

УДК 519.63

М.Г.Федоришин<sup>1</sup>, С.О.Камаєва<sup>2</sup><sup>1</sup> Svitla Systems Inc.<sup>2</sup> Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу**НОВІ УДОСКОНАЛЕНІ МОДЕЛІ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

*Робота присвячена розв'язуванню задачі про кручення призматичних стержнів з прямокутним перерізом методом скінченних елементів з використанням стандартних та альтернативних моделей. Проаналізовано залежність точності розрахунків від того, на скільки елементів розбивається поперечний переріз стержня, який їхній порядок та яка модель використовується. Шляхом розв'язання оберненої задачі було отримано удосконалені моделі.*

Ключові слова: *функція напружень, крутний момент, максимальне дотичне напруження, модель, серпидиновий елемент.*

Постановка проблеми. На сьогоднішній день в прикладних дослідженнях все частіше використовуються наближені методи, оскільки знайти аналітичний розв'язок буває надто важко або й взагалі неможливо. Одним з найбільш популярних обчислювальних методів є метод скінченних елементів (МСЕ), який успішно застосовується при розв'язуванні різних інженерних задач. Проте проблема удосконалення схем МСЕ з метою зменшення витрат на їх реалізацію є актуальною не лише в Україні, а й за її межами.

Аналіз попередніх публікацій. Поява МСЕ пов'язана з розв'язуванням задач космічних досліджень. Вперше він був опублікований в роботі [1], яка сприяла появі нових робіт із застосуванням МСЕ до задач будівельної механіки, гідро- і тепломеханіки та ін [2]. З появою продуктивних ЕОМ вдалось прискорити проведення надскладних обчислень та отримати більш точні розрахунки. Проте робота над вдосконаленням універсальних обчислювальних програм продовжується і понині.

Ціль статті. На прикладі задачі про кручення призматичних стержнів з прямокутним перерізом реалізувати МСЕ з використанням стандартних і альтернативних моделей та проаналізувати залежність точності результатів від кількості елементів, на які розбивається поперечний переріз стержня, і від їх порядку.

Основна частина. Дана робота присвячена розв'язуванню задач про кручення призматичних стержнів з прямокутним перерізом  $2a \times 2b$  (рис. 1).

Як відомо, ці задачі утворюють важливий розділ теорії пружності, а концепції, що використовуються при дослідженні кручення стержнів некругового перерізу, однаково корисні як для механічних задач, так і для задач теорії поля.

Математичною моделлю такої задачі є рівняння Пуассона:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2G\theta,$$

де  $\varphi$  – функція напружень (функція Прандтля),  $G$  – модуль зсуву матеріалу,  $\theta$  – кут закручування на одиницю довжини, з крайовою умовою:

$$\varphi(x, y)|_{\tilde{A}} = 0,$$

де  $\tilde{A}$  – контур поперечного перерізу.

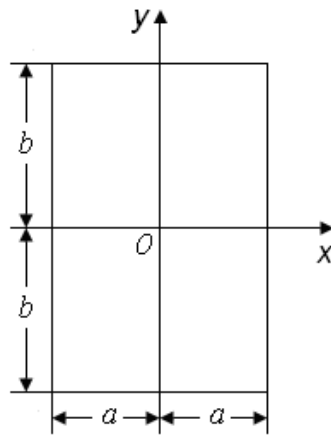


Рис. 1. Поперечний переріз стержня

Спочатку розглянемо частинний випадок, коли поперечний переріз – квадратний. За допомогою МСЕ знайдемо максимальне дотичне напруження  $\tau_{\max}$  та крутний момент  $M_t$  і порівняємо з результатами, отриманими аналітично [3]. При цьому аналізуватимемо точність розрахунків в залежності від кількості та порядку серендипових елементів, на які будемо розбивати переріз, з використанням стандартних та альтернативних моделей.

Дослід 1. Покриємо поперечний переріз стержня 4-ма білінійними елементами (рис. 2 а). В силу симетрії розглянемо його четвертину (рис. 2 б).

