

УДК 539.3

А.Ю.Коцюба, С.В.Лавренчук

Луцький національний технічний університет

### КОМП'ЮТЕРНЕ МЕДЕЛЮВАННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ЖОРСТКОГО ШТАМПА СКЛАДНОЇ ФОРМИ ТА ПІВПЛОЩИНИ З УРАХУВАННЯМ СИЛ ТЕРТЯ

Дана робота присвячена питанням побудови цифрової моделі взаємодії жорсткого штампа складної форми і пружної півплощини, розробки й апробації схем комплексного дослідження їх поведінки, а саме: знаходження ділянок контакту та розподілу напружень після контактної взаємодії.

Ключові слова: Альтернативна система, жорсткий штамп, закон Кулона-Амонтона, інтегральні рівняння, квадратичне програмування, квадратурні формули, комп'ютерна модель, контактна задача, математична модель, півплощина, пружна основа, розподіл напружень, теорія пружності, тертя, тестування, числовий алгоритм, штамп складної форми.

Постановка задачі. Розробити математичну та комп'ютерну модель контактної взаємодії жорсткого штампа складної форми та півплощини з урахуванням сил тертя. Модель повинна давати змогу не лише швидко отримати необхідні числові дані, але й наочно зображати контактну взаємодію та поведінку тіл після неї.

Для побудови моделі необхідно задатися деякими початковими умовами. Нехай верхня межа пружного тіла задається рівнянням  $g(x, y) = 0$ , і відомо, що воно знаходиться в контактній взаємодії з жорстким штампом, який до контакту описується рівнянням  $f(x, y) = 0$ . Крім цього, відомими є головний вектор  $P$  та момент  $M$  всіх зусиль, що прикладені до штампа. Прийmemo, що перед навантаженням штамп дотикається в деякій точці  $\Theta$  до границі тіла. Будемо вважати, що штамп може мати складну форму, а область контакту при цьому може складатися з декількох, довільним чином розташованих ділянок.

При розв'язуванні задачі покладемо, що між штампом та пружним тілом мають місце сили тертя. Нехай при цьому штамп знаходиться в стані граничної рівноваги і на нього збоку (рис. 1) діє сила  $P_x$ .

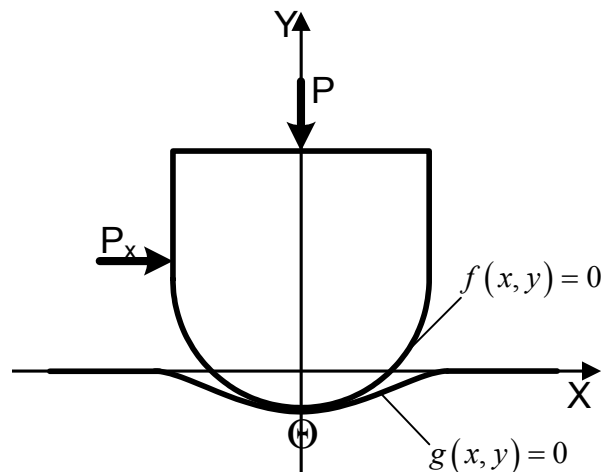


Рис. 1

При моделюванні даної задачі було використано числово-аналітичний алгоритм, який ґрунтується на методах інтегральних рівнянь, механічних квадратур та квадратичного програмування.

Умови контакту. Для запису умови контакту врахуємо те, що після деформування граничні точки пластини, що знаходяться в області контакту, будуть задовольняти рівнянню границі штампа з врахуванням його зміщення в напрямку координатної вісі  $Oy$  на деяку відстань  $D$  та

його повороту навколо точки  $\Theta$  на деякий кут  $\theta$ . Тобто якщо рівняння штампа після відповідного зміщення та повороту матиме вигляд

$$f(x + y\theta, D + y - x\theta) = 0,$$

а координати границі пластинки після деформування –  $\xi = x + u(x, y)$ ,  $\eta = y + v(x, y)$ , де  $(u, v)$  – переміщення границі пластинки, які далі будемо разом з величиною зміщення  $D$  та кутом повороту  $\theta$  вважати малими величинами, то рівняння штампа після навантаження матиме вигляд

$$f(x + u(x, y) + (y + v(x, y))\theta, D + y + v(x, y) - (x + u(x, y))\theta) = 0. (1)$$

Проведемо лінеаризацію рівняння (1), знехтувавши при цьому добутками  $u\theta$  та  $v\theta$ . Долучимо до нього рівняння границі пружного тіла в околі штамп, яке запишемо у параметричному вигляді  $x = g_1(t)$ ,  $y = g_2(t)$ , де  $t$  – параметр. Після деяких спрощень одержимо умову контакту у вигляді

$$f_1(t)\tilde{u}(t) + f_2(t)\tilde{v}(t) = -\tilde{f}(t) - Df_2(t) + \theta f_3(t), (2)$$

