УДК 539.3
К.В.Мельник
Луцький національний технічний університет

ДОСЛІДЖЕННЯ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ШАРУ МЕТОДАМИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

В роботі розглядається контактна задача для шару, що лежить на опорах. Проводиться дослідження процесу відставання під штампом з гладкою основою. Розв'язок задачі будується на основі методу інтегральних рівнянь-нерівностей і квадратичного програмування. Проведено порівняння з контактною задачею для півпростору.

Ключові слова: *штамп, шар, квадратичне програмування.*

Методи розв'язання контактних задач з наперед заданою областю контакту достатньо представлені в роботах [1-4]. У випадку негерцевського контакту багато задач не допускають аналітичного рішення в замкнутій формі, наприклад, коли необхідно враховувати сили тертя, часткове проковзування або враховувати умови відставання штампа від основи. Це привело до розвитку різноманітних чисельних методів. Основна проблема полягає в знаходженні нормальних та дотичних напружень, які виникають в області контакту. Форма і розмір області контакту наперед невідома.

Застосування варіаційних методів до контактних задач дозволяють визначити форму і розмір області контакту, а також застосувати добре розроблені методи оптимізації, а саме методи квадратичного програмування.

Варіаційна постановка задачі одностороннього контакту без тертя вперше представлена в роботах Сіньоріні А. Отримані ним результати були узагальнені в роботах Стампакк'я, Дюво Ж., Фікера [5], Кравчука А.С. та інших. Питаннями існування та єдиності розв'язку контактної задачі для двох тіл, які мають неперервні гладкі поверхні і контактують з повним зміщенням δ, займалися Фішер, Дувайт і Ліонс. Вони показали, що істині область контакту і поверхневі зміщенням є ті, які мінімізують повну енергію напруження.

Розглянемо задачу про контакт без тертя одного жорсткого штампу з пружнім шаром, товщиною $2h$, що лежить на опорах. Площадка контакту опор мала, що дозволяє замінити їх дією зосереджених сил. Поза штампом поверхня шару не навантажена. Нехай форма основи штампа в області контакту Ω визначається функцією $f(x,y)$. Штамп втискається в шар силою Р. Необхідно знайти розподілення нормальних контактних напружень під штампом. Граничні умови задачі мають вигляд:

$$\tau_{zy}(x,y,\pm h)=\tau_{zx}(x,y,\pm h)=0\,, \qquad (1)$$

$$\omega(x,y,h)=-(\delta+\alpha x+\beta y-f(x,y)) \qquad (x,y)\in\Omega$$

$$\sigma_z(x,y,\pm h)=\begin{cases}-q(x,y), & (x,y)\in\Omega,\\ 0, & (x,y)\notin\Omega\end{cases}.$$

Тут δ,β,α визначаються з умови рівноваги штампа

$$P=\int_\Omega q(\xi,\eta)d\Omega\,,\ M_x=\int_\Omega \eta q(\xi,\eta)d\Omega\,,\ M_y=\int_\Omega \xi q(\xi,\eta)d\Omega\,.$$

Нормальні переміщення границі шару $z=h$ визначаються так:

$$\omega=\omega_s+\omega_{op}\,, \qquad (2)$$

$$\omega_s(x,y,z)=\lambda\iint_\Omega q(\xi,\eta)F(x-\xi,y-\eta,h,h)d\xi d\eta\,,$$

$$\omega_{op}=\sum_{i=1}^{N} Z_i\omega_i(x-x_i,y-y_i,h,-h)\,,$$

де $F(x-\xi, y-\eta, h, h)$ – переміщення границі $z=h$, що виникають в точці (x, y, h) від сили, прикладеної в точці (ξ, η, h), $\lambda = \dfrac{1-\nu}{2\pi G}$, ν – коефіцієнт Пуассона, G - модуль зсуву, Ω – область контакту (невідома); $\omega_i(x-x_i, y-y_i, h, -h)$ – переміщення, що виникають в точці (x, y, h) при дії опори в точці $(x_i, y_i, -h)$ силою Z_i, $i=1,N$, N – кількість опор. Величини сил Z_i вибираються так, щоб виконувалися умови рівноваги:

