

УДК 004

П.А.Пех

Луцький національний технічний університет

### ДО ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО ОПИСУ ВХІДНОГО ПОТОКУ СЕРВЕРА БАЗИ ДАНИХ

У роботі запропоновано один із можливих варіантів математичної моделі вхідного потоку сервера бази даних за допомогою узагальненого розподілу Ерланга.

Ключові слова: вхідний потік, розподіл Ерланга, вхідний потік бази даних

Постановка задачі. Проектування ефективних комп'ютерних мереж можливе за умови побудови адекватної математичної моделі процесу їх функціонування [1,2]. З позицій теорії масового обслуговування (рис.1, а) сервер С бази даних можна розглядати як систему, вхідний потік X якої утворюють запити, що надходять до нього. Процес обслуговування O полягає в обробленні цих запитів. Вихідний потік Y утворюють дані, сформовані за відповідними запитами.

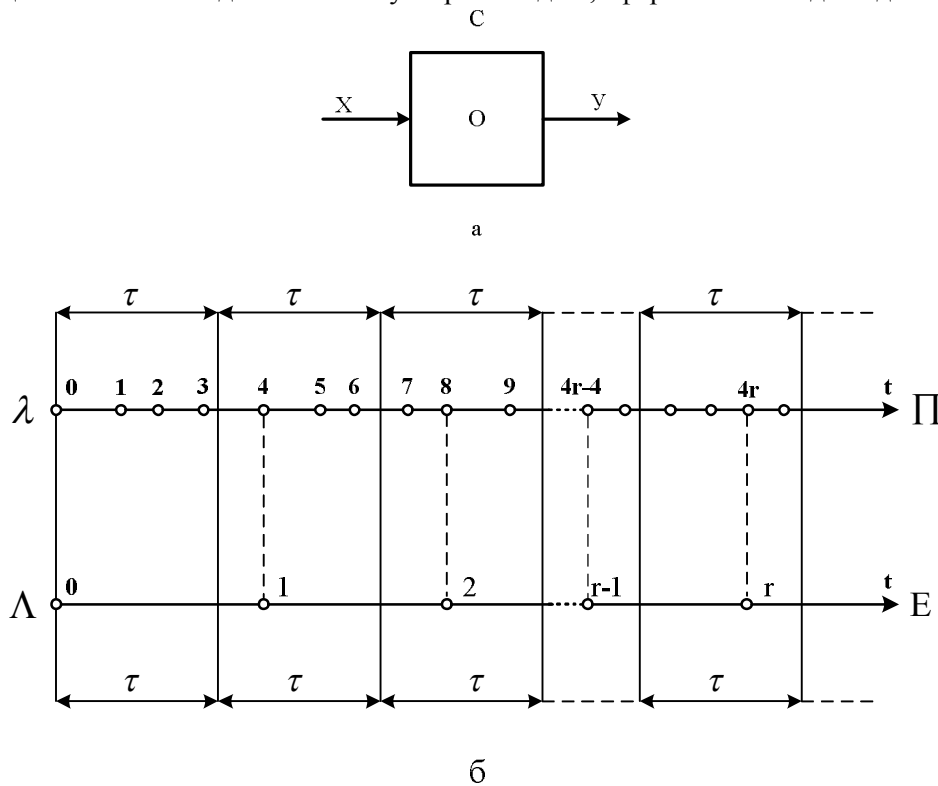


Рис. 1. а – Система масового обслуговування як модель функціонування сервера бази даних;  
 б - Схема утворення вхідного потоку з післядією E шляхом  $r$ -кратного розрідження найпростішого потоку П

