УДК 004.891.3: 004.3
О.В.Максимович, Н.В.Багнюк
Луцький національний технічний університет

РОЗВЯЗУВАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ФОРМИ ОТВОРІВ В ОРТОТРОПНИХ ПЛАСТИНКАХ ЗАСОБАМИ СИСТЕМИ MATLAB

Розглянуто маловивчену для анізотропних пластинок задачу щодо визначення форми отворів з низькою концентрацією напружень засобами пакета Optimization системи Matlab.

Ключові слові: *система Matlab, пакет Optimization, анізотропна пластинка.*

ВСТУП. Елементи конструкцій пластинчатого типу часто містять отвори та вирізи. Запропоновано підхід до знаходження форми отворів, на яких буде низький рівень напружень [1]. На форму шуканих отворів накладаються певні наперед задані умови, які забезпечують знаходження прийнятної для практики конфігурації отворів.

Поставлена задача зводиться до мінімізації цільової функції з обмеженнями, яка має достатньо складний вигляд. Вона зведена до відомої задачі знаходження умовного екстремуму функції багатьох змінних. Числова реалізація її проводилася з використанням системи MATLAB, оскільки в ній розроблено спеціалізований пакет Optimization, який призначений для розвязування оптимізаційних задач з обмеженнями типу рівнянь і нерівностей. Особливістю наявних тут процедур є їх адаптивний характер, тобто здійснюється автоматизовано вибір алгоритму розрахунку.

Чисельні результати таких задач повинні супроводжуватися відповідною візуалізацією розрахунків. MATLAB забезпечує розв’язок і цієї проблеми, що дуже привабливо для робочого процесу, де дослідники витрачають достатньо багато часу на графічну частину задачі. Окрім MATLAB, існують і інші, досить могутні середовища програмування і візуалізації, такі як Visual Digital Fortran, Delphi, Visual C++ і т.п. Проте, на думку авторів, в системі MATLAB виходять найбільш прості і в той же час ефективні програми.

У роботі представлено роз’вязок задачі щодо визначення оптимальної форми отворів у пластинках, біля яких концентрація напружень є мінімальною, засобами системи MATLAB.

Постановка задачі. Приймемо, що анізотропна пластинка послаблена одним чи декількома отворами та перебуває під дією зусиль, що прикладені на нескінченності та внутрішніх зосереджених силах. Будемо знаходити вільні від навантаження граничні контури отворів в цій пластинці так, щоб концентрація напружень біля них була мінімальною з врахуванням анізотропії міцності.

Шукані отвори можуть задовольняти певним наперед заданим умовам: 1) границя отвору проходить через задані точки; 2) площа отвору зафіксована і границя проходить через задані точки і т.д.

Розв’язування задачі.

Міцність елементів малих розмірів, що лежать на границі, визначається як величиною кільцевих напружень, так і розміщенням їх відносно головних осей ортотропії. У літературі відомі експериментальні дані про граничні значення напружень для смуг, що вирізані з ідентичних пластинок під різними кутами відносно осей ортотропії та перебувають в умовах одновісного розтягу. Запишемо їх у вигляді $S = f(\gamma)$, де γ – кут між напрямком, в якому вирізувалась смуга, і головною віссю ортотропії.

Будемо описувати границю шуканого отвору параметрично у вигляді $x = \varphi(\theta),\ \ y = \psi(\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Або у комплексному вигляді z=$\omega(\theta)$., де $\omega(\theta) = \varphi(\theta) + i\psi(\theta)$. Тоді рівноміцними отворами в ортотропних пластинках приймемо такі, для яких $\sigma_\theta(\theta)/F(\theta) = const$, де $F(\theta) = f\left(arctg\left(\psi'(\theta)/\varphi'(\theta)\right)\right)$, σ_θ, – кільцеві напруження.