$$Z_i = \frac{1}{N}\iint_{\Omega} q(\xi,\eta)\, d\xi d\eta \tag{3}$$

В даній роботі вважаємо, що задана сила P, а переміщення штампа δ і коефіцієнти β, α необхідно знайти. Перепишемо рівняння (2) у вигляді:

$$\lambda \iint_{\Omega} q(\xi,\eta)\left(F(x-\xi, y-\eta, h, h) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \omega_i(x-x_i, y-y_i, h, -h) \right) d\xi d\eta = \omega \tag{4}$$

Інтегральне рівняння (4) запишемо у вигляді альтернативних інтегральних рівнянь-нерівностей і зведемо задачу до задачі квадратичного програмування. Застосуємо чисельний алгоритм, розроблений в роботі [6-8]. Приходимо до такої постановки задачі:

$$Y = \sum_{\nu=N_1}^{N_2} \sum_{\mu=M_1}^{M_2} C_{\nu,\mu} \left(\sum_{n=N_1}^{N_2} \sum_{m=M_1}^{M_2} (B_{\nu,\mu,n,m} q_{n,m} - F_{\nu,\mu}) q_{\nu,\mu}, \right) \tag{5}$$

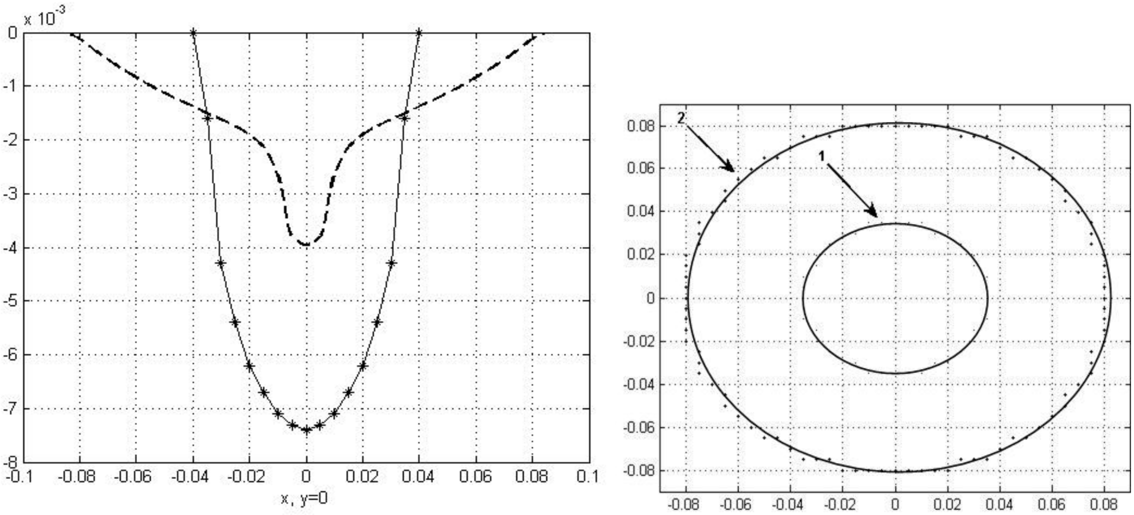
$$\begin{gathered} \sum_{n=N_1}^{N_2} \sum_{m=M_1}^{M_2} B_{\nu,\mu,n,m} q_{n,m} \le F_{\nu,\mu}, \\ \sum_{n=N_1}^{N_2} \sum_{m=M_1}^{M_2} q_{n,m} = \lambda P / h_x h_y, \\ \sum_{n=N_1}^{N_2} \sum_{m=M_1}^{M_2} y_m q_{n,m} = M_x, \\ \sum_{n=N_1}^{N_2} \sum_{m=M_1}^{M_2} x_n q_{n,m} = M_y, \\ q_{n,m} \le 0, \end{gathered} \tag{6}$$

$q_{n,m} = \lambda q_{n,m}$, h_x, h_y – крок розбиття сітки.