де  $\tilde{f}(t) = f(g_1(t), g_2(t))$ ,  $f_1(t) = f'_x(g_1(t), g_2(t))$ ,  $f_2(t) = f'_y(g_1(t), g_2(t))$ ,  $f_3(t) = g_1(t) \cdot f_2(g_1(t), g_2(t)) - g_2(t) \cdot f_1(g_1(t), g_2(t))$ ;  $\tilde{u}(t) = u(g_1(t), g_2(t))$ ,  $\tilde{v}(t) = v(g_1(t), g_2(t))$ .

Побудова альтернативної системи інтегральних рівнянь та нерівностей задачі. Прийемо, що дотичні напруження під штампом  $\tau_{xy}$  пов'язані з нормальними  $\sigma_y$  згідно з законом Кулона-Амонтона  $\sigma_y = k\tau_{xy}$ , де  $k$  – коефіцієнт тертя. Якщо позначити нормальні напруження через  $\sigma$  і врахувати цей закон, то з (2.1) одержимо

$$\begin{cases} \tilde{u}(x) = \frac{\chi-1}{4G} \int_0^x \sigma(t) dt + \frac{\chi+1}{4\pi G} k \int_L \sigma(t) \ln|t-x| dt + const, \\ \tilde{v}(x) = \frac{\chi+1}{4\pi G} \int_L \sigma(t) \ln|t-x| dt - \frac{\chi-1}{4G} k \int_0^x \sigma(t) dt + const. \end{cases} (3)$$

Нехай  $f(x, y) = y - f_{um}(x)$ , а  $g(x, y) = y - g_\varepsilon(x)$ . Тут розглянуто випадок, коли  $y = g_\varepsilon(x)$  – деяка мала за величиною функція (обмежена за модулем малим числом  $\varepsilon$ ), яка характеризує криволінійність границі пружного тіла. Тоді для співвідношення (2) отримаємо

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = g_\varepsilon(x) - f_{um}(x), \\ f_2(x) = 1, \\ f_3(x) = x + g_\varepsilon(x) \cdot f'_{um}(x). \end{cases} (4)$$

Нехтуючи в (2) доданком  $f_1(t)\tilde{u}(t)$  та підставивши (3) і (4) в (2), отримаємо інтегральне рівняння для знаходження  $\sigma(\xi)$  у вигляді

$$\frac{\chi+1}{4\pi G} \int_L \sigma(t) \ln|t-x| dt - k \frac{\chi-1}{4G} \int_0^x \sigma(t) dt = f_{um}(x) - g_\varepsilon(x) - D + \theta(x + g_\varepsilon(x) f'_{um}(x)), (5)$$

Для знаходження невідомих  $D$  і  $\theta$ , що входять у (5), доповнимо цю умову додатковими рівняннями, які впливають з умов рівноваги штампа

$$\begin{cases} \int_L \sigma(t) dt = P, \\ \int_L \sigma(t) t dt = M. \end{cases} (6)$$

Визначення контактних напружень з цих рівнянь є досить складною задачею. Це пов'язано з тим, що може мати місце контакт на кількох ділянках, знаходження меж яких зводиться до

відшукування розв'язків системи нелінійних рівнянь. Розв'язування цієї задачі в роботі проведемо чисельно. Для цього введемо в розгляд деяку область  $[a, b]$ , яка вміщує всі ділянки контакту. Назвемо її прогнозованою областю контакту. Покладемо в ній  $\sigma(x) = 0$  при  $x \notin L$ . Тоді умови (5)-(6) перепишемо у вигляді альтернативної системи інтегральних рівнянь-нерівностей

$$\begin{cases} \int_a^b \sigma(t)J(x,t)dt + D - \theta x = f_{um}(x) - g_\varepsilon(x), \text{ якщо } \sigma(x) < 0, \\ \int_a^b \sigma(t)J(x,t)dt + D - \theta x \leq f_{um}(x) - g_\varepsilon(x), \text{ якщо } \sigma(x) = 0, \\ \int_a^b \sigma(t)dt = P, \\ \int_a^b \sigma(t)t dt = M, \end{cases} \quad (7)$$

де  $J(x,t) = \frac{\chi+1}{4\pi G} \cdot \ln|t-x| - k \frac{\chi-1}{4G} \cdot K(x-t)$ , тут  $K(x) = \begin{cases} 1, \text{ при } x \geq 0, \\ 0, \text{ при } x < 0. \end{cases}$

Побудова квадратурних формул. Для чисельного розв'язування інтегральних рівнянь будемо використовувати метод механічних квадратур. Для цього наведемо спочатку квадратурні формули для інтегралів, що входять в інтегральні рівняння з системи рівнянь-нерівностей (7).