Рівень концентрації напружень на границі отвору характеризує величина

$$I = \frac{1}{l}\int_0^{2\pi} A(\theta)\left(\sigma_\theta\left(\theta\right)/F(\theta)\right)^2 s'(\theta)d\theta, \qquad (1)$$

де L - граничний контур (шуканий), l – довжина контуру L, s - дугова координата, A(θ) – задана вагова додатна функція. Очевидно, що чим менша ця величина, тим меншими будуть напруження на границі отвору. В зв'язку з цим невідомий граничний контур отвору будемо знаходити з умови, щоб на ньому величина I була мінімальною

Рівняння шуканого контуру зобразимо у вигляді

$$\omega\left(\theta\right)=a\sigma+a_0+\sum_{j=1}^{J}\frac{a_j}{\sigma^j}\,, \tag{2}$$

де $\sigma=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, $0\le\theta\le2\pi$, a, a_j– невідомі сталі, які задовольняють деяким рівнянням, що випливають із поставлених на контур умов. Параметричне задання при дійсних значеннях коефіцієнтів

$$\varphi(\theta)=a_0+(a_1+a)\cos\theta+a_2\cos2\theta+...+a_J\cos J\theta,$$
$$\psi(\theta)=-[(a_1-a)\sin\theta+a_2\sin2\theta+...+a_J\sin J\theta].$$

Вибравши тут достатньо великим J, можна отримати будь-який профіль отвору (це випливає із того, що саме в такому вигляді знаходиться функції, які конформно відображають зовнішність довільної області на круг одиничного радіуса).

Застосуємо до інтеграла (1) квадратурну формулу прямокутників, яка для періодичних функцій є підвищеної точності. Тоді приходимо до знаходження мінімуму величини

$$I\approx h\sum_{j=1}^{N}B_j\sigma_j^2/l \tag{3}$$

де $B_j=A(\theta_j)\left(\sigma_j/F(\theta_j)\right)^2 s'(\theta_j)$, $\theta_j=hj$, $h=2p/N,$, $\sigma_j=\sigma_\theta(\theta_j)$, $l=h\sum_{j=1}^{N}\left|\omega'(\theta_j)\right|$; $h=\dfrac{2\pi}{N}$, N– кількість вузлових точок.

В роботі [1] розроблено алгоритм розв'язування задачі теорії пружності для анізотропних пластинок з отворами довільної форми. Цей алгоритм ґрунтується на методі граничних інтегральних рівнянь і зводиться до розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Даний метод дозволяє знаходити кільцеві напруження в довільних точках границі, параметричне задання якої описується формулою вигляду (1') при довільно заданих значеннях коефіцієнтів та при заданому навантажені, а значить, і обчислювати критерій I. Згідно з постановкою задачі прикладене навантаження задається. Таким чином, задача вибору оптимального профілю зводиться до знаходження мінімуму величини $I=I\left(a,a_1,\ a_2,..a_J\right)$, яка визначається за формулою (3). Підкреслимо, що розроблений алгоритм дозволяє знаходити величину I як функцію від параметрів $a,a_1,\ a_2,..a_J$.

Таким чином, задача зведена до відомої задачі про знаходження мінімуму функції багатьох змінних $I\left(a,a_1,\ a_2,..a_J\right)$. Це класична задача, але в даному випадку вона є досить складна для реалізації. Особливо потужними для розв'язку такої задачі квадратичного програмування виявилися спеціальні процедури системи "Matlab" (fminsearch, fminbnd, fminunc, fminimax, fmincon…), які ґрунтуються на багатьох методах. Зауважимо, що всі вони повністю автоматизовані. Для побудови алгоритму задачі оптимізації використано сумісно системи "Fortran" (в якій розраховувався напружений стан) та "Matlab" (виконувалась мінімізація та візуалізація результатів розрахунків), що дозволило використати високу швидкодію обчислень першої системи та створені процедури для знаходження умовного екстремуму функцій багатьох змінних другої системи. Для поєднання цих систем було написано спеціальну перехідну функцію.

Проведено низку прикладів розрахунку, з яких можна зробити висновок, що не всі вони можуть бути використані на практиці. Тому з метою можливого контролю за формою отвору на нього доцільно накладати додаткові умови. В цьому випадку виникає задача мінімізації функції I, коли шукані коефіцієнти будуть задовольняти певним умовам, тобто буде мати місце задача на умовний екстремум.