На рис.1 а) суцільною лінією наведено графік величин $\lambda q(x,0)$, обчислених за формулами (5-6), коли штамп має форму еліптичного параболоїда:

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2}, \ \left(R_2 \ge R_1\right) \tag{7}$$

і товщина шару $h = 0.5$. Координати точок опори (-0.04,0,-0.5), (0.04,0, -0.5), (0,0.04,-0.5), (0,-0.04,-0.5). Розрахунки проведено при $P = 10^7$, $R_1 = R_2 = 1$, $G_1 \cdot 10^{-10} = 7$, $\nu_1 = 0{,}1$, крок розбиття сітки $h_x = h_y = 0{,}005$. Зірочками представлений результат розрахунків контактної задачі для півпростору, область контакту наведена на рис. 1б) лінією 1. Як видно з рисунка, при малій області контакту і малій відстані між опорами розв’язки задач подібні. На рис. 1а) штриховою лінією наведені контактні напруження $\lambda q(x,0)$ у випадку, коли опори знаходяться в точках (-25, 0,-0.5), (25, 0, -0.5), (0, 25,-0.5), (0, -25,-0.5), область контакту представлена лінією 2 на рис. 1б). Як видно з рисунків, при збільшені відстані між опорами контактні напруження зменшуються, а область контакту збільшується.



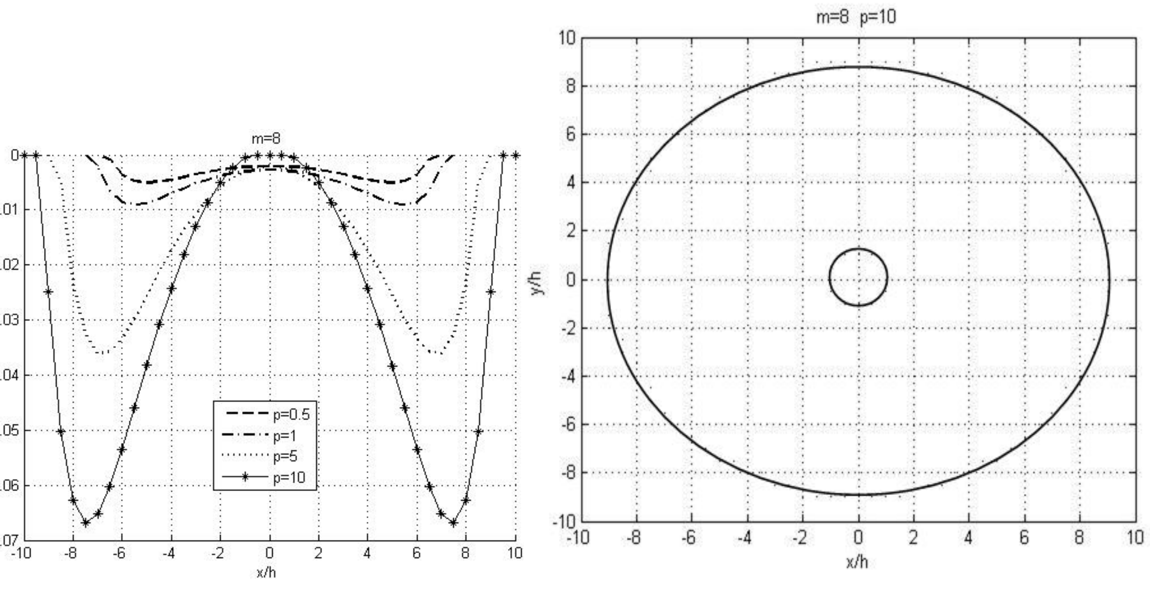
а) б)

Рис. 1. Порівняння з контактною задачею для півпростору

На рис.2, 3 графічно зображено розподіл контактних напружень $\lambda q(x',0)$ і область контакту при товщині шару $h=1$, що лежить на чотирьох опорах, координати яких $(\pm x',0,-1);(0,\pm y',-1)$, $x'=10/h, y'=10/h$. Штамп має форму:

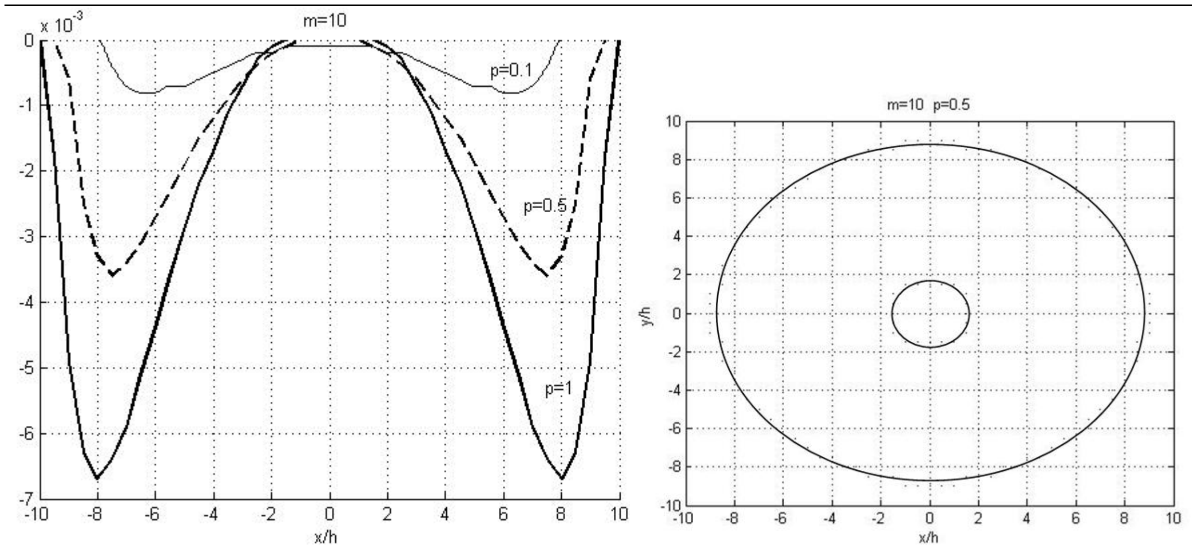
$$f(x,y)=\left(\frac{r}{R_0}\right)^m, \tag{8}$$

$m=2k$, $k=3,4$. Крок розбиття сітки $h_x=h_y=0,5$. Розрахунки проведені при різних параметрах R_0 і силах, що діють на штамп $P=-\lambda p/h_x h_y$. На рис. 2б) -3б) наведена область контакту, коли в центрі починається процес відставання штампа від основи.



а) б)

Рис. 2. Розподіл контактних напружень і область контакту $R_0=5$, $m=8$



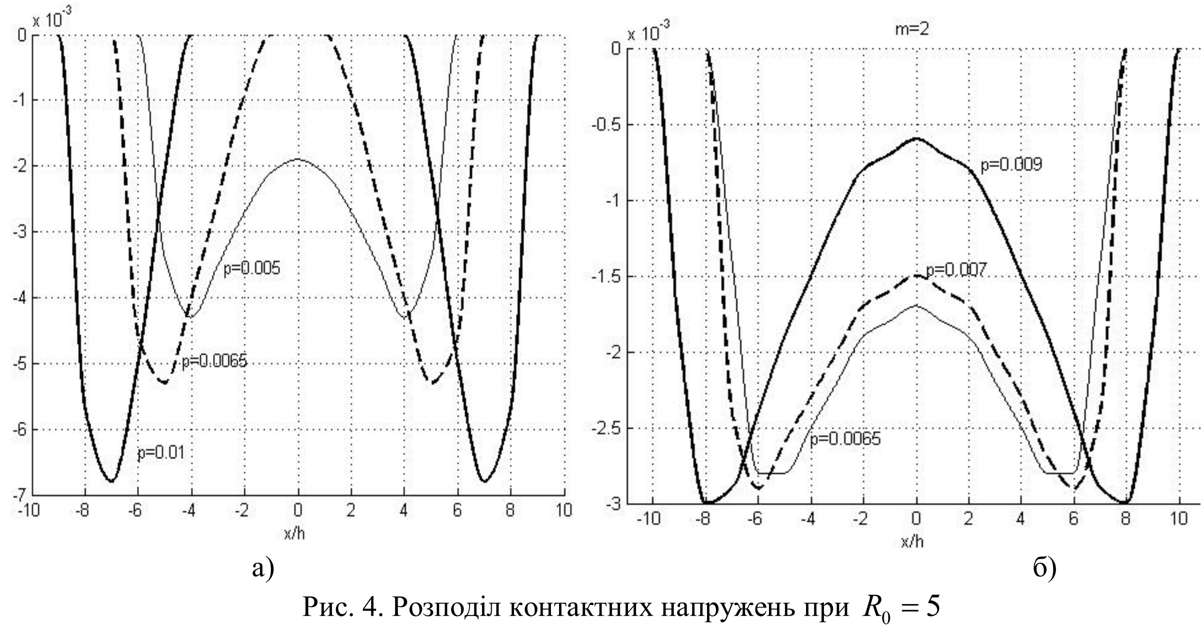
а) б)