У перших дві умови в системі (7) входять інтеграли вигляду

$$I_1(x) = \int_a^b \sigma(t) \ln|t-x| dt \text{ та } I_2(x) = \int_a^b \sigma(t) K(x-t) dt, \quad (8)$$

тобто інтеграли, ядро в яких є різницевою функцією. В зв'язку з цим побудуємо квадратурні формули для інтегралів загального вигляду

$$I(x) = \int_a^b \sigma(t) F(x-t) dt, \quad (9)$$

де  $F(x)$  – інтегрована функція,  $\sigma(x)$  – обмежена неперервна функція, для якої виконується  $\sigma(a) = \sigma(b) = 0$ . Опишемо гладку функцію  $\sigma$  лінійними, кусково-неперервними функціями

$$\sigma(t) = \sum_{n=0}^N \sigma_n S_h(t - x_n), \quad (10)$$

де  $S_h(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{h}, \text{ при } |x| \leq h, \\ 0, \text{ при } |x| > h; \end{cases}$   $\sigma_n = \sigma(x_n)$ ,  $x_0, x_1, \dots, x_N$  – вузлові точки, що покривають

область  $[a; b]$ , причому  $x_0 = a$ ,  $x_{j+1} = x_j + h$ ,  $j = \overline{0, N-1}$ ,  $N+1$  – кількість вузлових точок,

$h = \frac{b-a}{N}$  – крок розбиття.

Підставимо далі представлення (10) в інтеграл (9) та, поклавши  $x = x_\nu$  ( $\nu = \overline{0, N}$ ), одержимо

$$I(x_\nu) = \sum_{n=0}^N \sigma_n \int_{-h}^h S_h(t) F((\nu-n)h-t) dt.$$

Звідси отримаємо

$$I(x_\nu) = \sum_{n=0}^N A_{\nu-n} \sigma_n, \quad (11)$$

де

$$A_m = \int_{-h}^h S_h(t) F(mh-t) dt. \quad (12)$$

В загальному випадку для довільних функцій  $F$  коефіцієнти (12) можуть бути знайдені чисельно з використанням стандартних програм, які розроблені в математичних комп'ютерних середовищах. Зазначимо, що ці програми дозволяють знаходити невластні інтеграли для інтегрованих функцій  $F$ .

Розглянемо випадок, коли інтеграли (12) можуть бути знайдені аналітично. Прийнемо, що відома функція  $F^{**}(x) = \int \int F(x) dx dx$ . Тоді легко показати, що

$$A_m = \frac{1}{h} (F^{**}(mh-h) - 2F^{**}(mh) + F^{**}(mh+h)).$$

Альтернативна система лінійних рівнянь та нерівностей. Використовуючи формули (11) для інтегралів (8), отримаємо квадратурні формули

$$I_j(x_v) = \sum_{n=0}^N A_{v-n}^j \sigma_n, \quad j = \overline{1, 2},$$

де

$$A_m^j = \frac{1}{h} (L^j(mh-h) - 2L^j(mh) + L^j(mh+h)), \quad j = \overline{1, 2};$$

$$\text{де } L^1(x) = \frac{x^2}{2} \left( \ln|x| - \frac{3}{2} \right), \quad L^2(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & \text{при } x \geq 0, \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

На основі побудованих квадратурних формул систему інтегральних рівнянь та нерівностей (7) запишемо в дискретному вигляді

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{N+2} A_{v,n} \sigma_n = F_v \text{ при } \sigma_v < 0, \\ \sum_{n=0}^{N+2} A_{v,n} \sigma_n \leq F_v \text{ при } \sigma_v = 0, \\ \sum_{n=0}^N \lambda_n^1 \sigma_n = P, \quad \sum_{n=0}^N \lambda_n^2 \sigma_n = M, \quad v = \overline{0, N}, \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{де } A_{v,n} = \frac{\chi+1}{4\pi G} \cdot A_{v-n}^1 - k \frac{\chi-1}{4G} \cdot A_{v-n}^2, \quad v, n = \overline{0, N}; \quad A_{v,N+1} = 1, \quad A_{v,N+2} = -(x_v + g_\varepsilon(x_v)) f'_{um}(x_v);$$

$F_v = f_{um}(x_v) - g_\varepsilon(x_v)$ ;  $\lambda_n^1 = h$ ,  $\lambda_n^2 = hx_n$ . Тут позначено  $\sigma_{N+1} = D$ ,  $\sigma_{N+2} = \theta$  і для останніх двох інтегралів (7) використано формулу трапецій та враховано, що  $\sigma(x)$  належить до класу неперервних функцій, що мають нульове значення на кінцях проміжку.

