

УДК 519.216

О.М.Зігунов, В.Д.Кишенько

Національний університет харчових технологій

### ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЗАДАЧІ ПРОГНОЗУВАННЯ ТЕНДЕНЦІЇ РОЗВИТКУ ПРОЦЕСУ ЕКСТРАГУВАННЯ ЦУКРУ

*В статті розглядаються задачі прогнозування та методи прогнозу тенденції поведінки технологічних об'єктів керування на основі фрактального аналізу часових рядів технологічних змінних на прикладі дифузійного відділення цукрового заводу. За допомогою програми Fractan розраховані показники Херста та проаналізована динаміка зміни фрактальної розмірності змінних процесу екстрагування цукру. Отримані результати використані при побудові підсистеми технологічного моніторингу систем керування виробничими комплексами.*

Ключові слова: *фрактальний аналіз, прогнозування, екстрагування, цукрове виробництво.*

Інформаційно - вимірювальні системи, в тому числі підсистема моніторингу технологічних процесів, є складовою систем керування виробничими комплексами, тому що інформація про існуючий стан технологічного процесу та тенденції його зміни повинні бути покладені в основу розробки заходів по прийняттю рішень та враховуватись при прогнозуванні розвитку об'єкта [1].

Алгоритми прогнозування повинні бути побудовані виходячи з поведінки об'єкта керування, як складної динамічної системи, що включає прояви хаотичного змінювання параметрів.

Для класифікації системи можна скористатися обчисленням кореляційної розмірності або одержати показник Херста. Кореляційна розмірність  $D_c$ , заснована на обчисленні кореляційного інтеграла, є важливою кількісною характеристикою атратора, що несе інформацію про ступінь складності поведінки динамічної системи.

Кореляційний інтеграл  $C(r)$  обчислює середню розбіжність між точками реконструйованого фазового простору, координатами якого служать значення самого часового ряду з наростаючим числом запізньєнь за часом. Якщо часовий ряд повністю детермінований, то його поведінка визначається деякими залежностями, що містять  $k$  змінних. Тоді зі збільшенням порядку запізнення порядок зростання кореляційного інтеграла стабілізується між числом  $k$  і  $k+1$ , і його приймають за оцінку фрактальної розмірності часового ряду. Якщо ряд хаотичний, випадковий, то порядок зростання кореляційного інтеграла зростає приблизно з такою ж швидкістю, як і розмірність фазового простору.

Функція  $C(r)$  для кожного  $r$  дорівнює нормованому числу пар точок розглянутої множини (об'єкта), відстань між якими не перевершує  $r$ :

$$C(r) = \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n H(r - |y_i - y_j|), \quad (1)$$

де функція Хевісайда  $H(x)=0$ , якщо  $x < 0$ ;  $H(x)=1$ , якщо  $x \geq 0$ , для всіх пар значень  $i$  і  $j$ , якщо  $i \neq j$ ,  $|y_i - y_j|$  - абсолютна величина відстані між точками множини,  $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ , де  $n$  - кількість точок. Величина суми залежить від  $r$ , причому  $C(r) \sim r^{D_c}$ , де  $D_c$  - кореляційна розмірність. Для практичного обчислення розмірності на графіку  $\ln(C(r))=f(\ln(r))$  виділяють область лінійної залежності (область скейлінга) і функція апроксимується прямою лінією методом найменших квадратів. Тоді тангенс кута нахилу графіка є розмірністю  $D_c$  [2].

На рис.1 показано визначення кореляційної розмірності часового ряду витрати дифузійного соку.