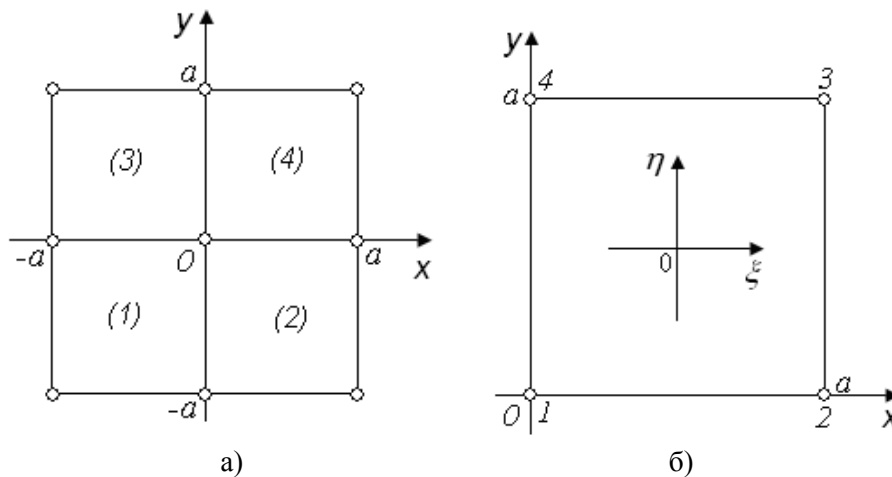


Рис. 2. Покриття поперечного перерізу чотирма білінійними СЕ

Наведемо базисні функції білінійного елемента. Зазвичай даний елемент розглядається в місцевих координатах, коли  $|\xi| \leq 1$  та  $|\eta| \leq 1$ , тому для вузла 1 маємо [2]:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4}(1-x)(1-y).$$

Решта функцій отримується з даної шляхом циклічної перестановки координат. (При розгляді довільного прямокутника  $2a \times 2b$  замість  $\xi, \eta$  використовуються  $\frac{\xi}{a}$  та  $\frac{\eta}{b}$ ).

Для переходу до глобальної системи координат  $Oxy$  зробимо заміну:

$$x = \xi + \frac{a}{2}, \quad y = \eta + \frac{a}{2}.$$

Поставлену задачу зручно розв'язувати в варіаційній постановці, яка пов'язана з розглядом функціоналу

$$\chi = \int_V \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - 2G\theta\varphi \right] dV.$$

Мінімізація  $\chi$  по набору вузлових значень шуканої функції  $\{\hat{O}\}$  призводить до системи лінійних рівнянь

$$\sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV \{\hat{O}\} = \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T (2G\theta) dV,$$

де  $[N^{(e)}]$  – функції форми довільного елемента (e),  $[B^{(e)}]$  – матриця градієнтів,

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язавши СЛАР відносно  $\{\hat{O}\}$ , знайдемо

$$\varphi^{(e)} = [N^{(e)}] \{\hat{O}\} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & N_2^{(e)} & \dots & N_r^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{O}_1 \\ \hat{O}_2 \\ \dots \\ \hat{O}_r \end{Bmatrix},$$

де  $r$  – число вузлів елемента.

Як відомо, крутний момент (геометрична жорсткість) шукається за формулою:

$$M_t = 2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b \varphi(x, y) dx dy, \quad (1)$$

де  $a, b$  – половини сторін прямокутного перерізу.

В [3] приводиться і спрощена формула для визначення  $M_t$ :

$$M_t = k_1 G\theta (2a)^3 2b, \quad (2)$$

де  $k_1$  – числовий множник, що залежить від величини відношення  $b/a$ .

Компоненти напруження шукаються за допомогою операції диференціювання:

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (3)$$

Якщо  $b = a$ , то максимальне дотичне напруження, що відповідає максимальному нахилу мембрани [3], діє в середніх точках сторін квадрата. Якщо ж  $b > a$ , то – в середніх точках довших сторін  $x = \pm a$  прямокутника.

В [3] приводиться спрощена формула для визначення  $\tau_{\max}$ :

$$\tau_{\max} = k 2G\theta a \quad (4)$$

де  $k$  – числовий множник, що залежить від величини відношення  $b/a$ .