Задача квадратичного програмування. Використовуючи [5], систему лінійних рівнянь-нерівностей (13) зведемо до розв'язування задачі квадратичного програмування. Для цього розглянемо величину

$$Y = \sum_{v=0}^N C_v \left( \left( \sum_{n=0}^{N+2} A_{v,n} \sigma_n - F_v \right) \sigma_v \right), \quad (14)$$

де  $C_v$ ,  $v = \overline{0, N}$  – задані додатні сталі, вибір яких дозволяє покращити збіжність алгоритму. Очевидно, що ця величина досягає свого мінімуму, який дорівнює нулю, тоді, коли  $\sigma_n$  задовольняють умову (13). Тому умови, за яких величина  $Y$  досягає свого мінімуму, запишемо у вигляді

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{N+2} A_{v,n} \sigma_n \leq F_v, & v = \overline{0, N}, \\ \sum_{n=0}^N \lambda_n^1 \sigma_n = P, \\ \sum_{n=0}^N \lambda_n^2 \sigma_n = M, \\ \sigma_n \leq 0, & n = \overline{0, N}, \end{cases} \quad (15)$$

де  $\lambda_i^j, i = \overline{0, n}, j = \overline{1, 2}$  – коефіцієнти квадратурних формул.

Надалі задачу квадратичного програмування про мінімізацію величини (14) за умов (15) називатимемо ЗКП (14)-(15).

Тестування числового алгоритму. З метою дослідження точності та стійкості алгоритму виконаємо розрахунок контактних напружень для задач, для яких в літературі отримано аналітичний розв'язок.

Тестування проводилося для випадку параболічного штампа, коли  $f_{um}(x) = \frac{(x-x_c)^2}{2R}$ , де  $(x_c; 0)$  – вершина параболи, а  $R$  – радіус кривини у вершині. При розрахунках приймалось, що штамп зміщується вертикально (без повороту) та відома вертикальна сила  $P$ , що притискує штамп. Причому враховувалося тертя між основою та штампом. Для таких задач в [4] існує аналітичний розв'язок (з якого при  $k = 0$  отримуємо загальновідомий розподіл Герца)

$$p^*(x) = \frac{2P \cos \pi \alpha (a^* + d^* - x_c + x)^{\frac{1}{2}-\alpha} \cdot (a^* - d^* + x_c - x)^{\frac{1}{2}+\alpha}}{\pi(1-4\alpha^2)a^{*2}}, \quad (16)$$

де  $p^*(x) = \frac{\sigma^*(x)}{2G}$ ,  $\alpha = \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{k(\chi-1)}{\chi+1} \right)$ ,  $a^* = \sqrt{\frac{-P(\chi+1)R}{2\pi G(1-4\alpha^2)}}$ ,  $d^* = 2a^*\alpha$ . Результати

розрахунків контактних напружень при  $Q = -P/2GR = 0.00075$ ,  $N = 71$ ,

$b = -(a + 0.004R) = 0.028R$ ,  $k = 0.1$  та  $k = 0.725$  наведено на рис. 2. а) та б) відповідно.

Прямокутникам на цих рисунках відповідають рис. 2 в) і г), на яких у збільшеному масштабі зображено відповідні фрагменти контактних напружень. Тут суцільним кривим (1 і 2) відповідають відносні контактні напруження  $p(x) = \frac{\sigma(x)}{2G}$ , які знайдені чисельно, а штрих-

пунктирним кривим (1' і 2') – величина  $p^*(x)$ , що знайдена за аналітичними формулами (16). Для кожного з вибраних вище значень коефіцієнта тертя  $k$  на рис. 2 д) і е) наведено відповідні залежності між інтегральною відносною похибкою

$$\delta = \frac{\int_L |p(x) - p^*(x)| dx}{\int_L |p^*(x)| dx} \cdot 100\%$$

та кількістю точок розбиття  $N$ .

