УДК 621.395.4
О.А.Кожухівська
Черкаський державний технологічний університет

ЗАСТОСУВАННЯ МАТРИЦЬ УОЛША ДЛЯ ДЕКОДУВАННЯ КОДІВ РІДА-МАЛЛЄРА

В роботі проведено дослідження факторизації матриць Уолша і їх використання для декодування кодів Ріда-Маллєра. Використання факторизації матриць Уолша - Адамара дозволяє забезпечувати певний виграш у швидкодії без суттєвого збільшення затрат пам'яті ЕОМ. Запропоновані факторизації матриць Уолша – Пелі зручні для реалізації їх у режимі реального часу.

Ключові слова: *матриці Уолша, коди Ріда-Маллєра, декодування.*

Коди великої довжини, наприклад коди Ріда – Маллєра першого порядку (РМ-1), володіють високою коректуючою здатністю. Вони знаходять широке застосування у системах зв'язку, у криптології. Задача зменшення складності алгоритмів декодування виявляється важливою і актуальною. Процедура декодування кодів РМ-1 може реалізовуватися апаратурними і програмними засобами. У випадку реалізації програмними засобами можливе використання матриць Уолша. Розглянемо використання факторизації матриць Уолша-Адамара для декодування кодів РМ-1 у векторному режимі для комп'ютерів з архітектурою типу одна команда, багато даних (ОКБД). Представимо отримані у [1] матриці факторизації Уолша-Адамара так:

$$H_h(N)=\Pi_{j=1}^{n}\{E_{2^{(j-1)}}\otimes[H(2)\otimes E_{2^{(n-j)}}]\}, \tag{1}$$

$$H_h(N)=\Pi_{j=1}^{n}\{E_{2^{(n-j)}}\otimes[H(2)\otimes E_{2^{(j-1)}}]\}, \tag{2}$$

$$H_h(N)=\left[E_{2^{(n-1)}}\,\bar{\otimes}\,H(2)\right]^{n}, \tag{3}$$

$$H_h(N)=\left[E_{2^{(n-1)}}\,\tilde{\otimes}\,H(2)\right]^{n}. \tag{4}$$

Приведемо приклади факторизації матриць Уолша-Адамара при $N=8$, $n=3$ згідно з виразами (1), (2) з наступними позначеннями:

$$H_h(8)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\\1&0&0&0&-1&0&0&0\\0&1&0&0&0&-1&0&0\\0&0&1&0&0&0&-1&0\\0&0&0&1&0&0&0&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&1&0&&&&\\0&1&0&1&&&&\\1&0&-1&0&&&&\\0&1&0&-1&&&&\\&&&&1&0&1&0\\&&&&0&1&0&1\\&&&&1&0&-1&0\\&&&&0&1&0&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&0&0&&&&\\1&-1&0&0&&&&\\0&0&1&1&&&&\\0&0&-1&-1&&&&\\&&&&1&1&0&0\\&&&&1&-1&0&0\\&&&&0&0&1&1\\&&&&0&0&-1&-1\end{bmatrix}=C_3C_2C_1$$

$$H_h(8)=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\1&-1&1&-1&1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1&1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1&1&-1&-1&1\\1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\\1&-1&1&-1&-1&1&-1&1\\1&1&-1&-1&-1&-1&1&1\\1&-1&-1&1&-1&1&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&1\\1&-1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&-1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&-1\end{bmatrix}^{3}=B^{3}.$$

В [1] розглядаються два алгоритми декодування кодів РМ-1. Використовуючи вирази (1), (3), можна упростити алгоритми декодування кодів, що розглядаються, шляхом використання цих виразів у векторному режимі для комп'ютерів з архітектурою типу ОКБД. Для цього

представимо ці алгоритми у вигляді добутку даних векторного коду на матрицю $H(2)$. Щоб «не втратити» дані результатів кожної ітерації, здійснимо переставлення вхідних даних способом «ідеального перемішування» [2], тобто вхідні дані на кожній ітерації розіб'ємо на верхню і нижню половини і елементи нижньої половини вставимо між елементами верхньої половини.

Наприклад, $\langle 01234567\rangle \to \langle 04152637\rangle$. Вираз (3) прийме вигляд:

$$H_h(N) = \left\{\left[\left(E_{2^{(n-1)}} \otimes H(2)\right)P\right]^t\right\}^n, \tag{5}$$

де P – оператор переставлень (переставна матриця) наступного вигляду: $P\left(x_1, x_2, \ldots, x_{2^n}\right) = \left(x_1, x_{2^{n-1}+1}, x_2, x_{2^{n-1}+2}, \ldots, x_{2^{n-1}}, x_{2^n}\right)^t$.