Відмітимо на осі Ot точками моменти надходження запитів. Тоді віддаль між сусідніми точками являє собою тривалість проміжку часу між моментами надходження запитів. Кількість запитів, що надходять до сервера протягом певного інтервалу часу  $\tau$ , будемо вважати випадковою величиною R. Імовірність того, що за час  $\tau$  до сервера надійде рівно  $R=\tau$  запитів, позначимо  $P_r(\tau)$ . Процес надходження запитів будемо вважати стаціонарним, а, отже, імовірність  $P_r(\tau)$  постійною протягом тривалого проміжку часу. Потік запитів вважається ординарним: імовірність того, що за нескінченно малий проміжок  $dt$  до сервера надійде більше одного запиту, є величина нескінченно мала вищого порядку малості порівняно з величиною  $dt$ . Імовірність надходження одного запиту протягом інтервалу часу  $dt$  вважається пропорційною довжині цього інтервалу, тобто рівною  $\lambda dt$ , де  $\lambda$  – коефіцієнт пропорційності. Якщо кількість запитів, що надійшли за час  $\tau$ , не залежить від того, скільки їх надійшло в будь-який з інтервалів такої ж довжини, передуючих інтервалу  $\tau$ , то

вхідний потік буде потоком без післядії. Потік запитів, для якого властиві ознаки стаціонарності, ординарності і відсутності післядії, вважають найпростішим [3,4,5]. Диференціальна функція розподілу імовірностей проміжків часу між надходженням даних для найпростішого потоку має вигляд

$$f(t) = \frac{d}{dt}(F(t)) = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (1)$$

Реальні вхідні потоки запитів до серверів баз даних займають проміжне становище між найпростішим та детермінованим, тобто для них характерним є наявність післядії. Потоки з післядією можна отримати шляхом розрідження найпростішого потоку [6,7]. Візьмемо із найпростішого потоку запитів, позначеного на рис.1,б символом П, кожну k-у точку і знесемо її на нову вісь  $O_t$ , залишаючи масштаб часу попереднім. Точки на новій осі, отримані таким чином, означають моменти надходження запитів у процесі Ерланга Е. Параметр k процесу будемо розуміти поки що як міру розрідження найпростішого потоку. Диференціальна функція розподілу імовірностей проміжків часу між надходженням запитів для процесу Ерланга має вигляд

$$f^k(t) = \frac{(k\Lambda)^k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\Lambda t}. \quad (2)$$

Використовуючи функцію (2), можна знайти математичне сподівання

$$M_T^k = \frac{1}{\Lambda} \quad (3)$$

та дисперсію проміжку часу між надходженням запитів у процесі Е

$$D_T^k = \frac{1}{k\Lambda^2}. \quad (4)$$

З формул (3) та (4) випливає, що параметр k є ступенем післядії процесу надходження запитів: зі збільшенням величини цього параметра зростає післядія процесу, тобто він стає ближчим до детермінованого:

$$k = \frac{(M_T^k)^2}{D_T^k}. \quad (5)$$

Якщо процес з післядією отримується в результаті k-кратного розрідження найпростішого потоку (рис.1, б), кожний із проміжків якого має експоненціальний розподіл з однаковою щільністю, то такий процес описується звичайним розподілом Ерланга. Але за вихідний може бути взятий і такий процес, коли кожен із k проміжків має експоненціальний розподіл з різною щільністю. Один із варіантів такої моделі вхідного потоку запитів до сервера бази даних і розглядається в даній роботі.

Припустимо, що у вихідному процесі щільність першого з k проміжків дорівнює  $\mu_1$ , а інших –  $\mu_0$ . Тоді диференціальна функція розподілу  $\varphi^k(t)$  проміжків часу отриманого таким чином процесу з післядією буде композицією розподілів такого вигляду:

$$f_1^1(t) = \mu_1 e^{-\mu_1 t} \quad (6)$$

і

$$f_2^{k-1}(t) = \frac{\mu_0 (\mu_0 t)^{k-2}}{(k-2)!} \cdot e^{-\mu_0 t}. \quad (7)$$

