УДК 515.2
І.В.Павлюк, Т.Я.Чигрин
Луцький національний технічний університет

ДОСЛІДЖЕННЯ РІШЕННЯ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ ДЛЯ СКЛАДНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Розглянуто одне із можливих рішень оберненої задачі динаміки складних механічних систем за допомогою матрично-геометричних методів.

Ключові слова: *обернена задача динаміки, матрично-геометричний метод.*

Постановка проблеми. В механіці розглядають дві основні задачі динаміки. Пряма задача полягає у визначенні за заданим рухом механічної системи сил, які діють на неї. Обернена задача полягає у визначенні руху системи за діючими на неї силами.

Аналіз останніх досліджень. На теперішній час існує декілька загальноприйнятих підходів при рішенні вказаних задач. Один з них полягає у безпосередній побудові дискретної точкової моделі механічної системи. У другому використовують стандартну схему класичної механіки, яка дозволяє шляхом граничного переходу узагальнити дискретний опис на континуальні системи твердих або пружних тіл. Нарешті, ще один підхід полягає у знаходженні необхідного рішення шляхом прямої формальної підстановки в їх знайдені загальні матричні форми характеристик елементів і в'язей досліджуваної системи.

Постановка завдання. Показати можливість рішення основних задач динаміки для механічних систем довільної складності з врахуванням кінематичних та динамічних властивостей цих систем за допомогою матрично-геометричних методів.

Основна частина. В попередніх роботах [1], [2], [3] широко використовувались властивості матриць

$$A, G = A'A; K, \Gamma = K'K; P = \left[K \,\vdots\, A\right],$$

які лежать в основі геометричного опису механічної системи Δ. Ці властивості визначаються встановленими в [1] умовами

$$\operatorname{rank}A = \operatorname{rank}G = s,\ \det G \neq 0; \tag{1}$$

$$\operatorname{rank}K = \operatorname{rank}\Gamma = d,\ \det\Gamma \neq 0; \tag{2}$$

$$A'K = K'A = 0; \tag{3}$$

$$\operatorname{rank}P = \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}K = s + d = 3n, \det P \neq 0. \tag{4}$$

Аналіз та рішення оберненої задачі динаміки, а також багатьох інших задач, пов'язаних із вивченням динаміки системи Δ, базується на властивостях трьох інших її фундаментальних матриць, які будемо називати динамічними матрицями системи Δ:

$$AMA,\ K'M^{-1}K \text{ і } P_M = \left[-K \,\vdots\, MA\right]. \tag{5}$$

Динамічні матриці (5) мають властивості, які визначаються наступними умовами:

$$\operatorname{rank}\left[A'MA\right] = \operatorname{rank}G = s,\ \det\left[A'MA\right] \neq 0; \tag{6}$$

$$\operatorname{rank}\left[K'M^{-1}K\right] = \operatorname{rank}\Gamma = d,\ \det\left[K'M^{-1}K\right] \neq 0; \tag{7}$$

$$\operatorname{rank}P_M = \operatorname{rank}P = 3n,\ \det P_M \neq 0. \tag{8}$$

Нам знадобиться ще ряд допоміжних співвідношень, які дозволять виконувати необхідні перетворення при переході від декартових координат до узагальнених і навпаки.

Для динамічних матриць справедливі рівності

$$A(A'MA)^{-1}A'M + M^{-1}K(K'M^{-1}K)^{-1}K' = I_{3n}, \tag{9}$$

$$MA(A'MA)^{-1}A' + K(K'M^{-1}K)^{-1}K'M^{-1} = I_{3n}. \tag{10}$$

Для довільного вектора $u \in \Re$ справедливі тотожності

$$A(A'MA)^{-1}A'Mu_T = u_T, \tag{11}$$

$$K(K'M^{-1}K)^{-1}K'M^{-1}u_N = u_N. \tag{12}$$

Для доведення побудуємо матрицю

$$C = A(A'MA)^{-1}A'M + M^{-1}K(K'M^{-1}K)^{-1}K' - I_{3n}. \quad (13)$$

Використовуючи умову ортогональності базисів A і K (3), маємо

$$K'C = K'M^{-1}K(K'M^{-1}K)^{-1}K' - K'I_{3n} = K' - K' = 0$$

$$A'MC = A'MA(A'MA)^{-1}A'M - A'MI_{3n} = A'M - A'M = 0.$$

Отримані рівності показують, що базис, визначений матрицею C, ортогональний до базису, який визначається матрицею P_M (5). Але ця матриця, згідно з умовою (8), невироджена і, значить, визначає повний базис простору $\mathfrak{R}$. Звідси

$$C = 0. \quad (14)$$

Із (13) і (14) отримуємо рівність (9). Перемножуючи ліву частину (9) на матрицю M, а праву – на матрицю M^{-1}, отримуємо (10).