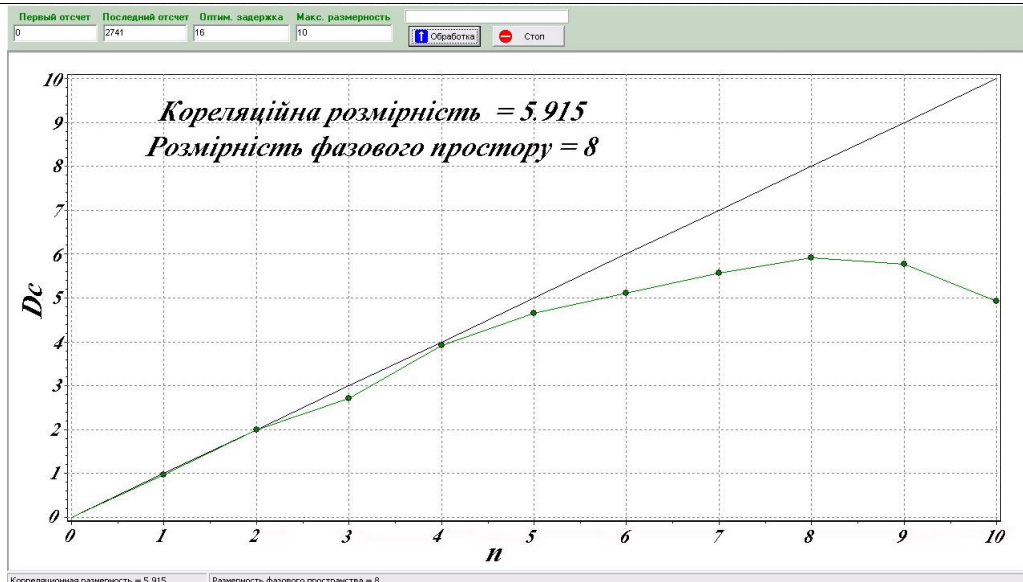


Рис. 1. Визначення кореляційної розмірності часового ряду витрати дифузійного соку

Для дослідження показників часового ряду були визначені фрактальна розмірність і показник Херста.

Основною характеристикою фрактального об'єкта є фрактальна розмірність.

Є кілька методів визначення фрактальної розмірності для часового ряду.

Перший - це класичний клітинний метод, коли графік накривають серією сіток і визначають фрактальну розмірність точно так само, як і для геометричних фракталів.

Другий метод для дослідження фрактальних часових рядів був запропонований Бенуа Мандельбротом і базується на дослідженнях проведених англійським дослідником Херстом і зветься R/S методом [3]. Він побудований на аналізі розмаху параметра (найбільшим і найменшим значенням на досліджуваному відрізку) і середньоквадратичного відхилення.

І третім є метод, заснований на зміні довжини кривої залежно від масштабу. Якщо крива близька до фрактальної, то зі зменшенням масштабу довжина кривої буде зростати ступеневим чином.

Фрактальна геометрія починається з формули Мандельброта, що зв'язує довжину довільної кривої  $L$  з масштабом виміру  $\varepsilon$  :

$$L = C \cdot \varepsilon^{1-D}, \quad (2)$$

де  $C$  - невизначений масштабний множник, свій для кожної лінії;  $D$  - фрактальна розмірність.

Для звичайних гладких ліній, які мають майже всюди хоча б одну похідну,  $D$  дорівнює одиниці. У загальному ж випадку лінія може не мати ніде ні однієї похідної і для неї розмірність  $D$  може мати значення від 1 до 2. Так,  $D = 2$  означає, що крива щільно заповнила всю площину. Такі криві самоподібні - будь-яка ділянка кривої має ту ж розмірність, що і вся лінія. Останнє ствердження означає наступне. Нехай у деякої кривої вимірюється довжина невеликої ділянки. Для цього використовується масштаб  $\varepsilon$ . Тоді для вимірювання величини всієї лінії, що відрізняється від невеликої ділянки в  $\lambda$  раз, досить масштабу, що також відрізняється від вихідного в  $\lambda$  раз. Математично, це означає зміну формули (2) на наступний вираз:

$$\lambda \cdot L = C \cdot (\lambda \cdot \varepsilon)^{1-D}. \quad (3)$$

Формулу (2) і умову самоподібності у формі (3) можна взяти у вигляді постулатів (або аксіом), щоб побудувати весь математичний апарат фрактального обчислення [4]. Розглянемо два питання. По-перше, довжину вимірюють, підраховуючи число масштабів, тобто  $L = N(\varepsilon) \cdot \varepsilon$ , где  $N(\varepsilon)$  - необхідна кількість кроків, з яким масштаб обходить всю лінію, при цьому з (2) випливає, що  $N(\varepsilon) = C \cdot \varepsilon^{-D}$ . В новому масштабі, який дорівнює