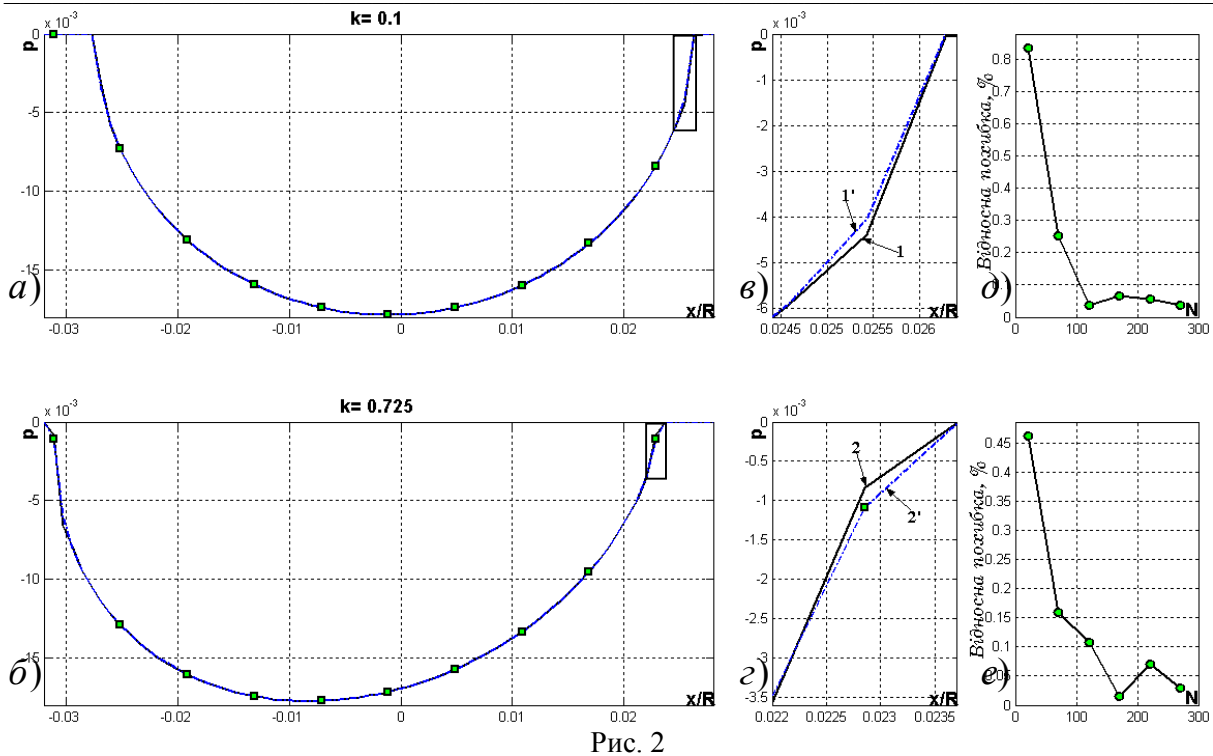


Рис. 2

Як видно з рис. 2 а) і б), достатньо висока для практики точність досягається вже при  $N = 71$  (тут  $\delta|_{k=0.1} = 0.166\%$  і  $\delta|_{k=0.725} = 0.084\%$ ). Для обох цих випадків в центральній частині суцільні та штрих-пунктирні криві практично збігаються, а на кінцях області контакту ці криві різняться між собою дещо більше. Крім цього, з відповідних залежностей між  $\delta$  та  $N$  видно ще, що при  $N > 21$  –  $\delta < 1\%$ , а при  $N > 101$  –  $\delta < 0.1\%$ . А звідси можна припустити, що незалежно від значення коефіцієнта тертя при зміні кількості точок розбиття числовий розв'язок досить швидко збігається до відповідного аналітичного.

Контактні напруження під штампом близьким до плоского із заокругленими кінцями. На практиці плоскі штампи заокруглюють біля кінців. Для опису форми таких штампів використаємо рівняння

$$f_{um}(x) = R \left( 1 - \sqrt[n]{1 - \left( \frac{x}{R} \right)^n} \right) \text{ при } \left| \frac{x}{R} \right| \leq 1,$$

де  $R$  – стала,  $n$  – ціле парне число. Розрахунки проведені при  $N = 421$  та при різних прогнозованих інтервалах контакту (розв'язкам, наведеним на рис. 3. б) і в) відповідають  $b = -a = 0.232R$ , а розв'язкам, наведеним на рис. 3. д) і е) –  $b = -a = 0.61R$ ). На рис. 3. а) та г) графічно зображені форма штампів та основа пружного тіла при вказаних значеннях величини  $n$ . Контактні напруження розраховані при різних значеннях коефіцієнта тертя –  $k = 0.1$  та  $k = 0.725$ . Перший випадок наведено на рис. 3. б) і д), другий – на рис. 3. в) і е). На цих рисунках суцільним кривим (1-4) відповідають розв'язки, знайдені при  $Q_1 = -P/2GR = 0.00075$ , а штриховим кривим (1'-4') – знайдені при  $Q_2 = 0.0015$ .