Рис. 3. Розподіл контактних напружень і область контакту $R_0 = 7.5$, $m = 10$

На рис.4а), 5а) графічно зображено розподіл контактних напружень $\lambda q(x',0)$ для штампа, що має форму

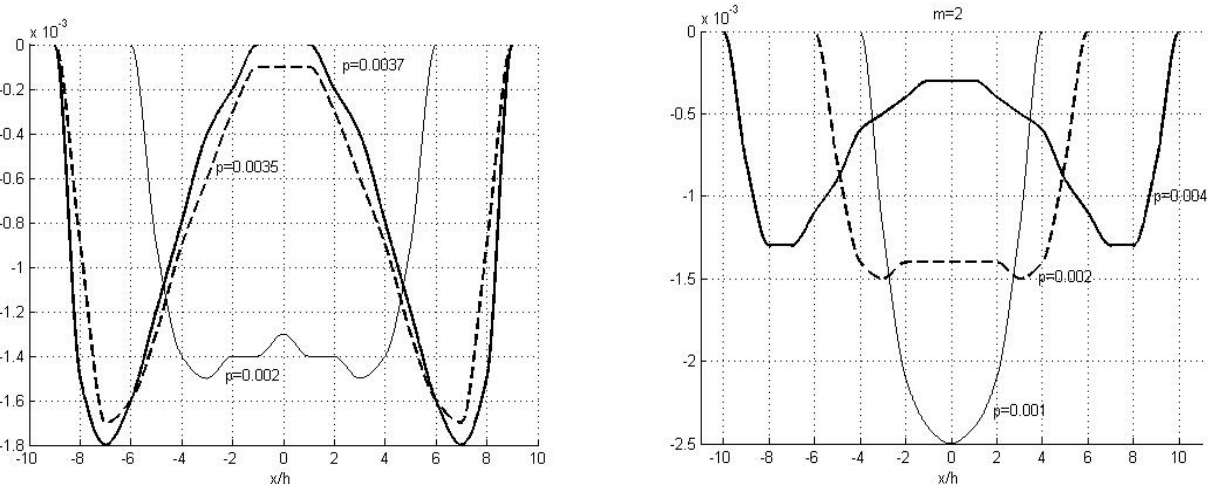
$$f(x,y) = \begin{cases} R - \sqrt{R^2 - r^2} \ \textit{при} \ \mathrm{r} \le \mathrm{R}, \\ \sqrt{3}(r - R) + R \ \textit{при} \ \mathrm{r} > \mathrm{R} \end{cases}, \qquad (9)$$

$R = \dfrac{R_0^2}{2}$, $R_0 = 5;\ 7,5$. Шар лежить на чотирьох опорах, координати яких $(\pm x', 0, -1); (0, \pm y', -1)$, $x' = 40/h, y' = 40/h$. Крок розбиття сітки $h_x = h_y = 1$. У випадку $R_0 = 5$ при $p = 0,0065$ починається процес відставання штампа від основи (рис.6,а), а для $R_0 = 7,5$ - при $p = 0,0037$ (рис.6,б).