Знайдемо цю функцію. Для зручності введемо в розгляд дві допоміжні функції

$$f_1(x) = \mu_1 e^{-\mu_1 x}$$

і

$$f_2(y) = \frac{\mu_0 (\mu_0 y)^{k-2}}{(k-2)!} \cdot e^{-\mu_0 y}.$$

Знайдемо композицію цих функцій. Згідно з визначенням композиції розподілів[3] маємо:

$$\varphi^k(t) = \int_0^t \mu_1 e^{-\mu_1 x} \cdot \frac{\mu_0 (\mu_0 (t-x))^{k-2}}{(k-2)!} \cdot e^{-\mu_0 (t-x)} dx = \frac{\mu_1 \mu_0^{k-1} e^{-\mu_0 t}}{(k-2)!} \cdot \int_0^t (t-x)^{k-2} e^{(\mu_0 - \mu_1)x} dx.$$

Інтегруємо по частинах, поклавши:

$$u = (t-x)^{k-2}; \quad dv = e^{(\mu_0-\mu_1)x} dx;$$

$$du = -(k-2)(t-x)^{k-3} dx; \quad v = \frac{e^{(\mu_0-\mu_1)x}}{\mu_0-\mu_1}.$$

Маємо

$$\begin{aligned} \phi^k(t) &= \frac{\mu_1 \mu_0^{k-1} e^{-\mu_0 t}}{(k-2)!} \left( \frac{(t-x)^{k-2} e^{(\mu_0-\mu_1)x}}{\mu_0-\mu_1} \Big|_0^t + \frac{(k-2)}{(\mu_0-\mu_1)} \int_0^t (t-x)^{k-3} e^{(\mu_0-\mu_1)x} dx \right) = \\ &= \frac{\mu_1 \mu_0^{k-1} e^{-\mu_0 t}}{(k-2)!} \left( -\frac{t^{k-2}}{\mu_0-\mu_1} + \frac{(k-2)}{(\mu_0-\mu_1)} \int_0^t (t-x)^{k-3} e^{(\mu_0-\mu_1)x} dx \right). \end{aligned}$$

Застосовуючи до інтеграла, який записаний в дужках цього виразу, такий самий спосіб інтегрування другий раз, одержимо

$$\phi^k(t) = \frac{\mu_1 \mu_0^{k-1} e^{-\mu_0 t}}{(k-2)!} \left( -\frac{t^{k-2}}{\mu_0-\mu_1} - \frac{(k-2)t^{k-3}}{(\mu_0-\mu_1)^2} + \frac{(k-2)(k-3)}{(\mu_0-\mu_1)^2} \int_0^t (t-x)^{k-4} e^{(\mu_0-\mu_1)x} dx \right).$$

Інтегруючи по частинах необхідну кількість разів, отримаємо

$$\phi^k(t) = \mu_1 \mu_0^{k-1} \left( \frac{e^{-\mu_1 t}}{(\mu_0-\mu_1)^{k-1}} - e^{-\mu_0 t} \left( \frac{1}{(\mu_0-\mu_1)^{k-1}} + \frac{t}{1!(\mu_0-\mu_1)^{k-2}} + \dots + \frac{t^{k-2}}{(k-2)!(\mu_0-\mu_1)} \right) \right),$$

або

$$\phi^k(t) = \mu_1 \mu_0^{k-1} \left( \frac{e^{-\mu_1 t}}{(\mu_0-\mu_1)^{k-1}} - e^{-\mu_0 t} \sum_{i=0}^{k-2} \frac{t^i}{i!(\mu_0-\mu_1)^{k-i-1}} \right). \quad (8)$$

Оскільки проміжок часу у процесі Ерланга є сумою  $k$  проміжків найпростішого процесу, то математичне сподівання  $M_T^k$  та дисперсія  $D_T^k$  розподілу (3) відповідно дорівнюють

$$M_T^k = \frac{1}{\mu_1} + \frac{k-1}{\mu_0} = \frac{\mu_0 + (k-1)\mu_1}{\mu_1 \mu_0}; \quad (9)$$

$$D_T^k = \frac{1}{\mu_1^2} + \frac{k-1}{\mu_0^2} = \frac{\mu_0^2 + (k-1)\mu_1^2}{\mu_1^2 \mu_0^2}. \quad (10)$$