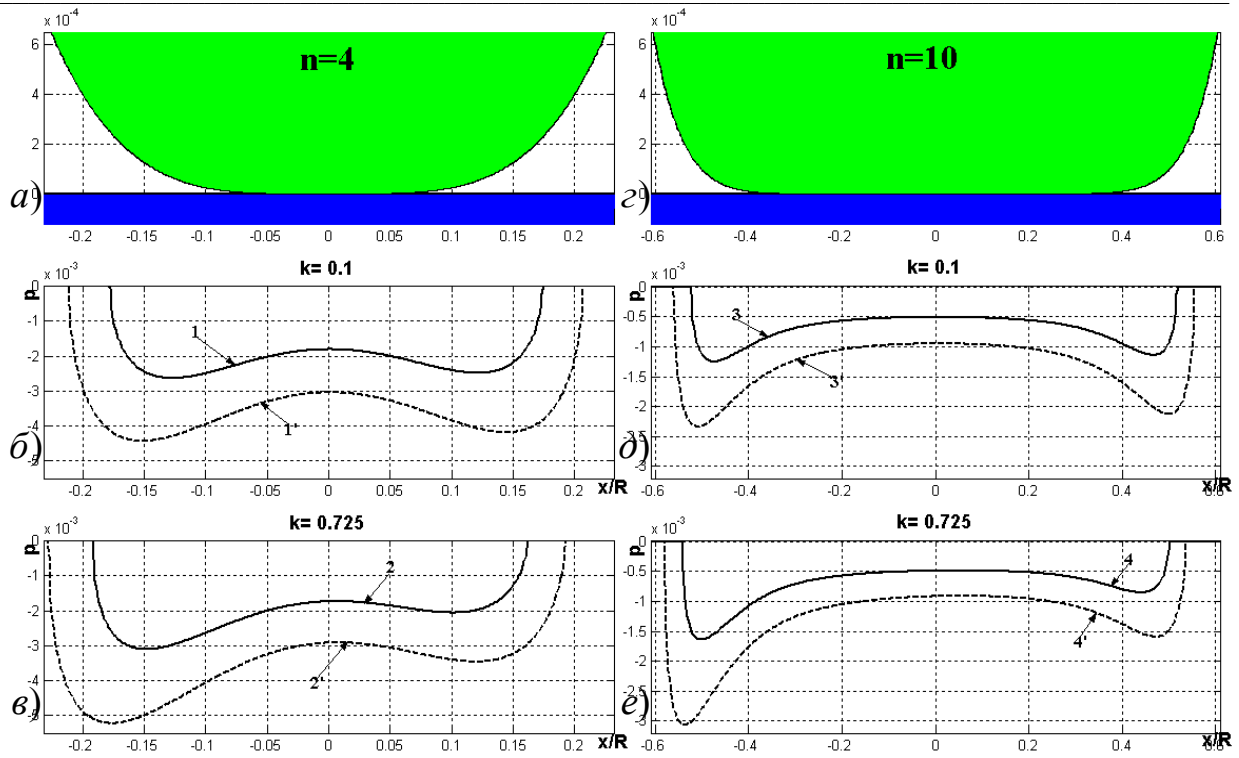


Рис. 3

Як видно з наведених прикладів, розроблений алгоритм можна використовувати для класу задач, в яких штамп має складну форму і розв'язок для яких записати в аналітичному вигляді досить проблематично.

При великих  $n$  штамп має близьку до плоскої форму. Тому для порівняння проведено розрахунки при вказаних значеннях коефіцієнта тертя  $k$ , при  $N = 401$  та при  $b = -a = 0.98R$ . На рис. 4. а) наведено значення величини  $n$  та графічно зображено відповідну форму штампа. А на рис. 4. б) та в) представлені числові розв'язки (суцільні криві (1-4)) для випадку вказаної форми штампа та відповідні розв'язки для випадку плоского штампа (штрихові криві (1'-4')), рівняння якого задається формулою (20). Тут кривим 1,1',3 та 3' відповідає значення головного вектора сили  $Q_1$ , а кривим 2,2',4 та 4' -  $Q_2$ .