Маючи аналітичний вираз для  $\varphi(x, y)$  знаходимо крутний момент та максимальне дотичне напруження за формулами (1) і (3) відповідно та порівнюємо отримані результати з результатами за формулами (2) та (4). Відносні похибки для  $\tau_{\max}$  та  $M_t$  становлять відповідно 44.444 % та 33.321 %. Зрозуміло, що такої кількості елементів недостатньо для отримання прийнятної точності, тому ми покрили поперечний переріз 16-ма білінійними елементами, в результаті чого відносні похибки для  $\tau_{\max}$  та  $M_t$  набули відповідно 28.571 % та 9.031 %. Очевидно, що точність буде покращуватись із збільшенням елементів, але це призведе до збільшення обсягу роботи та ускладнення обчислювального процесу.

Дослід 2. Спробуємо замість білінійних використати біквадратичні елементи серендипової сім'ї (8 вузлів) (рис. 3 а). Покриємо поперечний переріз чотирма 8-вузловими елементами.

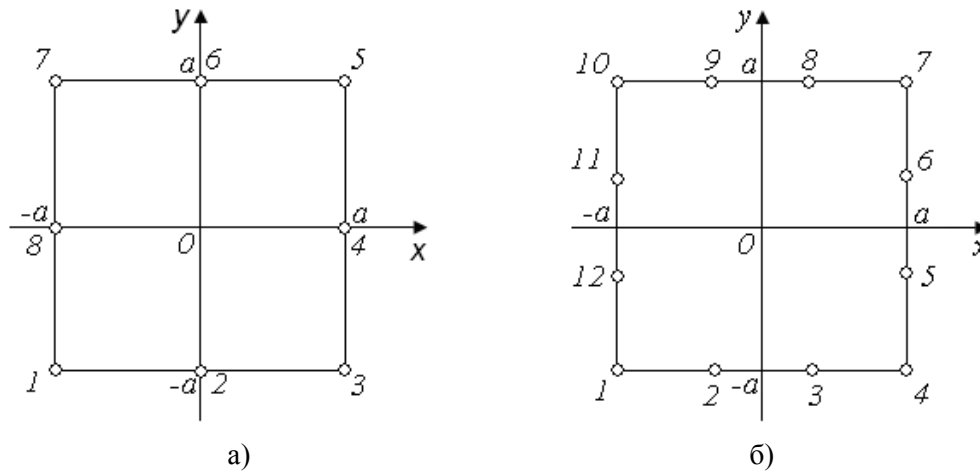


Рис. 3. Біквдратичний (а) та бікубічний (б) серендипові елементи

Наведемо базисні функції [2]:

$$N_1^{(1)}(x, y) = \frac{1}{4}(1-x)(1-y)(-1-x-y), \quad (5)$$

$$N_2^{(1)}(x, y) = \frac{1}{2}(1-x^2)(1-y)$$

Виявилось, що відносні похибки для  $\tau_{\max}$  та  $M_t$  становлять відповідно 2,371 % та 2,112 %. Дана точність вже є прийнятною, проте проаналізуємо наскільки покращаться результати при покритті поперечного перерізу стержня 16-ма біквдратичними елементами. Внаслідок цього відносні похибки для  $\tau_{\max}$  та  $M_t$  набули відповідно 2,421 % та 0,180 %. Як бачимо, вдалось отримати точніше значення для  $M_t$ , але похибка обчислення  $\tau_{\max}$  навіть збільшилась.

Дослід 3. Використаємо бікубічні серендипові елементи (12 вузлів) (рис. 3 б). Покриємо поперечний переріз чотирма такими елементами. Наведемо базисні функції [2]:

$$N_1^{(2)}(\xi, \eta) = \frac{1}{32} \cdot (1-\xi) \cdot (1-\eta) \cdot (-10+9 \cdot (\xi^2 + \eta^2)), \quad (6)$$

$$N_2^{(2)}(\xi, \eta) = \frac{9}{32} \cdot (1-\xi^2) \cdot (1-\eta) \cdot (1-3\xi)$$

Віносні похибки для  $\tau_{\max}$  та  $M_t$  становлять відповідно 12,056 % та 1,849 %. Як бачимо, результат  $\tau_{\max}$  є гірший, ніж в попередньому прикладі. Покриємо поперечний переріз стержня 16-ма елементами. Внаслідок цього відносні похибки для  $\tau_{\max}$  та  $M_t$  набули відповідно 0,571 % та 0,130 %. Як бачимо, ці результати є найкращими.