За перші наближення для  $M_T^k$  і  $D_T^k$  можна взяти значення  $\overline{M}_T$  і  $\overline{D}_T$ , визначені за даними експериментів. Параметр  $k$  оцінимо за відношенням  $\frac{\overline{M}_T^2}{\overline{D}_T}$ , заокругливши його до найближчого більшого цілого числа. Визначимо  $\mu_0$  і  $\mu_1$  так, щоб при вибраному значенні параметра  $k$  математичне сподівання і дисперсія дорівнювали б експериментальним. Для цього замінимо у виразах (9) і (10)  $M_T^k$  на  $\overline{M}_T$ ,  $D_T^k$  на  $\overline{D}_T$  і розв'яжемо їх як систему відносно  $\mu_0$  і  $\mu_1$ . Отримаємо:

$$\mu_1 = \frac{\mu_0}{1-k + \mu_0 \cdot \overline{M}_T}; \quad (11)$$

$$\mu_0 = \frac{(k-1)\overline{M}_T \pm \sqrt{(k-1)^2 \overline{M}_T^2 - k(k-1)(\overline{M}_T^2 - \overline{D}_T)}}{\overline{M}_T^2 - \overline{D}_T}. \quad (12)$$

Розділивши чисельник і знаменник правої частини рівності (7) на  $\overline{M}_T^2$ , отримаємо:

$$\mu_0 = \frac{1}{\overline{M}_T} \cdot \frac{(k-1) \pm \sqrt{(k-1)^2 - k(k-1) \left( 1 - 1/\left(\overline{M}_T^2/\overline{D}_T\right) \right)}}{1 - 1/\left(\overline{M}_T^2/\overline{D}_T\right)}, \quad (13)$$

$$\mu_0 = \frac{1}{M_T} \cdot \gamma, \tag{14}$$

де

$$\gamma = \frac{(k-1) \pm \sqrt{(k-1)^2 - k(k-1) \left(1 - 1/\left(\overline{M_T^2}/\overline{D_T}\right)\right)}}{1 - 1/\left(\overline{M_T^2}/\overline{D_T}\right)}. \tag{15}$$

Враховуючи рівність (10), формулу (8) запишемо так:

$$\mu_1 = \frac{1}{M_T} \cdot \frac{\gamma}{1 - k + \gamma}, \tag{16}$$

або

$$\mu_1 = \frac{\delta}{M_T}, \tag{17}$$

де

$$\delta = \frac{\gamma}{1 - k + \gamma}. \tag{18}$$

Безрозмірні коефіцієнти  $\gamma$  і  $\delta$ , за допомогою яких легко визначаються  $\mu_0$  і  $\mu_1$ , є складними функціями параметра розподілу  $k$  і відношення  $\overline{M_T^2}/\overline{D_T}$ . Зокрема, якщо параметр  $k$  точно дорівнює відношенню  $\overline{M_T^2}/\overline{D_T}$ , то коефіцієнти  $\gamma$  і  $\delta$  дорівнюють  $k$  і розподіл (8) перетворюється в (2). В інших випадках їх доводиться розраховувати за формулами (15) і (18). Двом значенням квадратного кореня у виразі (15) відповідають два значення коефіцієнта  $\gamma$ . Подальший аналіз показав, що ті значення коефіцієнта  $\gamma$ , які визначені при від'ємних значеннях квадратного кореня у виразі (15), приводять до значних відхилень параметрів  $\mu_0$  та  $\mu_1$  і тому далі не розглядаються. Коефіцієнти  $\gamma$  і  $\delta$  розраховані залежно від дробової частини відношення  $\overline{M_T^2}/\overline{D_T}$  і величини параметра  $k$ . Результати цих розрахунків наведені в таблицях 1 і 2. Номограми (рис.2 і рис.3) дозволяють визначати коефіцієнти  $\gamma$  і  $\delta$  більш простим графічним шляхом.