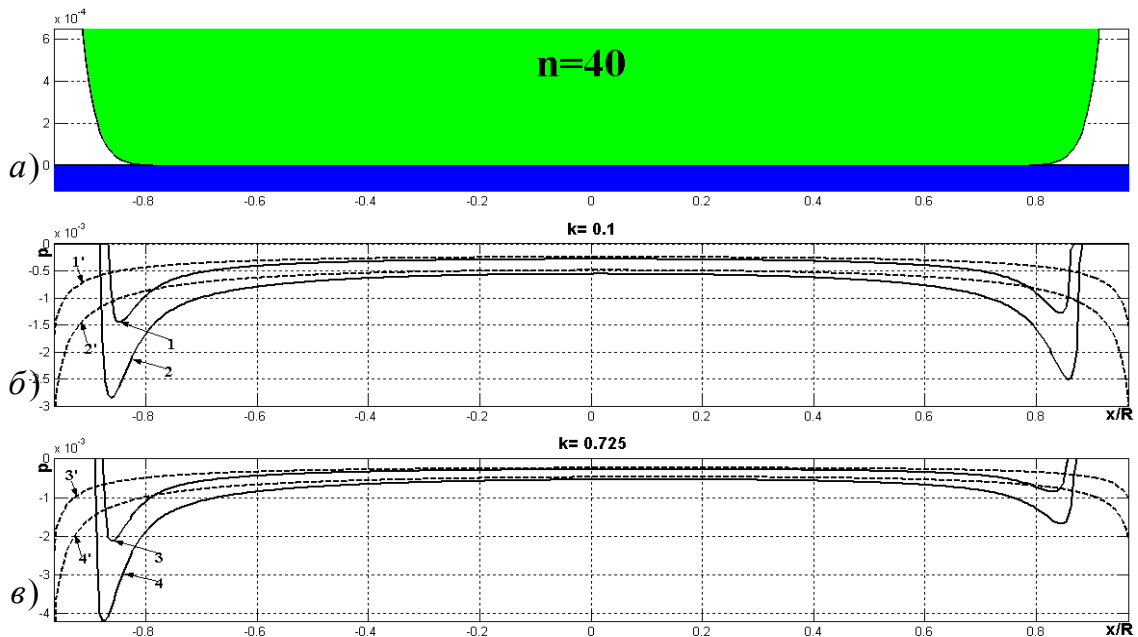


Рис. 4

Розв'язок цієї задачі записати в аналітичному вигляді досить складно, особливо при великих  $n$ . А запропонований алгоритм дозволяє розв'язати задану задачу з достатньо високою точністю для будь-якого  $n$ . Як було вже сказано, основна перевага цього алгоритму полягає в тому, що за його допомогою можна знаходити контактні напруження для випадків, коли форма штампа описується складними виразами, для яких контактні напруження записати в аналітичному вигляді дуже проблематично або цей запис є досить громіздким. І тому не важко прослідкувати динаміку перетворення штампа з заокругленими кінцями в плоский на відповідних розв'язках. Як видно з рис. 4. б) та в), при  $n = 40$  та при виборі вертикальної сили  $Q_1$  на проміжку  $[-0.45R; 0.45R]$  та при виборі вертикальної сили  $Q_2$  на проміжку  $[-0.3R; 0.3R]$  з достатньо великою для практики точністю можна плоский штамп замінювати відповідним з заокругленими кінцями. Очевидно, при збільшенні величини  $n$  збільшуються і вказані проміжки. Тому при розрахунках ми завжди можемо позбутися небажаних для практики нескінченних контактних напружень на кінцях області контакту, замінюючи плоский штамп відповідним з заокругленими кінцями.

Контактні напруження під штампом складної форми. Розглянемо задачу, коли штамп має складну форму, а область контакту складається з окремих ділянок, кількість і розміщення яких є наперед невідомими. Прийmemo при цьому, що форма штампа описується рівнянням

$$f_{\text{штамп}}(x) = 2.679339\left(\frac{x}{R}\right)^6 - 0.014278\left(\frac{x}{R}\right)^5 - 0.645162\left(\frac{x}{R}\right)^4 + 0.009914\left(\frac{x}{R}\right)^3 + 0.039093\left(\frac{x}{R}\right)^2 - 0.000857\left(\frac{x}{R}\right) + 0.000033.$$

Розрахунки проведені при виборі 881-ї вузлової точки та при різних значеннях коефіцієнта тертя. Для застосування методики необхідно вибрати прогнозовану область  $[a, b]$ , яка вміщує всі ділянки контакту. При розрахунках прийнято  $b = -a = 0.44R$  та враховано тертя між штампом та основою.

На рис. 5. а) графічно зображено форму штампа та пружну основу, в яку втискають штамп. На рис. 5. б) і в) графічно зображені розподіли відносних контактних напружень  $p(x) = \sigma(x)/2G$  відповідно при  $k = 0.1$  і  $k = 0.725$ . Суцільним кривим (1 і 2) відповідають відносні контактні напруження при  $Q_1$ , а штриховим (1' і 2') – при  $Q_2$ .