Проте на кожному з елементів крім стандартних моделей (5) та (6) завдяки геометричному моделюванню вдається отримати альтернативні моделі [4], а завдяки їх «зважуванню» вдається отримати безліч моделей з різними характеристиками. Розв'язуючи обернену задачу з врахуванням точного значення для  $\tau_{\max}$  було отримано нові моделі на біквдратичному елементі

$$N_1^{(*)}(x, y) = \frac{1}{2000}(1-x)(1-y)(-569-569x-569y-69xy), \quad (7)$$

$$N_2^{(*)}(x, y) = \frac{1}{2000}(1-x^2)(1-y)(1069+69y),$$

та на бікубічному елементі

$$N_1^{(**)}(\xi, \eta) = -\frac{1}{32000}(1-\xi)(1-\eta)(13789-12789(\xi^2 + \eta^2) + 3789\xi^2\eta^2), \quad (8)$$

$$N_2^{(**)}(\xi, \eta) = \frac{3}{64000}(1-\xi^2)(1-\eta)(7263-21789\xi+842\eta-842\xi\eta-421\eta^2+2947\xi\eta^2).$$

Моделі (7) і (8) при розбитті перерізу на 4 елементи забезпечують відносні похибки для  $M_t$  відповідно 1,510 % та 0,213 % (відносні похибки для  $\tau_{\max}$  становлять 0 %).

Ці оптимізовані моделі були протестовані на задачах про кручення призматичних стержнів з прямокутними перерізами. Відносні похибки розрахунків для  $\tau_{\max}$  та  $M_t$  в порівнянні з точними [3] для різних відношень сторін прямокутника  $\frac{b}{a}$  наведені в табл. 1. В цій же таблиці проведено порівняльний аналіз з відповідними результатами для стандартних моделей.

Зауважимо, що ці результати були отримані при розбитті поперечного перерізу стержня лише на чотири елементи.

Таблиця 1

Відносні похибки для  $\tau_{\max}$  та  $M_t$  при прямокутному перерізі, [%]

$\frac{b}{a}$	1.0		1.2		1.5		2.0		2.5	
	$\tau_{\max}$	$M_t$	$\tau_{\max}$	$M_t$	$\tau_{\max}$	$M_t$	$\tau_{\max}$	$M_t$	$\tau_{\max}$	$M_t$
(5)	2.371	2.112	5.461	2.032	8.580	2.472	11.141	4.591	12.371	4.251
(6)	12.056	1.849	12.843	1.579	14.05 2	1.849	15.621	3.604	17.228	2.869
(7)	0	1.510	2.780	1.421	5.480	1.842	7.420	3.911	8.041	3.482
(8)	0	0.213	0.080	0.099	0.127	0.273	0.433	1.724	0.979	0.797

Висновки. В даній роботі проаналізовано залежність точності розрахунків від того, на скільки елементів розбивається поперечний переріз стержня, який їхній порядок та яка модель використовується. Нам вдалось отримати нові моделі на біквадратичному та на бікубічному елементах, що забезпечують кращу точність розрахунків в порівнянні зі стандартними моделями при меншій кількості елементів, на які розбивається поперечний переріз. Таким чином, зменшується об'єм обчислювальної роботи.

Отримані моделі можна рекомендувати до використання при розв'язуванні й інших прикладних задач.

1. Turner M. J. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures / M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, L. J. Topp // J. Aeronaut. Sci. – 1956. – V.23. – P. 805-824.
2. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. – М. : Мир, 1986. – 328 с.
3. Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1979. – 2-е изд. – 560 с.
4. Камаєва С. О. Дослідження властивостей серендипових моделей / Актуальные достижения европейской науки – 2009 : V Междунар. науч.-практ. конф., Дніпропетровськ, 17-25 черв. 2009 р. : тез. докл. – Чехія ; Дніпропетровськ, 2009. – Т. 11. – С. 55-58.