Для $N = 8$ оператор P має вигляд:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Можна скористатися також і оператором F, який має вигляд: $F\left(x_1, x_2, \ldots, x_{2^n}\right) = \left(x_1, x_3, \ldots, x_{2^{n-1}-1}, x_2, x_4, \ldots, x_{2^n}\right)^t$.

Для $N = 8$ оператор F представляється у вигляді наступної матриці:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Оператори P і F зв'язані співвідношенням: $P = F^t$, де t – символ транспонування матриць.

Тоді вираз (3) буде мати вигляд:

$$H_h(N) = \left\{F\left[E_{2^{(n-1)}} \otimes H(2)\right]\right\}^n.$$

Проробимо такого роду дії з алгоритмом виразу (1). Вхідний масив початкових даних перетворюється за допомогою матриці $H(2)$. Потім вихідні дані у кожній ітерації групуються по 4, потім по 8 і т.д. до N елементів, тобто у кожній ітерації члени групуються по 2^i елементів, де i – номер ітерації. У кожній групі обчислення відбуваються за формулами:

$$Y_m = X_m + X_{\left(m+\frac{k}{2}\right)};\ Y_{\left(m+\frac{k}{2}\right)} = X_m - X_{\left(m+\frac{k}{2}\right)};\ m = \overline{1, \frac{k}{2}},$$

де k – число елементів у групі, X – вхідні дані, Y – вихідні дані.

Приклад: $H_h(8) = B^3 = \left[\left(\tilde{B}P\right)^t\right]^3$, де $\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 1 & -1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & -1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Очевидно, що оптимальне число процесорів для обчислювального процесу співпадає з кодовою відстаню і дорівнює $N/2$ на всіх ітераціях.

Застосуємо описані вище алгоритми модифікованого швидкого перетворювання Уолша (МШПУ) до алгоритму декодування кодів РМ-1 на основі швидкого перетворювання Уолша (ШПУ) [1]. У цьому випадку алгоритм декодування вимагає $\left[2n + \frac{N(n-1)}{2}\right]$ операцій додавання, $(n-1)$ операцій порівняння і n операцій взяття модуля. Асимптотична складність МШПУ визначається виразом $\left[2n + \frac{N(n-1)}{2}\right]$.

Використання факторизації матриць Уолша-Адамара для декодування кодів РМ-1 у векторному режимі для комп'ютерів з архітектурою команд типу ОКБД забезпечує виграш у швидкодії у 1,5 рази без суттєвого збільшення затрат пам'яті ЕОМ порівняно з алгоритмом, який приведений у роботі [3].

Розглянемо застосування алгоритмів перетворювання Уолша-Пелі для декодування кодів Ріда-Маллєра. Способи факторизації матриць Уолша-Пелі розглянуті у [1]. Матриці Уолша-Пелі можна представити у вигляді:

$$H_p(N) = \prod_{j=1}^{n} E_{2^{(j-1)}} \otimes \left[H(2) \bar{\otimes} E_{2^{(n-j)}}\right], \tag{6}$$

$$H_p(N) = \prod_{j=1}^{n} E_{2^{(n-j)}} \otimes \left[H(2) \tilde{\otimes} E_{2^{(j-1)}}\right]. \tag{7}$$

Запропоновані алгоритми факторизації матриць Уолша-Пелі зручні для реалізації їх у режимі реального часу, тому що для початку обчислень спектральних коефіцієнтів достатньо мати на вході тільки два перших відліки сигналу. Алгоритми швидкого перетворювання Уолша - Пелі (ШПУП), які представлені у вигляді виразів (6) і (7), можна використовувати для роботи у векторному режимі на обчислювальних комплексах типу ОКБД.

Розглянуті алгоритми (6) і (7) можна векторизувати за допомогою алгоритму розщеплення, який являє собою спосіб обчислення перетворювання N у вигляді двох перетворювань довжиною $N/2$.