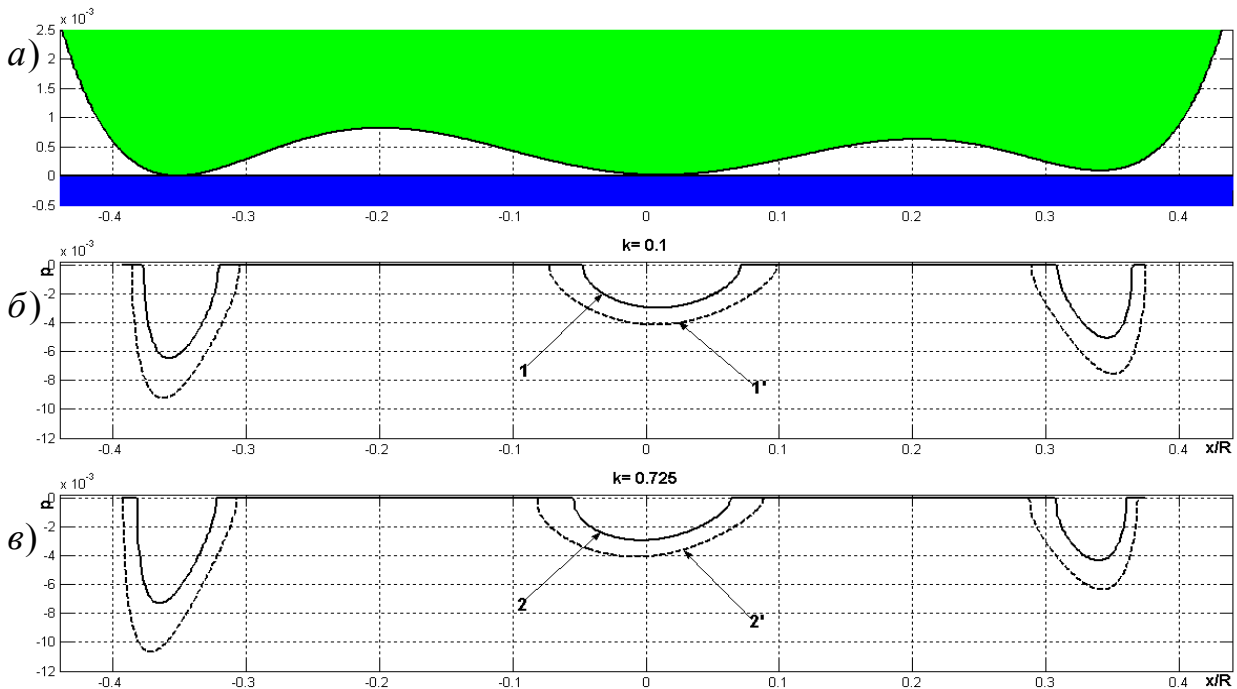


Рис. 5



Як видно з рис. б) і в), розроблена модель дозволяє знаходити відносні розподіли з довільною кількістю ділянок контакту. Тут всі розв'язки мають по 3 ділянки контакту на кожній з яких напруження розподілені несиметрично. Розв'язування таких задач аналітичними методами виявилось би достатньо складним та проблематичним, оскільки для знаходження областей контакту, необхідно було б знайти 6 невідомих меж областей, що потребувало б розв'язання 6-ти досить громіздких нелінійних рівнянь з 6-ма невідомими. А запропонований алгоритм досить ефективно дозволяє знаходити як самі відносні контактні розподіли, так і всі межі цих ділянок знаходити автоматично.

- Розроблено алгоритм побудови комп'ютерної моделі, що дає змогу швидко отримати необхідні числові дані і наочно зобразити контактну взаємодію та поведінку тіл після неї.
- Розроблений алгоритм дозволяє автоматично знаходити ділянки контакту, що значно спрощує процес розв'язування задач.
- Даний алгоритм оптимізовано з метою економії часу та ресурсів.
- Створено комплекс програм в середовищі Matlab 7.5, результати роботи яких наведено на рисунках вище.

1. Александров В.М., Ворович И.И. О действии штампа на слой конечной толщины // ПММ. – 1960. – Т.24. – Вып. 2.
2. Гембара В.М. , Максимович Я.В., Шваб'юк В.І. Пружна рівновага смуги, навантаженої штампом і зосередженими силами // Наукові записки Академії друкарства. – 1999. – № 1.
3. Григолюк З.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Наука, 1980
4. Гриліцький Д.В., Попович Б.І. Плоскі контактні задачі термопружності: Навчальний посібник. – Видавниче об'єднання «ВИЩА ШКОЛА». Видавництво при Львівському державному університеті. – Львів, 1976 – 116 с.
5. Коцюба А.Ю. Визначення напружень та областей контакту у смугі під штампом довільної форми // Наукові нотатки. – Луцьк. – 2006. – Вип.18. – С. 216-22
6. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. –М.: Наука, 1966. –708 с.