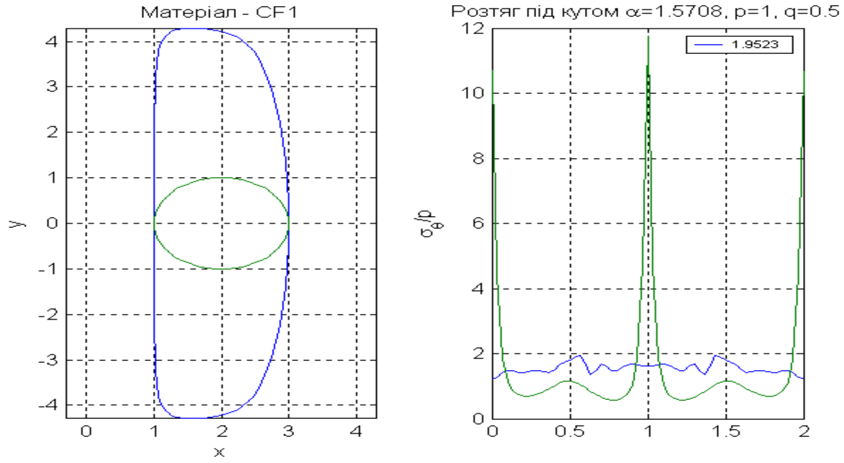

Рис.1

Наведемо деякі випадки, які виникають на практиці:

а) Випадок, коли контур проходить через задані точки z_k, k=1,…,K. В цьому випадку задамо значення параметра θ, які відповідають цим точкам – значення $\theta_k,\ k=1,...,K$ (ці значення можуть бути вибрані практично довільно, однак при цьому доцільно врахувати симетрію і т.д.). Тоді на невідомі коефіцієнти отримуємо умови вигляду

$$ae^{i\theta_k}+a_0+\sum_{j=1}^{J}a_je^{ij\theta_k}=z_k,\quad \text{k=1,…,K}.$$

б) Додаткову можливість управління контуром дає використання умови, площа отвору є наперед заданою – S. Тоді, враховуючи, що площа, обмежена кривою (1’), визначається за формулою $S=\pi(a\overline{a}-a_1\overline{a_1}-2a_2\overline{a_2}-...-Ja_J\overline{a_J})$, отримуємо додаткову умову на коефіцієнти

$$a\overline{a}-a_1\overline{a_1}-2a_2\overline{a_2}-...-Ja_J\overline{a_J}=S/\pi.$$

в) Випадок, коли контур проходить через задані точки z_k, k=1,…,K та площа отвору S. Тоді необхідно знаходити мінімальне значення функції I , коли шукані коефіцієнти задовольняють умовам

$$ae^{i\theta_k}+a_0+\sum_{j=1}^{J}a_je^{ij\theta_k}=z_k,\quad \text{k=1,…,K}.$$

$$a\overline{a}-a_1\overline{a_1}-2a_2\overline{a_2}-...-Ja_J\overline{a_J}=S/\pi.$$

Для прикладу наведемо результати розрахунків двох отворів оптимальної форми в анізотропній пластинці, що виготовлена із матеріалу CF1, яка розтягується на нескінченності зусиллями p і p/2 вздовж осей Oy і Ox відповідно. Приймали, що отвори розміщені симетрично відносно осі Oy, задано дві точки (1,0) і (3, 0) на границі правого отвору. При розв’язуванні задачі враховували те, що отвори мають симетричну форму відносно осі Oy, що дало можливість розглядати один отвір. Крім цього, в даному випадку кожен із отворів буде мати симетричну форму відносно осі Ox. За таке наближення приймали, що отвір є круговий. Коефіцієнти, що відповідають цьому кругу в (1’), будуть $a=1, a_0=2,\ a_1=a_2=...=a_I=0$. При знаходженні мінімального значення поклали I = 6, тобто мінімізувалась величина I як функція від шести невідомих.

Для перевірки розробленого алгоритму розглянемо задачу про пошук оптимального отвору в ізотропній пластинці, яка на безмежності навантажена зусиллями $\sigma_{xx}^{\infty}=\dfrac{1}{2}p,\ \sigma_{yy}^{\infty}=p$. В цьому випадку згідно з точним розв’язком [Мусх] на круговому отворі максимальні і мінімальні напруження рівні відповідно рівні 2,5p і - 0,5p. Результати розрахунків наведено на рис 2. Як видно із рисунка, знайдений у результаті розрахунків оптимальний контур виявився близьким до еліпса з півосями c і 0,498c і напруження на ньому практично сталі - $\approx 1{,}5p$. Зазначимо, що для цієї задачі існує аналітичний розв'язок [Череп] і оптимальним контуром є еліпс з півосями с і 0,5с, причому напруження на ньому сталі і рівні 1,5р.