Використовуючи властивість невиродженості матриці $A'MA$ (6), маємо

$$Au^{(q)} = u_T, \; A'MAu^{(q)} = A'Mu_T,$$

$$u^{(q)} = (A'MA)^{-1}A'Mu_T,$$

$$u_T = Au^{(q)} = A(A'MA)^{-1}A'Mu_T,$$

тобто тотожність (11). Тотожність (12) доводиться аналогічно, використовуючи властивість невиродженості матриці $K'M^{-1}K$ (7).

Справедливі також рівності

$$AG^{-1}A' + K\Gamma^{-1}K' = I_{3n}, \quad (15)$$

$$AG^{-1}A'u = AG^{-1}A'u_T = u_T, \; K\Gamma^{-1}K'u = K\Gamma^{-1}K'u_N = u_N. \quad (16)$$

Рівності (9), (10), (15) і (11), (12), (16) дозволяють спрощувати і перетворювати складні матричні вирази. Разом з тим їх можна також використовувати для контролю вірності обчислень при роботі з матрицями великих розмінностей, що особливо корисно при рішенні задач механіки з допомогою методів, орієнтованих на використання ЕОМ.

Розглянемо спочатку рішення оберненої задачі динаміки для більш простого задання сили тертя рівністю:

$$\tau = \tau(r, \dot{r}, t). \quad (17)$$

При цьому в оберненій задачі при відомому векторі активних сил f і уже визначеному рівнянням (15) [3] векторі нормального прискорення w_N, 3n-вимірне основне рівняння

$$M(w_T + w_N) = f + \tau + \eta \quad (18)$$

містить як невідомі лише вектор w_T, що належить s-вимірному простору T, і вектор η, що належить d-вимірному простору N, тобто всього 3п невідомих. Ця обставина дозволяє припустити, що рішення оберненої задачі у випадку заданої сили тертя однозначно визначається із рівняння (18).

При заданій силі тертя τ (17) рішення оберненої задачі динаміки для невільних систем однозначне і визначається рівностями

$$w_T = \left[I_{3n} - M^{-1}K(K'M^{-1}K)^{-1}K'\right]\left[M^{-1}(f+\tau) - w_N\right] = \quad (19)$$

$$= A(A'MA)^{-1}A'(f + \tau - Mw_N), \quad (20)$$

$$w_N = -K\Gamma^{-1}\varphi = \quad (21)$$

$$= K\Gamma^{-1}K'\psi = (I_{3n} - AG^{-1}A')\psi, \quad (22)$$

$$\eta = K(K'M^{-1}K)^{-1}K'\left[w_N - M^{-1}(f+\tau)\right] = \quad (23)$$

$$= \left[I_{3n} - MA(A'MA)^{-1}A'\right](Mw_N - f - \tau); \quad (24)$$

або рівністю

$$w = w_T + w_N = M^{-1}(f + \tau + \eta) \quad (25)$$

і рівностями (21), (22) і (23, (24).

Функції φ і ψ визначаються рівностями [1]

$$\varphi = \left[\frac{\partial \{K'\}}{\partial r'} \dot{r} + 2\frac{\partial K'}{\partial t} \right] \dot{r} + \frac{\partial^2 \xi(r,t)}{\partial t^2},$$

$$\psi = \left[\frac{\partial \{A\}}{\partial q'} \dot{q} + 2\frac{\partial A}{\partial t} \right] \dot{q} + \frac{\partial^2 r(q,t)}{\partial t^2}.$$

Для доказу приведемо в основному рівнянні (18) число невідомих у відповідність із числом рівнянь, для чого запишемо вектори w_T і η, які необхідно визначити, у базисах A і K відповідно. Маємо

$$w_T = Aw^{(q)},\ \eta = K\eta^{(\xi)}, \tag{26}$$

і рівняння (18) набуває виду

$$-K\eta^{(\xi)} + MAw^{(q)} = f + \tau - Mw_N. \tag{27}$$

Тепер це система 3n скалярних рівнянь з 3n невідомими – s компонентами вектора $w^{(q)}$ і d компонентами вектора $\eta^{(\xi)}$. Згідно із властивістю (8) визначник системи (27) із матрицею P_M (5) відмінний від нуля, отже, її розв’язок $\eta^{(\xi)}$, $w^{(q)}$ – єдиний.