$$\varepsilon^* = \lambda \cdot \varepsilon, \quad (4)$$

довжина буде  $L^* = C \cdot \varepsilon^{1-D}$ . Підставляючи (3) у вираз для  $L^*$ , одержуємо  $L^* = C \cdot \lambda^{1-D} \cdot \varepsilon^{1-D}$ . Але тут  $C \cdot \varepsilon^{1-D}$  є вихідна довжина, яка дорівнює  $N(\varepsilon) \cdot \varepsilon$ , відповідно

$$L^* = \lambda^{1-D} \cdot N(\varepsilon) \cdot \varepsilon \quad (5)$$

З іншого боку,  $L^* = N(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^*$ , або  $L^* = N(\lambda \cdot \varepsilon) \cdot \lambda \cdot \varepsilon$ . Порівнюючи останній результат з (5), приходимо до результату:

$$N(\lambda \cdot \varepsilon) = \lambda^{-D} \cdot N(\varepsilon) \quad (6)$$

У такому вигляді звичайно й записують умову самоподібності, маючи на увазі під  $N$  будь-яку функцію від своїх аргументів з відмінним від  $D$  показником. По-друге, у формулі (4)  $\lambda$  і  $\varepsilon$  входять так само, тобто перепозначення  $\lambda \leftrightarrow \varepsilon$  не змінює загального виду самої формули. Можна вважати  $\lambda$  масштабом, а  $\varepsilon$  - масштабним множником. Замість запропонованих постулатів в основу теорії фракталів можна покласти симетрію перепозначення  $\lambda$  і  $\varepsilon$  і умова самоподібності у формі (6). Для ієрархічних структур, які будуються за заздалегідь певними правилами, для визначення фрактальної розмірності  $D$  досить користуватися тільки формулою (6). Покажемо це на прикладі геометричного ряду:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{N}, \frac{1}{N+1}, \dots$$

Відстань між сусідніми членами ряду буде  $\varepsilon = \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = \frac{1}{N(N+1)}$ , або при  $N \gg 1$ :  $\varepsilon \sim$

$1/N^2$ , звідки  $N \sim \varepsilon^{-1/2}$ . Порівнюючи з  $N \sim \varepsilon^{-D}$ , знаходимо фрактальну розмірність геометричного ряду:  $D = 1/2$ . Подібним чином можна розглядати практично всі ієрархічні структури.

Особливе значення фрактального аналізу часових рядів у тім, що він враховує поведження системи не тільки в період вимірювань, але і його передісторію.

Фрактальна розмірність, є показником складності кривої часового ряду.

Аналізуючи чергування ділянок з різною фрактальною розмірністю, можна навчитися прогнозувати поведження системи. І що саме головне, діагностувати і прогнозувати нестабільні стани.

Істотним моментом даного підходу є наявність критичного значення фрактальної розмірності часової кривої, при наближенні до якого система втрачає стійкість і переходить у нестабільний стан і параметри швидко або зростають, або спадають, залежно від теперішньої тенденції.

Нижче проаналізована динаміка зміни витрати бурякової стружки (рис.2) і витрати дифузійного соку (рис.3).

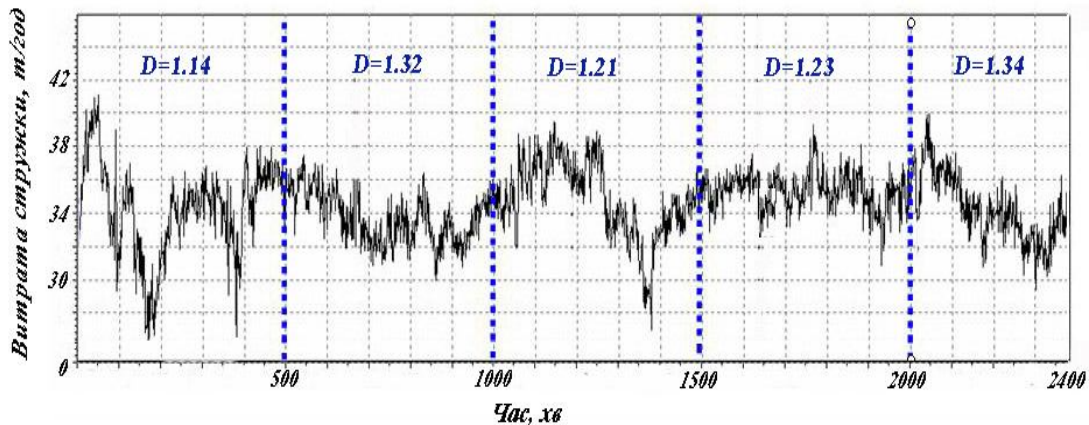


Рис.2. Визначення фрактальної розмірності зміни витрати бурякової стружки.

