\frac{\partial n}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial n}{\partial x}(L,t)\,. \tag{9}$$

Таким чином, рівняння (8), (9) замінюють рівняння (6), (7).

І, нарешті, початкові умови задаємо у вигляді:

$$u(x,0) = u_0(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x)\,, \tag{10}$$

$$n(x,0) = n_0(x)\,. \tag{11}$$

Кристала, що знаходиться у стані спокою в початковий момент часу, відповідає умова: $u_0(x) = 0,\ \ u_1(x) = 0$.

Таким чином, остаточно математична модель, що описує генерацію коливань п'єзонапівпровідникового кристала складається з рівнянь (1)-(4), крайових умов (5), (6), (8), (9) та початкових (10), (11).

Введемо сітки

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau,\ \ n = 0,1,...,\ \ \tau > 0\}\,,$$

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = \overline{0,N},\ \ h = L/N\}\,,$$

$$\tilde{\omega}_h = \{\tilde{x}_i = (i-1/2)h,\ \ i = \overline{1,N}\}\,.$$

Апроксимуємо невідомі функції на відповідних сітках:

$$u \approx y,\ \ n \approx m\ \ \ x \in \bar{\omega}_h;\ \ w\ \approx p,\ \ x \in \tilde{\omega}_h.$$

Тоді можна апроксимувати рівняння (1)-(4) схемою

$$y_{\bar{t}t} = y_{\bar{x}x}^{(\sigma,\sigma)} - \delta m + \chi y_{\underset{t\,\bar{x}x}{0}}\,, \tag{12}$$

$$vp_x + y_{\bar{x}x} - m = 0, \tag{13}$$

$$cp_t - \frac{1}{v}m_x^{(\alpha)} + \frac{c}{v}y_{xt} + p^{(\alpha)} + (\frac{m + m_{(-1)}}{2})^{(\alpha)} + (p\frac{m + m_{(-1)}}{2})^{(\alpha)} = j(\bar{t}\,)\,. \tag{14}$$

$$j(\hat{t}\,) = -b\sum_{i=1}^{N} hp_i^{(\alpha)}, \tag{15}$$

де використані стандартні позначення [3].

Схема (12)-(13) нелінійна: єдиний нелінійний член входить в рівняння (14) (останній доданок в лівій частині). Лінеаризація цього рівняння дає

$$cp_t - \frac{1}{v}m_{\bar{x}}^{(\alpha)} + \frac{c}{v}y_{\bar{x}t} + p^{(\alpha)} + (\frac{m + m_{(-1)}}{2})^{(\alpha)} = j(\hat{t}\,)\,. \tag{14$'$}$$

Виключаючи з (13), (14$'$) p та j(t) (диференціюванням (13) по t та (14$'$) – по x), маємо лінійну схему для невідомих y, m :

$$y_{\bar{t}t} = y_{\bar{x}x}^{(\sigma,\sigma)} - \delta m + \chi y_{\underset{t\,\bar{x}x}{0}}\,, \tag{16}$$

$$cm_t = (m_{\bar{x}x} - vm_{\underset{x}{0}} - m)^{(\alpha)} + y_{\bar{x}x}^{(\alpha)}. \tag{17}$$

Аналогічними перетвореннями для нелінійного рівняння (14) замість (17) отримуємо

$$cm_t = m_{\bar{x}x}^{(\alpha)} - vm_{\underset{x}{0}}^{(\alpha)} - m^{(\alpha)} + y_{\bar{x}x}^{(\alpha)} - v\left(p\frac{m_i + m_{i-1}}{2}\right)_x^{(\alpha)}. \tag{18}$$

Для апроксимації крайових умов (5) введемо фіктивні точки $x_{-1} = -h$ та $x_{N+1} = L + h$. Апроксимуємо перші похідні в точках x_0 та x_N за допомогою центральної похідної:

$$y_{\overset{0}{x},0} \equiv \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = 0, \quad y_{\overset{0}{x},N} \equiv \frac{y_{N+1} - y_{N-1}}{2h} = 0. \tag{19}$$

Звідси $y_{-1} = y_1, \quad y_{N+1} = y_{N-1}$.