Для фактичного рішення рівняння (27), з метою уникнути обернення його 3n-вимірної матриці P_M (5), скористаємося прийомом, який дозволяє вилучати групи змінних. Перемножуючи ліву частину рівняння (27) на матрицю A' і враховуючи умову ортогональності базисів A і K (3), маємо

$$A'MAw^{(q)} = A'(f + \tau - Mw_N), \tag{28}$$

а перемножуючи ліву частину рівняння (27) на матрицю $K'M^{-1}$, знову за умовою ортогональності (3) отримуємо

$$-K'M^{-1}K\eta^{(\xi)} = K'M^{-1}(f + \tau - Mw_N). \tag{29}$$

Визначники s -вимірної системи рівнянь (28) і d -вимірної системи рівнянь (29) згідно умов (6) і (7) відмінні від нуля, отже, ці системи мають єдине рішення

$$w^{(q)} = (A'MA)^{-1} A'(f + \tau - Mw_N), \tag{30}$$

$$\eta^{(\xi)} = -(K'M^{-1}K)^{-1} K'M^{-1}(f + \tau - Mw_N). \tag{31}$$

Перетворюючи отримані значення $w^{(q)}$ і $\eta^{(\xi)}$ з допомогою рівностей (26) у декартову форму, отримуємо рівності (20) і (23).

Перетворюючи (20) з допомогою рівності (9), отримуємо (19). Перетворюючи (23) з допомогою (10), отримуємо (24).

Рівності (21), (22) визначають ортогональне прискорення.

Значення w (25) при уже знайденому значенні η (23), (24) визначаємо безпосередньо з основного рівняння (18).

Подання рішення оберненої задачі динаміки в термінах базису K (19) – (23) і в термінах базису A (20) – (24) дозволяє отримувати відповідь безпосередньо як у декартових, так і в узагальнених координатах.

Результати рішення оберненої задачі динаміки можна подати також у формах, більш наочних із точки зору їх фізичного змісту. Використовуючи умову ортогональності просторів T і N і залежності (9), (10) рівності (19), (20) і (23), (24) можна записати у вигляді

$$w_T = \left[I_{3n} - M^{-1}K(K'M^{-1}K)^{-1}K' \right]\left[M^{-1}(f_T + \tau_T) - w_N \right] = \tag{32}$$

$$= A(A'MA)^{-1} A'(f_T + \tau_T - Mw_N), \tag{33}$$

$$\eta = -f_N - \tau_N + K(K'M^{-1}K)^{-1}K'\left[w_N - M^{-1}(f_T + \tau_T) \right] = \tag{34}$$

$$= -f_N - \tau_N + \left[I_{3n} - MA(A'MA)^{-1} A' \right](Mw_N - f_T - \tau_T). \tag{35}$$

Вирази (32) і (33) разом із рівностями (21), (22) показують, що прискорення механічної системи Δ не залежить від ортогональних складових f_N і τ_N діючих на неї активної сили f і сили тертя τ .

Вирази (34) і (35) розкривають конструкцію ортогональної реакції в'язей η: вона безпосередньо компенсує ортогональні складові f_N і τ_N і через динамічні матриці залежить від дотичних складових f_T і τ_T.

Як і у випадку прямої задачі, рішення оберненої задачі динаміки значно спрощується для механічних систем спеціального виду.

Для механічних систем Δ, які складені з матеріальних точок однакової маси $m_\nu = m$, із матрицею мас

$$M = mI_{3n} \tag{36}$$

(зокрема, для систем, які складаються з єдиної матеріальної точки) рішення оберненої задачі динаміки визначається рівностями

$$w_T = m^{-1}(I_{3n} - K\Gamma^{-1}K')(f+\tau) = m^{-1}AG^{-1}A'(f+\tau) = m^{-1}(f_T+\tau_T), \tag{37}$$

$$w_N = -K\Gamma^{-1}\varphi = K\Gamma^{-1}K'\psi = (I_{3n} - AG^{-1}A')\psi , \tag{38}$$

$$\eta = mw_N - K\Gamma^{-1}K'(f+\tau) = mw_N - (I_{3n} - AG^{-1}A')(f+\tau) = mw_N - f_N - \tau_N \tag{39}$$

або рівностями

$$\begin{aligned} w = m^{-1}(f+\tau+\eta) = w_N + m^{-1}(I_{3n} - K\Gamma^{-1}K')(f+\tau) = \\ = w_N + m^{-1}AG^{-1}A'(f+\tau) = w_N + m^{-1}(f_T+\tau_T) \end{aligned} \tag{40}$$

Доведення отримуємо, підставляючи в рівності (19) – (25) значення M (36), використовуючи властивість ортогональності просторів T і N і тотожності (16).

Рівності (37) – (40) показують, що для вищеприведеного часткового виду механічних систем рішення оберненої задачі динаміки зводиться до простого поділу основного рівняння (18), яке тут записується у вигляді

$$m(w_T + w_N) = f_T + f_N + \tau_T + \tau_N + \eta$$

на дотичну і ортогональну складові

$$mw_T = f_T + \tau_T ,$$

$$mw_N = f_N + \tau_N + \eta ,$$

кожна з яких містить лише один невідомий параметр задачі, w_T і η відповідно, і дозволяє негайно отримати їх значення (37) і (39).