Таблиця 1

Величина коефіцієнта  $\gamma$  за різних значень дробової частини відношення  $\overline{M_T^2}/\overline{D_T}$  квадрата середнього часу між надходженням запитів до дисперсії цього часу і величини параметра  $k$

Дробова частина відношення $\overline{M_T^2}/\overline{D_T}$	Величина параметра $k$ стабільності робочого циклу										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
0,1	20,95	5,59	5,81	6,53	7,39	8,30	9,24	10,20	11,17	16,09	21,05
0,2	10,90	5,23	5,62	6,40	7,28	8,20	9,15	10,12	11,09	16,02	20,98
0,3	7,51	4,92	5,45	6,26	7,16	8,10	9,06	10,03	11,01	15,94	20,91
0,4	5,79	4,64	5,28	6,13	7,05	8,00	8,96	9,94	10,92	15,87	20,84
0,5	4,73	4,39	5,12	6,00	6,94	7,89	8,87	9,84	10,83	15,78	20,76
0,6	4,00	4,15	4,95	5,86	6,81	7,78	8,76	9,74	10,73	15,69	20,68
0,7	3,45	3,93	4,79	5,72	6,69	7,66	8,64	9,64	10,62	15,60	20,58
0,8	3,00	3,70	4,61	5,57	6,54	7,53	8,52	9,51	10,50	15,48	20,47
0,9	2,60	3,45	4,41	5,38	6,37	7,36	8,36	9,35	10,35	15,34	20,33

Таблиця 2

Величина коефіцієнта  $\delta$  за різних значень дробової частини відношення  $\frac{\overline{M}_T^2}{D_T}$  квадрата середнього часу між надходженням запитів до дисперсії цього часу і величини параметра  $k$

Дробова частина відношення $\frac{\overline{M}_T^2}{D_T}$	Величина параметра $k$ стабільності робочого циклу										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
0,1	1,05	1,56	2,07	2,58	3,09	3,61	4,12	4,63	5,15	7,71	10,28
0,2	1,10	1,62	2,14	2,69	3,20	3,72	4,25	4,78	5,31	7,94	10,58
0,3	1,15	1,69	2,23	2,77	3,31	3,85	4,40	4,94	5,49	8,21	10,93
0,4	1,21	1,76	2,32	2,88	3,44	4,00	4,56	5,13	5,69	8,50	11,32
0,5	1,27	1,84	2,42	3,00	3,58	4,17	4,75	5,34	5,92	8,85	11,78
0,6	1,33	1,93	2,54	3,15	3,76	4,37	4,98	5,59	6,20	9,26	12,33
0,7	1,41	2,04	2,68	3,32	3,97	4,61	5,26	5,90	6,55	9,78	13,00
0,8	1,50	2,18	2,86	3,55	4,24	4,93	5,62	6,31	7,00	10,45	13,91
0,9	1,62	2,38	3,13	3,89	4,65	5,41	6,16	6,92	7,68	11,48	15,28

Нехай емпіричним шляхом знайдені середні значення часу надходження запитів  $\overline{M}_T = 52$  с і дисперсія цього часу  $D_T = 260$  с<sup>2</sup>. Користуючись номограмами, знайдемо параметри розподілу (3). Оскільки відношення  $\frac{\overline{M}_T^2}{D_T} = 10,4$ , то параметр  $k$  приймаємо рівним 11. На номограмі (рис.2) при значенні дробової частини відношення  $\frac{\overline{M}_T^2}{D_T}$ , що дорівнює 0,4, на кривій, що відповідає значенню  $k=11$ , знаходимо  $\gamma=11,9$ . Аналогічно на номограмі (рис.3) визначаємо величину коефіцієнта  $\delta$ , який в даному випадку дорівнює  $\delta=6,25$ . Тоді  $\mu_0 = 11,9/52 = 0,229$  с<sup>-1</sup>;  $\mu_1 = 6,25/52 = 0,120$  с<sup>-1</sup>. Легко переконатися, що при такому виборі параметрів розподілу (3) його математичне сподівання і дисперсія, розраховані за формулами (4) і (5), співпадуть зі знайденими за експериментальними даними.