Тоді, наприклад,

$$y_{\bar{x}x,0} = \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} = \frac{2}{h} y_{x,0}, \quad y_{\bar{x}x,N} = \frac{y_{N+1} - 2y_N + y_{N-1}}{h^2} = -\frac{2}{h} y_{\bar{x},N}.$$

Це приводить до такої апроксимації граничних умов (5) без використання фіктивних точок:

$$y_{\bar{t}t,0} = \frac{2}{h} y_{x,0}^{(\sigma,\sigma)} - \delta m_0 + \frac{2}{h} \chi y_{\overset{0}{t}x,0}, \quad y_{\bar{t}t,N} = -\frac{2}{h} y_{\bar{x},N}^{(\sigma,\sigma)} - \delta m_N - \frac{2}{h} \chi y_{\overset{0}{\bar{t}}x,N}.$$

Останні рівняння за побудовою алгебраїчно еквівалентні (12) (з урахуванням (19)).

Тепер апроксимуємо крайові умови (8), (9). Перше має вигляд:

$$m_0 = m_N. \tag{20}$$

Заміняючи похідні в (9) центральними різницями, маємо

$$m_{\overset{0}{x},0} = m_{\overset{0}{x},N}$$

або

$$\frac{m_1 - m_{-1}}{2h} = \frac{m_{N+1} - m_{N-1}}{2h}. \tag{21}$$

Якщо покласти

$$m_{-1} = m_{N-1},\ m_{N+1} = m_1, \tag{22}$$

то умови (21) виконуються автоматично.

Апроксимуємо початкові умови за стандартною схемою [3]:

$$y(x,0) = u_0(x), \quad m(x,0) = n_0(x) \quad x \in \bar{w}_h, \tag{23}$$

$$y_t(x,0) = \frac{y(x,\tau) - y(x,0)}{\tau} = u_1(x) + \frac{\tau^2}{2}(u_{0,\bar{x}x} - \delta n_0 + \chi u_{1,\bar{x}x}). \tag{24}$$

Спочатку розглянемо алгоритм реалізації лінійної схеми.

Використовуючи початкові умови (23), (24), знайдемо y^0, y^1 та m^0 за явними формулами.

Далі на кожному кроці по часу спочатку знаходимо y^{n+1} по y^n, y^{n-1}, m^n. Для цього використовується рівняння (16) та крайові умови (19). Вони приводять до різницевої крайової задачі другого порядку

$$\begin{aligned} dy_0^{n+1} - 2ay_1^{n+1} &= F_0, \\ -ay_{i-1}^{n+1} + dy_i^{n+1} - ay_{i+1}^{n+1} &= F_i,\ i = \overline{1, N-1}, \\ -2ay_{N-1}^{n+1} + dy_N^{n+1} &= F_N, \end{aligned}$$

яка реалізується звичайним методом прогонки. Тут

$$a = \sigma \frac{\tau^2}{h^2} + \chi \frac{\tau}{2h^2}, \quad d = 1 + \sigma \frac{\tau^2}{h^2} + \chi \frac{\tau}{h^2},$$

а праві частини $F_i,\ i = \overline{0, N}$ залежать тільки від відомих значень y_i^n, y_i^{n-1}, m_i^n.

Наступний етап алгоритму – по y^n, y^{n+1}, m^n обчислюємо m^{n+1}. Для цього використовується рівняння (17) та крайові умови (20), (22), які також приводять до різницевої крайової задачі другого порядку

$$\begin{aligned} -Bm_2^{n+1} + Dm_1^{n+1} - Am_N^{n+1} &= \Phi_1, \\ -Am_{i-1}^{n+1} + Dm_i^{n+1} - Bm_{i+1}^{n+1} &= \Phi_i,\ i = \overline{2, N-1}, \\ -Bm_1^{n+1} + Dm_N^{n+1} - Am_{N-1}^{n+1} &= \Phi_N, \end{aligned}$$

але з крайовими умовами типу періодичних. Тому ця задача реалізується методом циклічної прогонки [3]. Тут

$$A=\alpha(\frac{\tau}{h^2}+v\frac{\tau}{2h}),\quad B=\alpha(\frac{\tau}{h^2}-v\frac{\tau}{2h}),\quad D=c+\alpha(\frac{\tau}{h^2}+\tau),$$

а праві частини залежать від відомих y_i^n, y_i^{n+1}, m_i^n.

