

УДК 621.397.3

К.Х.Зеленський, В.О.Ліщина

Відкритий міжнародний університет розвитку людини «Україна».

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ АЕРОДИНАМІКИ ВЕРХОВИХ ЛІСОВИХ ПОЖЕЖ

Досліджуються процеси розповсюдження верхових лісових пожеж, зокрема, аеродинаміка атмосфери над нею. Для розв'язання відповідної системи рівнянь Нав'є-Стокса запропоновано ітераційний числово-аналітичний метод. Розроблено відповідне алгоритмічне і програмне забезпечення реалізації методу. Наведено результати комп'ютерного моделювання.

Ключові слова: аеродинаміка атмосфери, ітераційний числово-аналітичний метод, теорія масопереносу.

Вступ.

Мета математичного моделювання верхових лісових пожеж полягає у дослідженні процесів розповсюдження розвинених пожеж. З точки зору об'єкту досліджень можна відокремити такі математичні моделі:

- 1) моделі прогнозу швидкості розповсюдження вогню;
- 2) моделі прогнозу контурів лісових пожеж;
- 3) моделі прогнозу характеристик течії, тепло- і масопереносу у фронті і зоні пожежі;
- 4) загальна математична модель, у рамках якої можна передбачати всі характеристики (швидкість, контур, поля температур, концентрацій і швидкостей) у фронті і зоні лісової пожежі.

Постановка задачі.

Розглянемо задачу про розповсюдження двовимірної верхової пожежі. Відомі швидкість вітру і температура довкілля, геометричні, структурні та реакційні властивості пологу лісу, температура і розміри осередку загоряння. Потрібно визначити поля швидкості і температури у приземному шарі атмосфери (у тому числі й у полозі лісу), а також швидкість розповсюдження лісової пожежі.

Огляд експериментальних робіт, [1—5], свідчить, що у загальному випадку течія двохфазного середовища, що реагує, у приземному шарі атмосфери є турбулентна. Слід зазначити, що для правильного опису верхової лісової пожежі необхідне знання про взаємодію різних ярусів лісу у ході цього процесу. Згідно спостереженням і експериментальним дослідженням [5], верхова лісова пожежа у реальних умовах стимулює виникнення низинних лісових пожеж і навпаки. Осередки низової пожежі, що виникають при розсіюванні частинок, що горять, перед фронтом пожежі, і догоряння лісових займистих матеріалів (ЛЗМ) за фронтом забезпечують додаткове тепловиділення, і, отже, сприяють стабільності розповсюдження верхової пожежі.

Розглядаються дві задачі: 1) задача формування поля швидкості, температури і густини у приземному шарі атмосфери при заданому вітрі і характеристиках інтенсивної низової пожежі і 2) верхової пожежі.

Математично обидві задачі зводяться до розв'язання таких рівнянь Рейнольдса:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial z} = 0; \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho \overline{u'^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho \overline{u'w'} \right); \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} - (\rho - \rho_\infty) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho \overline{u'w'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho \overline{w'^2} \right); \quad (3)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho c_p \overline{u'T'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho c_p \overline{w'T'} \right); \quad (4)$$

$$\rho T = \rho_\infty T_\infty.$$

Компоненти тензора турбулентних напружень, а також турбулентні потоки тепла записуються через градієнти середньої течії:

$$-\overline{\rho u_i' u_j'} = \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho K \delta_{ij}; \quad (5)$$

$$-\overline{\rho u_i' T'} = \frac{\lambda_t}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial x_i}; \quad Pr_t = 1; \quad (6)$$

$$K = l^2 \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{g}{T Pr_t} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right]; \quad (7)$$

$$\mu_t = \rho \sqrt{K}; \quad \theta = T - T_\infty. \quad (8)$$

При запису рівнянь (1)—(6) використовувалося звичайне для теорії турбулентності припущення про те, що пульсації густини є малі порівняно із пульсаціями компонент швидкості.

Запровадимо контрольний об'єм, що містить у собі фронт пожежі. Годі для задачі тепло- і масопереносу у приземному шарі атмосфери при низинних лісових пожежах початкові і межові умови мають вигляд:

$$u|_{t=0} = u_\infty(z); \quad w|_{t=0} = 0; \quad T|_{t=0} = T_\infty; \quad |x| > x_G; \quad z > z_0; \quad (9)$$

$$u|_{x=x_\infty} = u_\infty(z); \quad \frac{\partial w}{\partial x}|_{x=x_\infty} = 0; \quad T|_{x=x_\infty} = T_\infty; \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=x_\infty} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x}|_{x=x_\infty} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=x_\infty} = 0; \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}|_{z=z_\infty} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial z}|_{z=z_\infty} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial z}|_{z=z_\infty} = 0. \quad (12)$$

Тут z_0 – висота рівня шорсткості; u_∞, T_∞ визначаються із звичайних диференціальних рівнянь, що впливають із рівнянь (1)—(6) за умови, що всі члени під знаком $\partial/\partial t$ і $\partial/\partial x$ тотожно дорівнюють нулю, а T_G, w_G – задані сталі, які й характеризують енергетику фронту низинної пожежі.