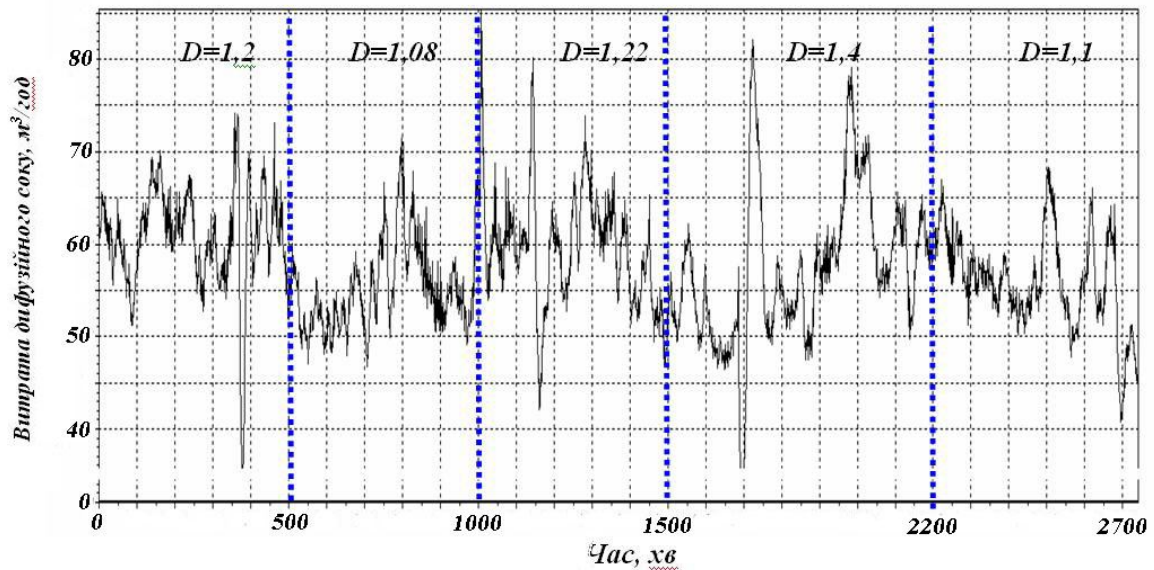


Рис. 3. Визначення фрактальної розмірності зміни витрати дифузійного соку

Фрактальна розмірність певної величини може використовуватися як "індикатор" катастрофи.

Аналіз експериментальних даних показує, що лінія тренда для часового ряду добре описується рівнянням:

$$\bar{y}(t) = \bar{y}(t_0) + \frac{K_f(t_0)(t-t_0)}{(D-D_0)^\beta}, \quad (7)$$

де  $y(t_0)$  - середнє значення величини за період, що передує прогнозованому;  $K_f$  і  $\beta$  коефіцієнти;  $t_0$  - період часу, що передує прогнозованому;  $t$  - час, на якій робиться прогноз;  $D_0$  - фрактальна розмірність на періоді, що передує прогнозованому.

Також величина фрактальної розмірності може служити індикатором кількості факторів, що впливають на систему [5]. При фрактальній розмірності менше 1.4, на систему впливає одна або кілька сил, що рухають систему в одному напрямку. Якщо розмірність близько 1.5, то сили, що діють на систему, різнонаправлені, але більш-менш компенсують одна одну. Якщо ж фрактальна розмірність значно більше 1.6, система стає нестійкою і готова перейти в новий стан.

На рис. 4 та рис. 5 зображена динаміка зміни фрактальної розмірності часових рядів витрати бурякової стружки та відкачки дифузійного соку з дифузійного апарату.