Приведемо приклади представлення матриць Уолша-Пелі у вигляді виразів (6) і (7) при $N = 8, n = 3$ з наступними позначеннями.

$$H_p(8)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&-1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&-1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&-1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0&0&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&1&0&&&&\\1&-1&-1&0&&&&\\0&0&0&1&&0&&\\0&0&0&-1&&&&\\&&&&1&1&1&0\\&&&&1&-1&-1&0\\&0&&&0&0&0&1\\&&&&0&0&0&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&0&0&&&&\\1&-1&0&0&&&&\\0&0&1&1&&0&&\\0&0&1&-1&&&&\\&&&&1&1&0&0\\&&&&1&-1&0&0\\&0&&&0&0&1&1\\&&&&0&0&1&-1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&0&0&&&&\\1&-1&0&0&&&&\\0&0&1&-1&&0&&\\0&0&1&-1&&&&\\&&&&1&1&0&0\\&&&&1&-1&0&0\\&0&&&0&0&1&-1\\&&&&0&0&1&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&0&0&&&&\\0&0&1&1&&&&\\1&-1&0&0&&0&&\\0&0&1&-1&&&&\\&&&&1&1&0&0\\&&&&0&0&1&1\\&&0&&1&-1&0&0\\&&&&1&-1&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&1\\1&-1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&-1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&-1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\\1&1&-1&-1&1&1&-1&-1\\1&1&-1&-1&-1&-1&1&1\\1&-1&1&-1&1&-1&1&-1\\1&-1&1&-1&-1&1&-1&1\\1&-1&-1&1&1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1&-1&1&1&-1\end{bmatrix}=W_3W_2W_1$$

.

Покладемо: $A_k=X_k$; $B_k=X_{\left(k+\frac{N}{2}\right)}$; $k=\overline{0,\frac{N}{2}-1}$.

До послідовностей $\{A_k\}$ і $\{B_k\}$ застосуємо ШПУП довжиною $N/2$:

$$Y_i=\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}A_kWal_p(k,i);\ Z_i=\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}B_kWal_p(k,i);\ i=\overline{0,\frac{N}{2}-1}.$$

Використавши послідовності $\{Y_i\}$ і $\{Z_i\}$, знайдемо послідовність $\{X_i\}$ довжиною N за формулами:

$$X_{2i}=Y_i+Z_i;\ X_{(2i+1)}=Y_i-Z_i;\ i=\overline{0,\frac{N}{2}-1}.$$

Векторизувати алгоритм ШПУП можна також за допомогою перетворювання Джентлмена-Сенде [4]:

$$A_k=X_k+X_{\left(k+\frac{N}{2}\right)};\ B_k=X_k-X_{\left(k+\frac{N}{2}\right)};\ k=\overline{1,\frac{N}{2}}.$$

До послідовностей $\{A_k\}$ і $\{B_k\}$ застосуємо ШПУП розмірністю $\frac{N}{2}$. У результаті отримаємо послідовності $\{Y_i\}$ і $\{Z_i\}$.

Упорядкуємо ці масиви: $C_{(2i-1)}=Y_i$; $C_{2i}=Z_i$; $i=\overline{1,\frac{N}{2}}$.

Підсилимо алгоритм розщеплення для ШПУП. Для цього використовуємо співвідношення (6) і на прикладі при $N=8$ покажемо спосіб векторизації ШПУП за допомогою матриці $H(2)$.

N	1-ша ітерація	2-га ітерація	3-тя ітерація
1	1+2	1+3	1+5
2	1-2	1-3	1-5
3	3+4	2+4	2+6
4	3-4	2-4	2-6
5	5+6	5+7	3+7
6	5-6	5-7	3-7
7	7+8	6+8	4+8
8	7-8	6-8	4-8

Масив початкових даних обробляється за допомогою матриці $H(2)$. Потім вихідні дані групуються по 4, 8 і т.д. елементів, згідно з ітераціями. У кожній групі ітерації виконуються за формулами:

$$Y_{(2i-1)} = X_{\left(i+\frac{k}{2}\right)};\ Y_{2i} = X_i - X_{\left(i+\frac{k}{2}\right)};\ i = \overline{1,\frac{k}{2}},$$

де $k = 2^i$ – число елементів у групі; i – номер ітерації.

Запропоновані алгоритми можна використовувати у процедурі декодування кодів РМ-1. Формальна сутність цієї задачі зводиться до наступного. Нехай $X = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})^T$ – вектор відліків вхідного сигналу, H – матриця Уолша-Пелі. Необхідно обчислити найбільш економні способи добутку $Y = HX = (y_o, y_1, \ldots, y_{N-1})^T$ і визначити номер його найбільшої компоненти $y_i = (\max y_i)_i$.