При вирішенні першої задачі вважається, що полог лісу не впливає суттєво на формування течії у приземному шарі над фронтом низинної пожежі. Така постановка задачі ближча до степової пожежі, але у той же час придатна для низинних лісових пожеж у випадку так званих «ажурних лісів» [4].

При вирішенні другої задачі фронт верхової пожежі моделюється зоною підвищених температур у полозі лісу. Аеродинамічний опір лісового масиву не враховується, а структурні характеристики (висота дерев і питома поверхня фітомаси) враховуються через довжину шляху змішування. Температура у фронті пожежі і ширина фронту задавалися. Тому межові і початкові умови для другої задачі зберігають той самий вигляд (9)—(12), але в області $\{ |x| \leq x_G; z_0 < z < h \}$, $T = T_G$, де h – висота верхньої межі пологу лісу. Вочевидь, математична постановка задачі справедлива тільки для досить малих і досить великих значень часу, коли настає стаціонарний розподіл верхової пожежі.

Характерна особливість задачі, що розглядається, є те, що залежністю густини газу від тиску можна знехтувати. Але у силу суттєвої неізотермічності процесу не можна нехтувати залежністю густини газу від температури.

Вихідні дані: швидкість вдуву $w_\infty = 2.56$ м/с, $T_G = 1200$ К, $T_\infty = 300$ К, $x_G = 3$ м.

У подальшому конвективною колонкою вважатимемо течію із вихором на боці фронту пожежі за вітром.

Розв'язання задачі

За припущення сталості густини $\rho = \text{const}$ запишемо систему рівнянь відносно швидкості і температури потоку:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \mu_t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \rho R \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{2}{3} \rho \frac{\partial K}{\partial x}; \quad (13)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \mu_T \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \rho R \frac{\partial T}{\partial z} - \tilde{\rho} g - \frac{2}{3} \rho \frac{\partial K}{\partial z} \quad (14)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda_T \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (15)$$

Початкові і межові умови для системи рівнянь (13)–(15) задаються у вигляді (9)–(12).

Ця система рівнянь -- квазілінійна. Відокремимо у кожному рівнянні лінійну частину.

Позначимо $\zeta = z - h_2$ ($\zeta \in [0, L_z]$, $x \in [0, L_x]$). Система рівнянь набуває вигляд

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} = \frac{\mu_T}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \zeta^2} \right) - R \frac{\partial T^{(0)}}{\partial x}; \quad (16)$$

$$N_u^{(0)} = \frac{2}{3} \frac{\partial K^{(0)}}{\partial x} + \left(u^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + w^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \zeta} \right);$$

$$\frac{\partial w^{(0)}}{\partial t} = \frac{\mu_T}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \zeta^2} \right) - \tilde{\rho} g - R \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \zeta}; \quad (17)$$

$$N_w^{(0)} = \frac{2}{3} \frac{\partial K^{(0)}}{\partial \zeta} + \left(u^{(0)} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial x} + w^{(0)} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \zeta} \right);$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial t} = \frac{\lambda_T}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial \zeta^2} \right); \quad (18)$$

$$N_T^{(0)} = \left(u^{(0)} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial x} + w^{(0)} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \zeta} \right).$$

Знайдемо розв'язання лінійної частини цієї системи із урахуванням початкових і межових умов.

$$T^{(0)}(x, \zeta, t) = \sum_{m,l} Z_T(\alpha_m^T, \zeta) X_T(\beta_l^T, x) T_{m,l}^{(0)}(t);$$

$$u^{(0)}(x, \zeta, t) = \sum_{m,l} Z_u(\alpha_m^u, \zeta) X_u(\beta_l^u, x) U_{m,l}^{(0)}(t);$$

$$w^{(0)}(x, \zeta, t) = \sum_{m,l} Z_w(\alpha_m^w, \zeta) X_w(\beta_l^w, x) W_{m,l}^{(0)}(t).$$

$Z_u, Z_w, Z_T, X_u, X_w, X_T$ – власні функції відповідних крайових задач за змінними ζ і x відповідно.