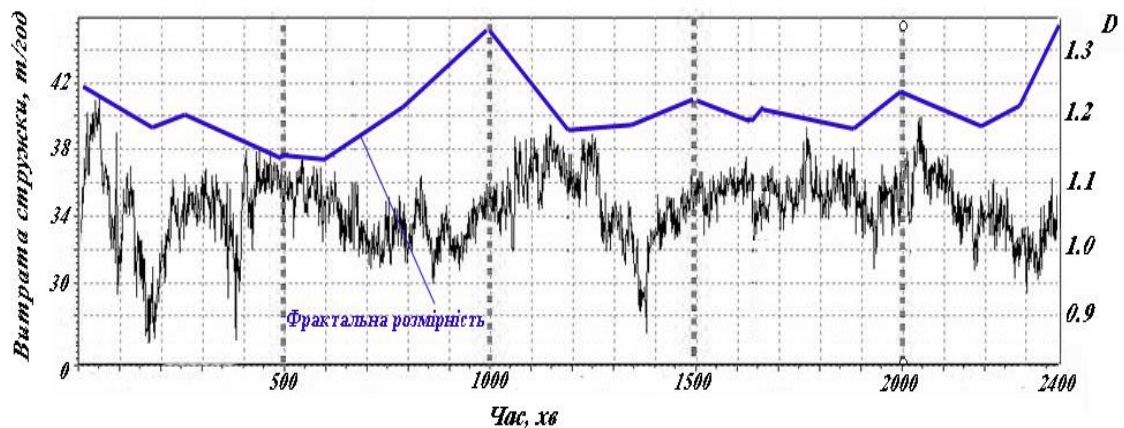


Рис. 4. Динаміка зміни фрактальної розмірності часового ряду витрати бурякової стружки



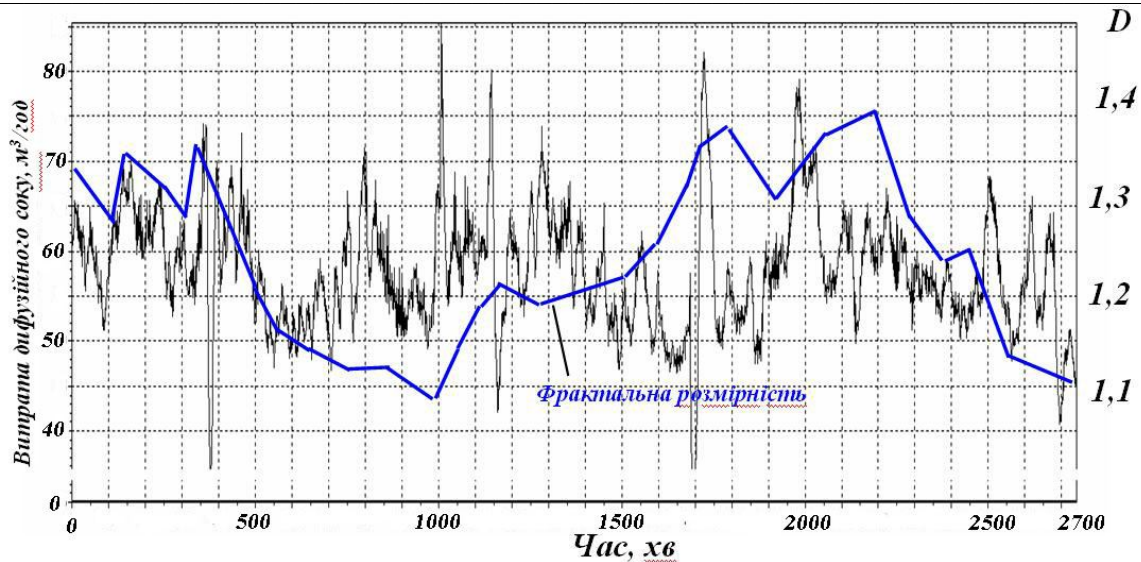


Рис. 5. Динаміка зміни фрактальної розмірності часового ряду відкачки дифузійного соку з дифузійного апарата

Дослідивши динаміку видно, що під час досить стабільних періодів і повільних підйомів фрактальна розмірність часового ряду залишається досить невисокою, у той час як у періоди різких змін сумарна фрактальна розмірність зростала.

Ще одним методом фрактального аналізу, є метод, що базується на алгоритмі R/S – аналізу часових рядів.