Розглянемо приклад. Нехай вектор на вході каналу зв'язку $X = \langle 01010101 \rangle$, а на виході каналу зв'язку $Y = \langle 01110101 \rangle$. Замінимо $(1 \to 1)$, $(0 \to -1)$, отримаємо $V = \langle -11-11-11-11 \rangle$, $W = \langle -1111-11-11 \rangle$. Обчислимо

$$W_1' = W_1 \cdot W^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix};$$

$$W_2' = W_2 \cdot W_1' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & & & & \\ 1 & -1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & 1 & -1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$W_3' = W_3 \cdot W_2' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 1 & -1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & -1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \\ -6 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

У векторі W_3' максимальний елемент з номером $i = 5$, його значення дорівнює 6. За номером максимального елементу визначаємо рядок матриці $H_p(8)$, яка задає кодовий вектор $\langle 1-11-11-11-1 \rangle$. Внаслідок того, що максимальний елемент від'ємний, кодовий вектор задається інверсією рядка 5 матриці $H_p(8)$. Отже, кодовий вектор задається вектором $V = \langle -11-11-11-11 \rangle$ або у двійковому коді $X = \langle 01010101 \rangle$, тобто вектор визначений правильно. Використовуючи описані вище способи векторизації, можливо збільшити швидкодію декодування кодів РМ-1.

Приведемо порівняльний аналіз векторного алгоритму ВШПУП (векторне швидке перетворювання Уолша-Пелі), який оснований на алгоритмі розщеплення, з алгоритмами ШПУ і НА, які описані у роботах [3, 4].

Алгоритм декодування ВШПУП, також як і МШПУ, вимагає $\left[2n + \frac{N(n-1)}{2} \right]$ операцій додавання, $(n-1)$ операцій порівняння і n операцій взяття модуля.

Нехай довжина коду дорівнює $N = 16$. Тоді дані про алгоритми ШПУ, НА і ВШПУП зведемо у табл. 1.

Таблиця 1

Операції \ Алгоритми	ШПУ	НА	ВШПУП
Додавання	64	52	32
Порівняння	15	5	15
Взяття модуля	16	30	16

Із приведеної таблиці 1 виходить, що виграш у швидкодії алгоритму ВШПУП порівняно з алгоритмом ШПУ приблизно у 1,5 рази, а у порівнянні з алгоритмом НА у 1,35 раза.

Таким чином, запропоновані у статті дослідження структури алгоритмів ШПУП показали також можливість використання перетворювання Уолша-Пелі як у режимі реального часу, так і у векторному режимі для декодування кодів РМ-1.

Розглянемо алгоритми декодування кодів РМ-1 з використанням запропонованих у статті способів генерації усіх елементів послідовностей для матриць Уолша-Адамара і Уолша-Пелі [1] .

Способи генерації усіх елементів послідовностей для матриць Уолша-Адамара і Уолша-Пелі знаходять застосування при декодуванні кодів Ріда-Маллєра. Коди, які побудовані з використанням матриць Уолша, володіють великою кодовою відстаню $\left(d = \frac{N}{2} \right)$ і дозволяють виправляти велику кількість похибок. Наприклад, коди Адамара довжиною $N = 2^n$ виправляють $k_1 = 2^{n-2} - 1$ похибок і $k_2 = 2^{n-2}$ виявляють.

Розглянемо ряд способів для отримання матриць Уолша.

Сукупність k-розрядних чисел можна представити у вигляді квадратної матриці H порядку 2^k, елементи якої (0 і 1) $H = BB^T \pmod 2$, де

$$B=\left[b_{ij}\right]=\begin{bmatrix}0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \dots & 0 & 1\\ . & \dots & . & .\\ 1 & \dots & 1 & 0\\ 1 & \dots & 1 & 1\end{bmatrix};\ i=\overline{0,N-1};\ j=\overline{0,k-1},$$

B^T – транспонована матриця до B.

Для отримання матриць Уолша-Пелі порядку 2^k необхідно матрицю B перемножити на матрицю $B^{\langle T\rangle}$, де $B^{\langle T\rangle}$ – інвертована матриця, тобто її рядки розташовані у оберненому порядку по відношенню до матриці B^T.

Приклади:

$$N=4,\ n=2.\ B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix};\ B^T=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix};\ B^{\langle T\rangle}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix};$$

$$H_h(4)=B\cdot B^T\,(\mathrm{mod}\,2)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix};\ H_p(4)=B\cdot B^{\langle T\rangle}\,(\mathrm{mod}\,2)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Виконуючи відображення інформації $(0\to 1;1\to -1)$, можна отримати звичайні матриці Уолша-Адамара і Уолша-Пелі. Указані вище матриці можливо отримати і рекурентним шляхом за допомогою кронекеровського добутку матриць і кронекеровського добутку матриць за рядками [1].