Застосування інтегральних перетворень до системи рівнянь (13)–(15) призводить до такої системи функціональних рівнянь у просторі зображень (p – оператор Лапласа);

$$\begin{aligned} \bar{\bar{U}}_{m,l}^{(n)}(\alpha_m^u, \beta_l^u, p) &= \bar{\bar{U}}_{m,l}^{(0)}(\alpha_m^u, \beta_l^u, p) + \\ &+ \frac{1}{p + \gamma_{m,l}^u} L_t \left\{ \bar{\bar{N}}_u \left[u^{(n-1)}(x, \zeta, t), w^{(n-1)}(x, \zeta, t), T^{(n-1)}(x, \zeta, t) \right] \right\} \\ \bar{\bar{W}}_{m,l}^{(n)}(\alpha_m^w, \beta_l^w, p) &= \bar{\bar{W}}_{m,l}^{(0)}(\alpha_m^w, \beta_l^w, p) + \\ &+ \frac{1}{p + \gamma_{m,l}^w} L_t \left\{ \bar{\bar{N}}_w \left[u^{(n-1)}(x, \zeta, t), w^{(n-1)}(x, \zeta, t), T^{(n-1)}(x, \zeta, t) \right] \right\} \\ \bar{\bar{T}}_{m,l}^{(n)}(\alpha_m^T, \beta_l^T, p) &= \bar{\bar{T}}_{m,l}^{(0)}(\alpha_m^T, \beta_l^T, p) + \\ &+ \frac{1}{p + \gamma_{m,l}^T} L_t \left\{ \bar{\bar{N}}_T \left[u^{(n-1)}(x, \zeta, t), w^{(n-1)}(x, \zeta, t), T^{(n-1)}(x, \zeta, t) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Після виконання відповідних перетворень розв'язання системи рівнянь (13)—(15) із відповідними початковими і межовими умовами отримано у вигляді

$$u^{(n)}(x, \zeta, t) = \sum_{m,l} Z_u(\alpha_m^u, \zeta) X_u(\beta_l^u, x) [U_{m,l}^{(0)}(t) + U_{m,l}^{(n-1)}(t)] = \sum_{m,l} Z_u(\alpha_m^u, \zeta) X_u(\beta_l^u, x) U_{m,l}^{(n)}(t).$$

Аналогічно:

$$w^{(n)}(x, \zeta, t) = \sum_{m,l} Z_w(\alpha_m^w, \zeta) X_w(\beta_l^w, x) [W_{m,l}^{(0)}(t) + W_{m,l}^{(n-1)}(t)] = \sum_{m,l} Z_w(\alpha_m^w, \zeta) X_w(\beta_l^w, x) W_{m,l}^{(n)}(t);$$

$$T^{(n)}(x, \zeta, t) = \sum_{m,l} Z_T(\alpha_m^T, \zeta) X_T(\beta_l^T, x) [T_{m,l}^{(0)}(t) + T_{m,l}^{(n-1)}(t)] = \sum_{m,l} Z_T(\alpha_m^T, \zeta) X_T(\beta_l^T, x) T_{m,l}^{(n)}(t).$$

Функції $U_{m,l}^{(0)}(t)$, $W_{m,l}^{(0)}(t)$, $T_{m,l}^{(0)}(t)$ отримані у результаті застосування скінченних інтегральних перетворень за просторовими змінними та перетворення Лапласа за часом. Ці функції на будь-якій ітерації отримано у такому вигляді.

$$U_{m,l}^{(n)}(t) = u0_{m,l}^{(n)} + e^{-u3_{m,l}^{(n)}t} (u1_{m,l}^{(n)} sh u4_{m,l}^{(n)}t + u2_{m,l}^{(n)} ch u4_{m,l}^{(n)}t); \tag{19}$$

$$W_{m,l}^{(n)}(t) = w0_{m,l}^{(n)} + e^{-w3_{m,l}^{(n)}t} (w1_{m,l}^{(n)} sh w4_{m,l}^{(n)}t + w2_{m,l}^{(n)} ch w4_{m,l}^{(n)}t); \tag{20}$$

$$T_{m,l}^{(n)}(t) = t0_{m,l}^{(n)} + e^{-t3_{m,l}^{(n)}t} (t1_{m,l}^{(n)} sh t4_{m,l}^{(n)}t + t2_{m,l}^{(n)} ch t4_{m,l}^{(n)}t). \tag{21}$$

Коефіцієнти у цих виразах обчислюються на кожній ітерації за допомогою програм, розроблених авторами, [6, 7]. Результати моделювання наведені нижче.