Сьогодні у зв'язку з розвитком теорії стохастичних фракталів стає популярною така характеристика часових рядів як, показник Херста  $H$ . Відомо, що він пов'язаний із традиційною "клітинною" фрактальною розмірністю  $D$  простим співвідношенням:

$$D + H = 2. \quad (8)$$

Показник Херста являє собою міру персистентності - схильності процесу до трендів [6]. Значення  $H > 1/2$  означає, що спрямована в певну сторону динаміка процесу в минулому, найімовірніше, спричинить продовження руху в тому ж напрямку. Якщо  $H < 1/2$ , то прогнозується, що процес змінить спрямованість.  $H = 1/2$  означає невизначеність - броунівський рух.

Для визначення фрактальних характеристик хаотичних інформаційних потоків розраховувались значення показника Херста за певний період для часових рядів основних технологічних змінних дифузійного відділення цукрового заводу. Показник Херста зв'язують із коефіцієнтом нормованого розмаху (R/S), де  $R$  – обчислюваний певним чином "розмах" відповідного часового ряду, а  $S$  – стандартне відхилення.

Показник Херста обчислюється за наступним алгоритмом. Спочатку обчислюється середнє значення вимірюваної змінної за  $N$  хвилин:

$$\langle \xi \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi(t). \quad (9)$$

Потім розраховується накопичене відхилення ряду вимірювань ( $t$ ) від  $\langle \xi \rangle_N$  середнього:

$$X(t, N) = \sum_{u=1}^t (\xi(u) - \langle \xi \rangle_N). \quad (10)$$

Після цього розраховується різниця максимального й мінімального відхилення, що накопичилось, що і називається "розмахом":

$$R(N) = \max_{1 \leq t \leq N} X(t, N) - \min_{1 \leq t \leq N} X(t, N). \quad (11)$$

Стандартне відхилення розраховується за відомою формулою:

$$S = \left( \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\xi(t) - \langle \xi \rangle_N)^2 \right)^{1/2}. \quad (12)$$

У свій час Херст експериментально виявив, що для багатьох часових рядів справедливо:

$$R/S = (N/2)^H. \quad (13)$$

Саме коефіцієнт  $H$  і одержав назву показника Херста [7].

Розрахунок показника Херста для вихідних часових рядів, які характеризує зміну витрати бурякової стружки (рис.2) та витрати дифузійного соку в апараті (рис. 3), показано на рис. 6 та рис.7.