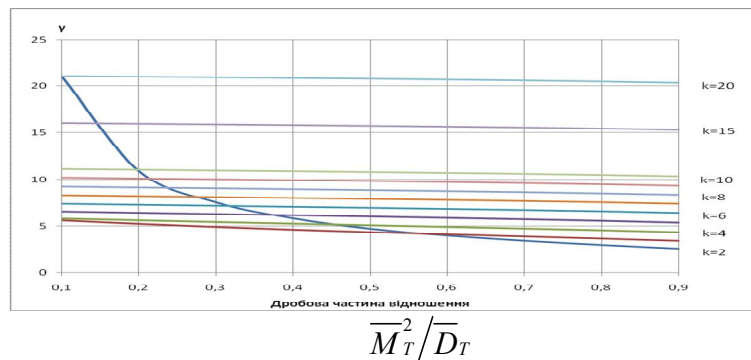


Рис. 2. Номограма для визначення коефіцієнта  $\gamma$  залежно від величини дробової частини відношення квадрата середнього часу надходження запитів до дисперсії цього часу  $\frac{\overline{M}_T^2}{D_T}$  і прийнятого значення параметра  $k$

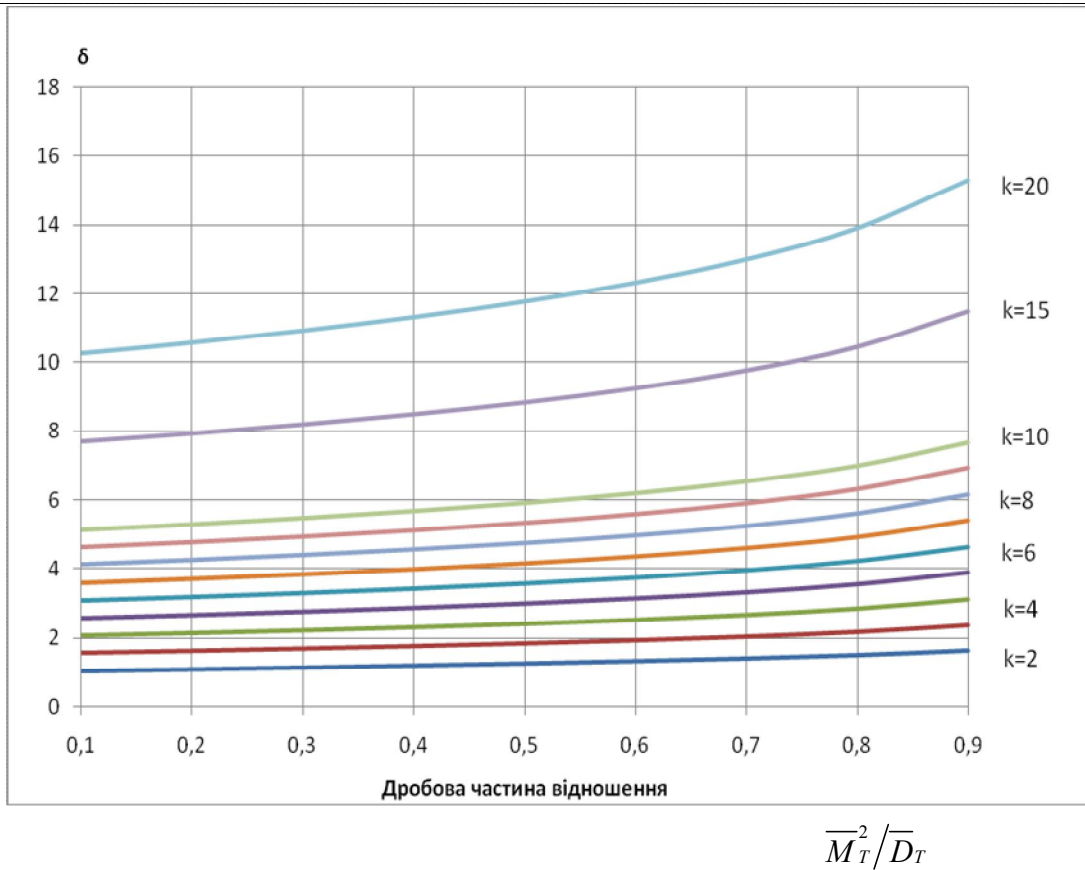


Рис. 3. Номограма для визначення коефіцієнта  $\delta$  залежно від величини дробової частини відношення квадрата середнього часу надходження запитів до дисперсії цього часу  $\frac{\overline{M}_T^2}{\overline{D}_T}$  і прийнятого значення параметра  $k$

Метод, за допомогою якого отримано розподіл (8), підказує один із можливих способів моделювання на ЕОМ процесу надходження запитів до серверів баз даних шляхом поділу цих процесів на фази з різними інтенсивностями. При цьому параметр  $k$  не обов'язково повинен бути цілим числом, а може приймати довільні значення від нуля до нескінченності.

Розподіл (3) є однією з можливих різновидностей узагальненого розподілу Ерланга [59, 146]. Природно, виникає питання – у яких випадках і який саме розподіл потрібно використовувати для опису процесу надходження даних до серверів баз даних? Щоб відповісти на нього, порівняємо два звичайних розподіли Ерланга з однаковою щільністю  $\mu$  і різними значеннями параметра  $k$ .

Якщо розподіл з параметром  $k=k_1$  апроксимувати розподілом з параметром  $k_2 > k_1$ , то за однакової щільності  $\mu$  це приведе до зменшення дисперсії від величини  $D_T^{k_1}$  до  $D_T^{k_2}$ . Відносна зміна  $\varepsilon$  дисперсії дорівнює