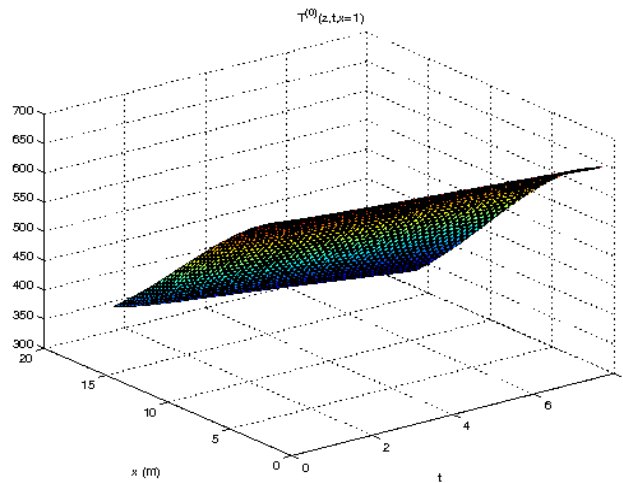


Рис.1. Розподіл температури у лінійному наближенні $T^{(0)}(\zeta, t)$ ($x = 3$).

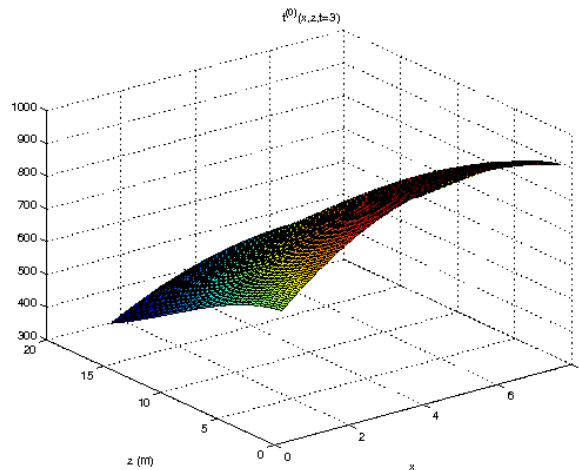


Рис.2. Розподіл температури у лінійному наближенні $T^{(0)}(\zeta, x)$ ($t = 3$).

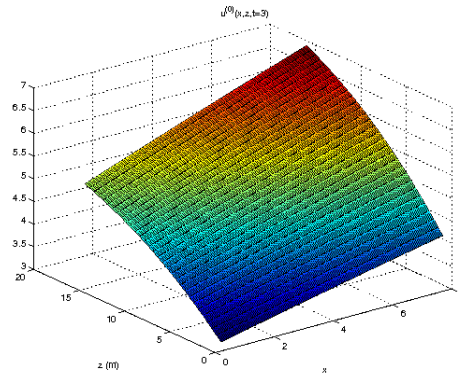


Рис.3. Розподіл швидкості руху повітря у лінійному наближенні $u^{(0)}(\zeta, x)$ ($t = 3$).
У другому наближенні отримано такі результати.

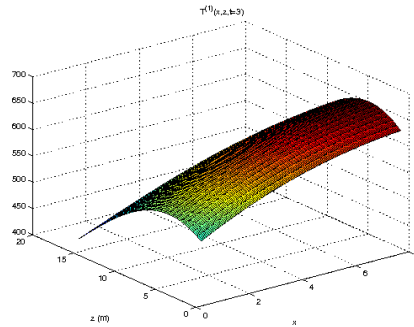


Рис.4. Розподіл температури у другому наближенні $T^{(2)}(\zeta, x)$ ($t = 3$).

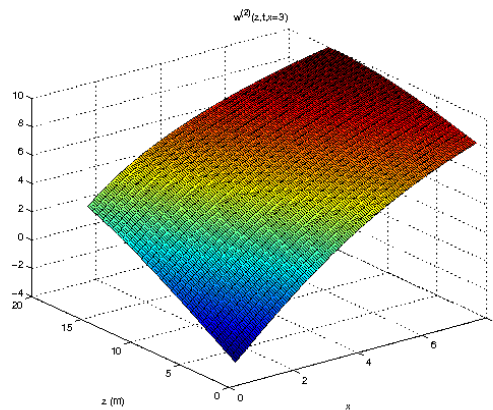


Рис.5. Розподіл швидкості руху у другому наближенні $w^{(2)}(\zeta, x)$ ($t = 3$).