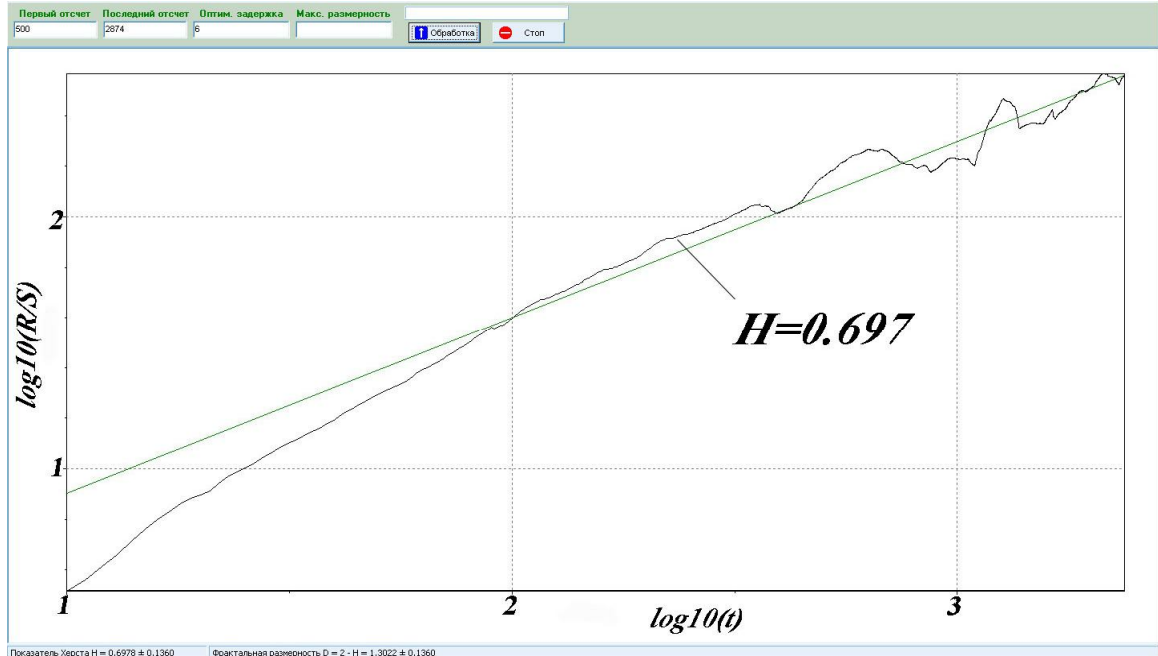


Рис. 6. Розрахунок показника Херста для витрати бурякової стружки

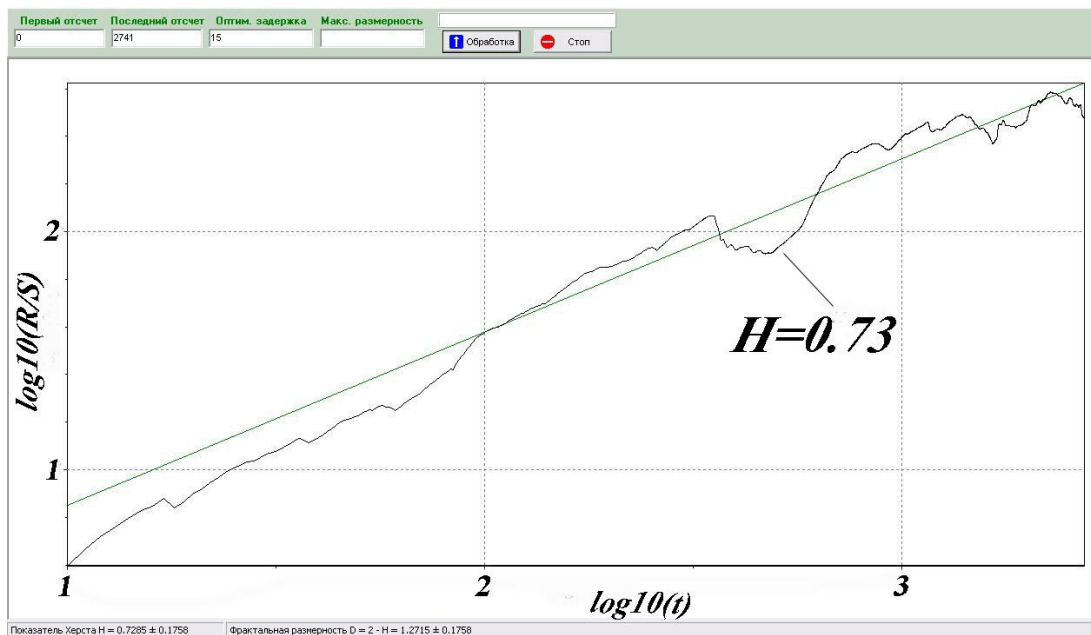


Рис. 7. Розрахунок показника Херста для витрати дифузійного соку

Обчислені показники Херста  $H > 0,5$ , що свідчить про характерну персистентність розглянутої змінної, та можливу достатньо глибоку прогнозованість.

---

**Висновки**

З вищезазначеного можна зробити такий висновок, що оцінюючи фрактальну розмірність та показник Херста можна з повною ймовірністю говорити про те, що даний часовий ряд, і як в свою чергу і сама дифузійна установка є складним нелінійним динамічним об'єктом управління, який має характерну персистентну часову поведінку. Запропоновані методи можуть застосовуватись для аналізу інших технологічних параметрів дифузійного апарату і в цілому для прогнозування тенденції розвитку процесу екстрагування цукру.

1. Кишенько В.Д. Задачі технологічного моніторингу в системах керування виробничими процесами технологічних комплексів // Автоматизація виробничих процесів.- 2006.- №2(23).- С.48-52.
2. Шустер Г. Детерминированный хаос.- М.: Мир, 1988.-249с.
3. Сигел Э. Практическая бизнес-статистика.– М.: Издательский дом «Вильямс», 2002. –1056 с.
4. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации, элементы теории фракталов // Радиотехника и электроника.- 2000.- Т. 45.- N 11.- С. 1285-1292.
5. Э. Петерс Фрактальный анализ финансовых рынков. Применение теории Хаоса в инвестициях и экономике.- М.:Интернет-трейдинг, 2004. -304 с.
7. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 528 с.
8. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. – М.: Мир, 2000. – 333 с.