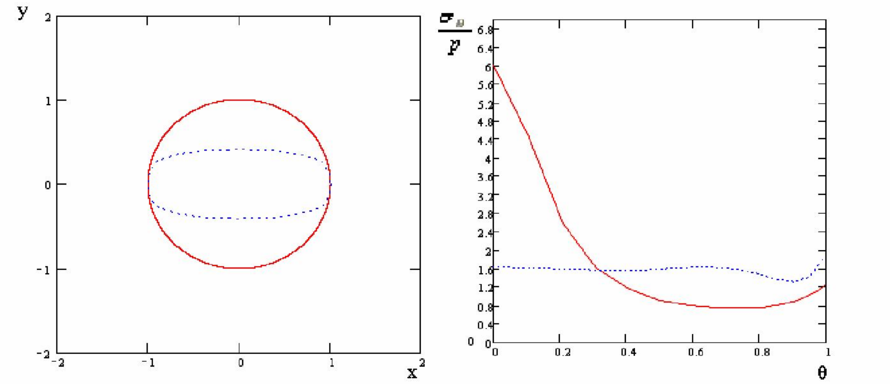

Рис.2

На рис. 2 зображено круговий отвір, який вибирався за нульове наближення та знайдений оптимальний отвір. Як видно із правого рис., концентрація напружень на круговому отворі досить велика – знайдені максимальні напруження рівні 11,73р, в той час як на знайденому оптимальному отворі максимальні напруження рівні 1,95 р. Як бачимо максимальні напруження на знайденому отворі зменшились в 6 разів. При розрахунках з метою контролю за точністю вибирали різну кількість вузлових точок N = $60 \div 100$. Отримані при різних значеннях N практично не відрізнялись між собою.

Прийнято, що площа отвору зафіксована і рівна πR^2 та його межа проходить через точки (-R,0), (R,0), де R – задана стала. Результати розрахунків для графіт-епоксидної пластинки при $E_y > E_x$ за врахування міцністної анізотропії зображено на рис.3. Зліва зображено круговий отвір. На рис.3 б суцільними та штриховими лініями наведено розподіл відносних напружень $\sigma_\theta(\theta)/p$, з врахуванням та без врахування анізотропії міцності, причому тут вздовж горизонтальної вісі відкладено значення параметра $\theta' = \theta/\pi$. На рис.3 в наведено знайдений оптимальний отвір, а на рис.3.г відносні напруження та ньому. Функція S для даного випадку вибиралась згідно з експериментальними даними.

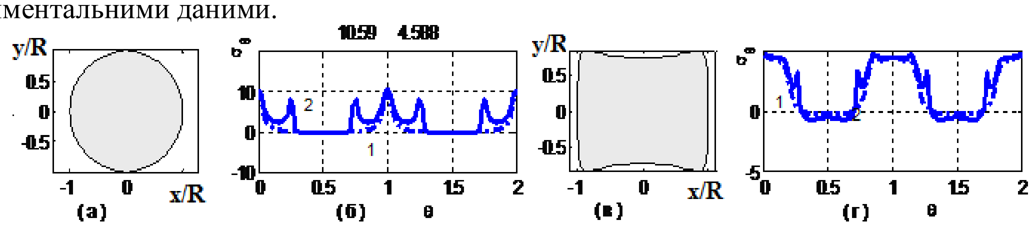

Рис.3. Графіт-епоксидна пластинка, врахування міцністної анізотропії

Видно, що оптимальний отвір виявився близьким до квадратного, максимальні напруження на ньому вдвічі менші, ніж на круговому. Аналогічні результати отримано у випадку розтягу анізотропних пластинок зосередженими силами.

Висновки

Із наведених рисунків і таблиць видно, що неістотна зміна форми отворів дозволяє в кілька разів зменшити концентрацію напружень біля отворів. Наведено приклади знаходження отворів з мінімальною концентрацією напружень, які вказують на ефективність запропонованого підходу. Зокрема, показано, що для ізотропних пластинок за допомогою запропонованого підходу отримуються відомі в літературі результати.

1. Божидарнік В.В., Максимович О.В. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. – Луцьк, 2003.– 226 с.
2. Дащенко О. Ф., Кириллов В. Х., Коломієць Л. В., Оробей В. Ф. MATLAB в інженерних та наукових розрахунках: Монографія. – Одеса: Астро-принт, 2003. – 214 с.
3. Дьяконов В., Круглов В. Математические пакеты расширения MATLAB.
4. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2001. – 480 с.