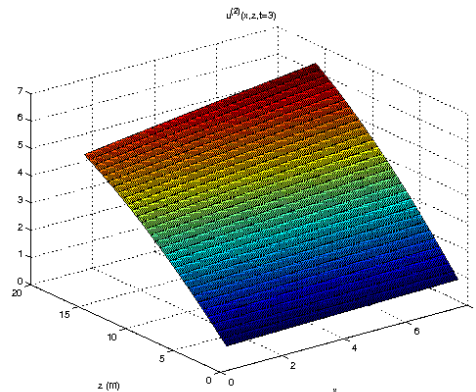


Рис.6. Розподіл швидкості руху повітря у другому наближенні $u^{(2)}(\zeta, x)$ ($t = 3$).

Оцінка похибки наближень.

Для оцінки похибки наближень в ітераційному процесі запишемо вирази для норм двох сусідніх наближень.

$$\begin{aligned} & \|u^{(n)}(x, \zeta, t) - u^{(n-1)}(x, \zeta, t)\|^2 = \\ & = \int_0^{L_z} \int_0^{L_x} \int_0^{t_f} \left[\sum_{m,l} Z_u(\alpha_m^u, \zeta) X_u(\beta_l^u, x) (U_{m,l}^{(n)}(t) - U_{m,l}^{(n-1)}(t)) \right]^2 d\zeta dx dt. \end{aligned} \quad (22)$$

Для інших функцій ($w^{(n)}(x, \zeta, t)$, $T^{(n)}(x, \zeta, t)$) вирази для норм є аналогічні.

Інтегрування виразу (22) у силу ортонормованості власних функцій Z_u, X_u зводиться до обчислення інтегралу

$$\begin{aligned} & \int_0^{L_z} \int_0^{L_x} \int_0^{t_f} \left[\sum_{m,l} Z_u(\alpha_m^u, \zeta) X_u(\beta_l^u, x) (U_{m,l}^{(n)}(t) - U_{m,l}^{(n-1)}(t)) \right]^2 d\zeta dx dt \\ & I(t_f) = \sum_{m,l} (U_{m,l}^{(n)}(t) - U_{m,l}^{(n-1)}(t))^2 dt. \end{aligned}$$

Коефіцієнти біля функцій часу у виразах (19)—(21) опосередковано залежать від просторових змінних (їхні значення залежать від інтегралів за просторовими змінними). Комп'ютерне моделювання наближень засвідчило, що для досягнення задовільної точності відносно компонент швидкості руху повітря над верховою пожежею досить трьох ітерацій (похибка не перевищує 5%). Для досягнення аналогічної похибки відносно температури атмосфери над верховою пожежею знадобилося виконати шість ітерацій.

Висновки.

1. Запропоновано числово-аналітичний метод розв'язання системи рівнянь гідродинаміки, який ґрунтується на побудові ітераційного процесу із застосуванням скінченних інтегральних перетворень.

2. Застосування запропонованого числово-аналітичного методу надає можливість отримувати розв'язання систем нелінійних рівнянь гідродинаміки у аналітичному вигляді без застосування традиційних нелінійних різницевих схем, що апроксимують ці системи рівнянь.

3. Комп'ютерне моделювання системи рівнянь гідродинаміки стосовно задачі аеродинаміки засвідчило, що застосування ітераційного процесу забезпечує точність розв'язання на третій ітерації відносно температурного поля атмосферного повітря над верховою лісовою пожежею.

4. Отриманий у такий спосіб розв'язок системи рівнянь гідродинаміки надає можливість виконувати математичне моделювання процесів гідро і аеродинаміки із заданою наперед точністю.

5. Запропонований наближений метод може бути застосований для розв'язання широкого класу систем нелінійних задач математичної фізики.

1. Гришин А.М., Грузин А.Д., Зверев В.Г. Математическая теория верховых лесных пожаров. //Теплофизика лесных пожаров.—Нов-ск, 1984.—С.38–75.
2. Гришин А.М. Математические модели лесных пожаров.—Томск, 1981.—277 с.
3. Софронов М.А., Вакуров А.П. Огонь в лесу.—Нов-ск, 1981.— 127 с.
4. Дубов А.С., Быкова Л.П., Маруніч С.В. Турбулентность в растительном покрове.—Л.:— Гидрометеоздат, 1978.—180 с.
5. Никулин Д.А., Потехин Г.С., Стрелец М.Х. Приближенная система уравнений для описания нестационарной концентрационной естественной конвекции в бинарных газовых смесях.—Изв. АН СССР, МЖГ, 1980.—С.57-61.
6. Зеленський К.Х. Ітераційний метод розв'язання нелінійних крайових задач//Наукові нотатки. Міжвузівський збірник. Випуск 26.— Луцьк, ЛНТУ.— 2009. , С.92-100.
7. Зеленський К.Х., Ігнатенко В.М., Коц О.П. Комп'ютерні методи прикладної математики.—К.: Академперіодика.—2002.—480 с.