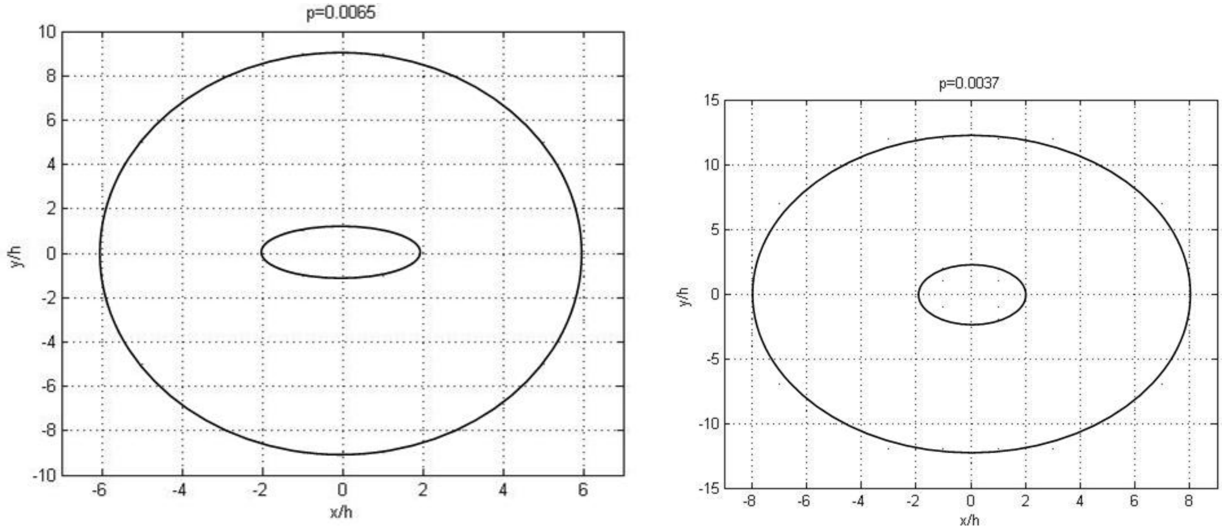
а) б)

Рис. 4. Розподіл контактних напружень при $R_0 = 5$



а) б)

Рис. 5. Розподіл контактних напружень при $R_0 = 7,5$



а) $R_0 = 5$ б) $R_0 = 7,5$

Рис. 6. Відставання штампа від основи. Область контакту

В літературі часто сферичну та інші форми штампа замінюють еквівалентною параболічною формою (8), що спрощує розрахунки з використанням аналітичних методів. Під еквівалентним параболічним штампом будемо розуміти штамп, кривина якого у вершині збігається із кривиною реального штампа. Заміна форми є допустимою при малих силах, що притискає штамп. При більших силах на рис. 4б) і 5б) наведено розподіл контактних напружень для штампа, що має форму параболи (8) при $m = 2$ і, як видно з рисунка, процес відставання штампа від основи в центрі контакту не починається. Отже, заміна форми штампа при великих силах для цього класу контактних задач істотно впливає на розподіл контактних напружень.

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 304с.
2. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. - М.: Гостехиздат, 1955. – 492 с.
3. Развитие теории контактных задач в СССР. – М.: Наука, 1976. – 493 с.
4. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. – М. –Л.: Гостехиздат, 1949. – 272 с.
5. Фикер Г. Теоремы существовании в теории упругости. – М., 1974.
6. Johnson K. L. Contact mechanics. Cambridge University Press. 1985.
7. Signorini. Questioni di elasticita non linearizzata e semilinearzzata // Rend. Di Matem/ e delle sue appl., 1959. V. 18, № 1-2.P. 95-139.
8. Маркова К. В. Дослідження контактних напружень під штампами складної форми з врахуванням відлипання // Матеріали конференції «Сучасні проблеми механіки та математики», у 3-х томах. – Львів, 2008. - С. 2.61-2.63.