Перейдемо до опису обчислення p та j(t). З (13) маємо

$$p_i=-\frac{1}{v}y_{\bar{x},i}+\frac{1}{v}\sum_{k=1}^{i-1}hm_k+g(t),\quad \forall t\in\omega_\tau \quad (25)$$

де функція $g(t)$ - підлягає визначенню. Позначимо $q(t)\equiv\sum_{i=1}^{N}hp_i$. З (25) знаходимо

$$q(t)=-\frac{1}{v}(y_N-y_0)+\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{N}h\sum_{k=1}^{i-1}hm_k+g(t)L \quad (26)$$

З іншого боку, взявши суму по i від (14′), отримаємо

$$cq_t+(1+Lb)q^{(\alpha)}=-\frac{c}{v}(y_{t,N}-y_{t,0})-\sum_{i=1}^{N}hm_i^{(\alpha)}.$$

Звідси

$$q(t_{n+1})=\frac{c-\tau(1+Lb)}{c+\tau(1+Lb)}q(t_n)-\frac{\tau}{c+\tau(1+Lb)}\left(\frac{c}{v}(y_{t,N}-y_{t,0})+\sum_{i=1}^{N}hm_i^{(\alpha)}\right).$$

Через (26)

$$g(t_{n+1})=\frac{q(t_{n+1})}{L}-\frac{1}{Lv}\left[\begin{array}{l}(y_N^{n+1}-y_0^{n+1})-\\ \sum_{i=1}^{N}h\sum_{k=1}^{i-1}hm_k^{n+1}\end{array}\right]. \quad (27)$$

Знайдене значення $g(t_{n+1})$ дає змогу за формулою (5.1) обчислити всі $p_i^{n+1}, i=\overline{1,N}$. І нарешті,

$$j(t_{n+1})=-bq^{(\alpha)}\equiv-b\left[\alpha q(t_{n+1})+(1-\alpha)q(t_n)\right] \quad (28)$$

Нелінійна схема реалізується ітераційним методом. Невідомі в лінійній частині схеми, яка співпадає зі рівнянням (17), беруться з $k+1$–ої ітерації, а нелінійні доданки в (18) беруться з k-ітерації. Далі слідує реалізація на кожній ітерації відносно невідомих на $k+1$-ій ітерації за алгоритмом лінійної схеми. Ітерації ведуться або до співпадання з заданою точністю ε розв‘язків на сусідніх ітераціях, або кількість ітерацій фіксується. Початкове наближення для ітерацій береться з попереднього моменту часу.

Проведемо дисперсійний аналіз сіткових гармонік [4, 5] лінійної схеми (16), (17) при $\sigma=0$. Для цього підставимо розв'язки у вигляді гармонік

$$y_i^n=A\tilde{q}^n\xi^i,\quad m_i^n=B\tilde{q}^n\xi^i,\quad \xi=e^{jkh}, j^2=-1$$

в схему (3.6)(3.7). В результаті отримуємо дисперсійне рівняння для знаходження $\tilde{q}$

$$\Delta=\left[\tilde{q}^2-2\tilde{q}+1+\tau^2\mu_k\tilde{q}+\frac{\chi}{2\tau}(\tilde{q}^2-1)\right]\cdot\left[c(\tilde{q}-1)+\tau\left\{\alpha\tilde{q}+(1-\alpha)\right\}\bar{\mu}_k\right]-\tau^3\delta\bar{q}\mu_k\left[\alpha\tilde{q}+(1-(\alpha)\right]=0 \quad (29)$$

Тут $\mu_k=\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{kh}{2},\quad \bar{\mu}_k=\mu_k+1+jv\nu_k,\ \nu_k=\frac{\sin kh}{h}$.

При $\delta=0,\ \chi=0$ з (29) маємо два рівняння

$$\tilde{q}^2-2\tilde{q}+1+\tau^2\mu_k=0, \quad (30)$$

$$c(\tilde{q}-1)+\tau(\alpha\tilde{q}+(1-\alpha))\bar{\mu}_k=0. \quad (31)$$

Якщо $\tau^2 \le \dfrac{4}{\mu_k}$ (це умова стійкості схеми: вона приводить до обмеження на кроки сітки $\tau < h$), то дискримінант рівняння (30) від'ємний, тому один з розв'язків

$$\tilde{q}_2^0 = 1 - \frac{\tau^2 \mu_k}{2} - j\tau\sqrt{\mu_k(1 - \frac{\tau^2\mu_k}{4})} \quad (32)$$