$$\varepsilon = \frac{D_T^{k_1} - D_T^{k_2}}{D_T^{k_1}} = \frac{\frac{1}{k_1 \mu^2} - \frac{1}{k_2 \mu^2}}{\frac{1}{k_1 \mu^2}} = \frac{k_2 - k_1}{k_2} = 1 - \frac{k_1}{k_2},$$

або у відсотковому обчисленні

$$\varepsilon = 100 \left( 1 - \frac{k_1}{k_2} \right). \tag{19}$$

## Висновки

Отже, якщо розподіл Ерланга з параметром  $k_1=2$  апроксимувати розподілом з параметром  $k_2=4$ , то  $\varepsilon=50\%$ . Але такий же результат одержимо, коли приймемо  $k_1=50$ , а  $k_2=100$ . Для того, щоб оцінити абсолютну зміну дисперсії, ці два розподіли потрібно порівнювати не один з одним, а кожен – з експоненціальним розподілом. Тоді для першої згадуваної пари розподілів одержимо зміну дисперсії відповідно 65% і 45%, а для другої – 98% і 99%, так що похибка апроксимації у другому випадку значно менша.

Таким чином, при малих значеннях відношення  $\frac{\overline{M}_T^2}{D_T}$  (в межах від 1 до 5) доцільно використовувати узагальнений розподіл Ерланга, а в інших випадках – звичайний.

1. Пасічник В.В., Резніченко В.А. Організація баз даних та знань. – К.: Видавнича група ВНУ, 2006.– 384 с.
2. Пасічник В.В., Шаховська Н.Б. Сховища даних – Львів: Магнолія 2006, 2008. -496 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. -576 с.
4. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Сов. радио, 1972. -551 с.
5. Гнеденко В.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука, 1966. -432 с.
6. Коофман А., Крюон Р. Массовое обслуживание: теория и приложения. – М.: Мир, 1965. -302 с.
7. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания. Теория вероятностей. – М.: Сов. радио, 1965. -510 с.