Позначимо

$H(2)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$, або у двійковій арифметиці $H(2)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

Тоді

$$H_h(4)=H(2)\otimes H(2)=\begin{bmatrix}H(2) & H(2)\\ H(2) & -H(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix};$$

$$H_h(4)=H(2)\otimes H(2)=\begin{bmatrix}H(2) & H(2)\\ H(2) & \overline{H(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix},$$

де $\overline{H(2)}$ – інверсна матриця до $H(2)$ і т.д.

$$H_h(4)=H(2)\otimes H(2)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\ \text{або}\ H_p(4)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\ \text{і т.д.}$$

Розглянемо простий спосіб отримання вектор-послідовностей матриць Уолша-Адамара.

Нехай $N=4$; $n=2$, тоді $x_1=\langle 0101\rangle$, $x_2=\langle 0011\rangle$. Позначимо: $r_0=[0000]$; $r_1=x_1=[0101]$; $r_2=x_2=[0011]$; $r_{12}=r_1\oplus r_2=[0110]$, де $\oplus$ – операція порозрядного додавання за модулем два (виключне або). Аналогічно можна отримати вектор-послідовності матриць Уолша-Пелі: $r_0=[0000]$; $r_1=[0011]$; $r_2=[0101]$; $r_{12}=[0110]$. Такого виду представлення матриць Уолша знаходить застосування при декодуванні кодів Ріда-Маллєра.

Розглянемо простий і ефективний алгоритм виявлення і виправлення похибок кодів Ріда-Маллєра з використанням останнього способу отримання матриць Уолша. Продемонструємо це на прикладі декодування коду Ріда-Маллєра при $N=8$.

Нехай на вході каналу зв'язку $X=\langle 01010101\rangle$, а на виході $Y=\langle 01110101\rangle$. При $N=8$, $n=3$ випишемо вектор-послідовності матриць Уолша-Адамара r_0, $\overline{r_0}$, r_1, r_2, r_3 і порівняємо з ними вектор Y за числом співпадіння їх розрядів. Нехай $wt(Y)$ – вага двійкової послідовності; $dist(Y,r)=wt(Y\oplus r)$ – відстань між двома кодовими послідовностями. Очевидно, що мінімальна відстань між векторами Y і $\{r\}$ буде $dist(Y,r_1)=1$.

Висновки

Використання факторизації матриць Уолша-Адамара для декодування кодів РМ-1 у векторному режимі для комп'ютерів з архітектурою команд типу одна команда, багато даних (ОКБД) забезпечує виграш у швидкодії у 1,5 рази без суттєвого збільшення затрат пам'яті ЕОМ порівняно з відомими алгоритмами. Запропоновані алгоритми факторизації матриць Уолша-Пелі зручні для реалізації їх у режимі реального часу, тому що для початку обчислень спектральних коефіцієнтів достатньо мати на вході тільки два перших відліки сигналу. Дослідження структури алгоритмів ШПУП показали також можливість використання перетворювання Уолша-Пелі як у режимі реального часу, так і у векторному режимі для декодування кодів РМ-1. Запропоновані способи отримання вектор-послідовностей матриць Уолша дають виграш у швидкодії і скорочують об'єм необхідної пам'яті ЕОМ. Вони виявляються більш ефективними порівняно з відомими способами, описаними в [5].

1. Кожуховский А.Д. Теоретические основы ортогональных дискретных преобразований и их применение для анализа и математического моделирования научно-технических задач: Дис. ... д.т.н.: 05.13.16.- К., - 1993. - 412 с.
2. Зайцев Г.В., Зиновьев В.А., Симаков Н.В. Быстрое корреляционное декодирование блочных кодов // Кодирование и передача дискретных сообщений в системах связи. - М., 1976.- С. 74 - 85.
3. Шеховцов О.И., Горохов С.Г. Передача информации по нестационарным каналам связи.- Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.- 172 с.
4. Лицын С.И., Шеховцов О.И. Быстрый алгоритм декодирования кодов Рида – Маллера первого порядка // Проблемы передачи информации.- 1983.- Т. 19.- № 2.- С. 3 - 7.
5. Irsid M.I. A Simple method for Determining Hadamard. Sequency Vectors // IEEE Trans. Comp.- 1988. - M. 37.- B.6.- P. 743 - 745.