Знайдемо перше наближення до кореня $\tilde{q}_2$ рівняння (29) у вигляді

$$\tilde{q}_2^1 = \tilde{q}_2^0 + \theta_2^\delta + \theta_2^\chi ,$$

де θ_2^δ, θ_2^χ лінійні функції по малим параметрам δ та χ, відповідно. Для θ_2^δ маємо з (29) після утримання лінійних по δ членів вираз:

$$\theta_2^\delta = \frac{\tau^3\delta\mu_k\tilde{q}_2^0(\alpha\tilde{q}_2^0 + 1 - \alpha)}{\left[c(\tilde{q}_2^0 - 1) + \tau(\alpha\tilde{q}_2 + 1 - \alpha)\bar{\mu}_k\right]\left[2(\tilde{q}_2^0 - 1) + \tau^2\mu_k\right]}.$$

Для θ_2^χ аналогічно маємо

$$\theta_2^\chi = \frac{\chi\tau\mu_k(\tilde{q}_2^{02} - 1)}{4\left[(\tilde{q}_2^0 - 1) + \dfrac{\tau^2\mu_k}{4}\right]}.$$

Проводимо розклад θ_2^δ та θ_2^χ по степенях τ, h та хвильового числа k підставимо їх в коефіцієнт $\tilde{\rho}_2^1 = \left|\tilde{q}_2^1\right| = \left|\tilde{q}_2^0 + \theta_2^\delta + \theta_2^\chi\right|$, що характеризує умови підсилення сіткових гармонік [4]:

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_2^1 &= 1 + \operatorname{Re}\tilde{q}_2^0 \operatorname{Re}\theta_2 + \operatorname{Im}\tilde{q}_2^0 \operatorname{Im}\theta_2 + O(\delta^2) = \\
&= 1 + \frac{\delta\tau}{2}\frac{(v-c)k^2}{(k^2+1)+(v-c)k^2}\left\{1 - \frac{\alpha r(k^2+1)}{v-c} + \tau\frac{k^2(k^2+1)}{R}(1-2\alpha)c + O(\tau^2+h^2)\right\} + \\
&+ \frac{\delta\tau}{2}\frac{(v-c)k^2}{k}\left\{\alpha\delta\frac{k^2+1}{v-c} + O(\tau^2+h^2)\right\} - \frac{\chi\tau}{2}\left(k^2 - O(h^2)\right) = \\
&= 1 + \frac{\delta\tau}{2}\frac{(v-c)k^2}{(k^2+1)^2+(v-c)^2k^2}\left\{1 - \tau\frac{k^2(k^2+1)}{R}(1-2\alpha)c + O(\tau^2+h^2)\right\} - \\
&- \frac{\chi\tau}{2}\left\{k^2 + O(\delta^2+\chi^2+\tau^2+h^2)\right\}.
\end{aligned}$$

Це означає, що відмінність $\tilde{\rho}_2^1$ від першого наближення $\rho_2^1 = \left|q_2^1\right|$, де q_2^1 - множник переходу лінеаризації диференціальної задачі (1)-(4), така

$$\Delta\rho_2 = \rho_2^1 - \tilde{\rho}_2^1 = \frac{\delta\tau}{2}\frac{(v-c)k^2}{(k^2+1)+(v-c)^2k^2}\left[\tau\frac{k^2(k^2+1)}{R}(1-2\alpha)c + O(\tau^2+h^2+\delta^2+\chi^2)\right]$$

і при $\alpha = 1/2$ ця відмінність характеризується членом другого порядку малості по τ та h на відміну від схеми роботи [4], коли ця відмінність мала перший порядок по τ.

Це означає, що схема (1)–(4) краще буде передавати властивості автоколивань, що виникають в п'єзонапівпровідниковому кристалі при електричному його навантаженні.

1. Ланда П.С. Автоколебания в распределенных системах. – М.: Наука, 1983.
2. Бонч-Бруевич В.А., Калашников С.Г. Физика полупроводников. – М.: Наука, 1990. – 688 с.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
4. Завіша В.В, Москальков М.М. Дослідження різницевої схеми для задачі генерації коливань п'єзонапівпровідникового кристала // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2001. – №.4. – С. 299-304.
5. Завиша В.В., Москальков М.Н. Оптимизация дисперсионных свойств разностной схемы для задачи о генерации колебаний пьезополупроводникового кристалла // Штучний інтелект – 2002. – №3. –С. 528-532.