У загальному випадку механічної системи з довільними масами такий елементарний поділ стає неможливим, рішення задачі доводиться проводити з допомогою розглянутих вище загальних алгоритмів і результат розв'язку – формули (19) – (25) – містить кожна змінна обох просторів – T і N.

Для систем з ідеальними в'язями [3] рішення оберненої задачі динаміки виконується за допомогою рівнянь (19) – (25) при $\tau = 0$.

Розглянемо випадок, коли сила тертя залежить від η і, відповідно, рішення оберненої задачі динаміки необхідно знаходити з допомогою системи рівнянь

$$M(w_T + w_N) = f + \tau + \eta , \ \tau = \tau(r, \dot{r}, t, \eta) \tag{41}$$

відносно невідомих w_T, η і τ при заданій активній силі f і відомому прискоренні w_N, яке визначається рівностями (21), (22).

Будемо вважати рівності (20), (23) перетвореним поданням першого рівняння системи (41). Тоді ця система запишеться у вигляді

$$\begin{gathered} w_T = A(A'MA)^{-1}A'(f+\tau - Mw_N), \\ \eta = K(K'M^{-1}K)^{-1}K'\left[w_N - M^{-1}(f+\tau)\right], \\ \tau = \tau(r, \dot{r}, t, \eta). \end{gathered} \tag{42}$$

Рішення системи (42) визначається рішенням її підсистеми (друге і третє рівняння) відносно змінних η і τ.

Першим етапом рішення підсистеми повинне бути зведення її рівнянь і невідомих до найменшого числа. Зробимо це, переходячи до запису рівнянь в локальному базисі P. В результаті отримуємо

$$\eta^{(\xi)} = \Gamma^{-1}K'\eta = (K'M^{-1}K)^{-1}K'\left[w_N - M^{-1}(f + A\tau^{(q)} + K\tau^{(\xi)})\right],$$
$$\tau^{(q)} = G^{-1}A'\tau(r,\dot{r},t,K\eta^{(\xi)}), \quad (43)$$
$$\tau^{(\xi)} = \Gamma^{-1}K'\tau(r,\dot{r},t,K\eta^{(\xi)}).$$

Система (43) складається з $3n+d$ рівнянь і містить таке ж число невідомих складових $\eta^{(\xi)}$, $\tau^{(q)}$ і $\tau^{(\xi)}$. Структура системи дозволяє аналізувати загальні питання її рішення. Наприклад, її перше рівняння показує, що для механічних систем, які задовольняють умову

$$K'M^{-1}A = 0, \quad (44)$$

це рівняння не містить змінної $\tau^{(q)}$ і порядок системи (43), як наслідок, знижується на s одиниць. Умова (44) завідомо виконується для систем, складених із точок однакової маси, для яких матриця мас визначається рівністю (36), і як наслідок – рівність (44) визначається з умови ортогональності базисів A і K.

Зокрема, умова (44) виконується для системи, яка складається з єдиної матеріальної точки. Більше того, в цьому елементарному випадку (який охоплює всі види руху точки по довільним поверхням і кривим лініям) завжди $\tau_N = 0$, $\tau^{(\xi)} = 0$, і з першого рівняння системи (43) отримуємо, що η взагалі не залежить від τ. У цьому випадку система рівнянь (42) перетворюється в запис явного рішення задачі:

$$w_T = m^{-1}AG^{-1}A'(f+\tau) = m^{-1}(f_T + \tau),$$
$$\eta = mw_N - K\Gamma^{-1}K'f = mw_N - f_N,$$
$$\tau = \tau(r,\dot{r},t,mw_N - f_N).$$

Висновки

В статті показано, що використання матрично-геометричних методів, тобто, по суті, застосування спеціальних матричних форм запису інформації про механічну систему, дозволяє довести рішення основних задач динаміки для механічних систем довільної складності до кінця.

1. Павлюк І.В., Бурчак І.Н. Моделювання траєкторій руху складних механічних систем. - Матеріали II-ї міжнародної науково-практичної конференції „Современные проблемы геометрического моделирования" // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2007. – Вип. 17. - С. 209-220.
2. Павлюк І.В., Чигрин Т.Я., Крестьянполь Ю.А. Моделювання програмованих рухів складних механічних систем // Наукові нотатки, ЛДТУ. – Вип. 22. – С. 245 – 249.
3. Павлюк І.В., Крестьянполь Ю.А. Рішення задач динаміки для складних механічних систем // Наукові нотатки, ЛДТУ. – Вип. 25.
4. Величенко В.В. Матричные уравнения движения голономных систем // ДАН СССР. 1985. Т.285, №5.
5. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел.- М.: Наука, 1980.
6. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления.- М.: Наука, 1984.- 240 с.