

УДК 629.113

В.Г.Вербицький, Д.Л.Мойся

Донецька академія автомобільного транспорту

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СІДЕЛЬНОГО АВТОПОЇЗДА З КЕРОВАНИМ НАПІВПРИЧЕПОМ

*Побудована математична модель автопоїзда з керованою віссю напівпричепа. Визначено аналітичну залежність критичної швидкості(дивергентної). Проведено порівняльний аналіз математичних моделей автопоїздів класичного компонування та з керованим напівприцепом.*

Ключові слова: автопоїзд, модель, аналітична залежність.

### Вступ

У багатьох галузях промисловості велике значення має швидка й економічна доставка великогабаритних вантажів.

Головну роль у рішенні цієї проблеми відіграють автомобільні поїзди, експлуатація яких може бути ускладнена їхніми конструктивними особливостями, у першу чергу, обмежена маневреність довгомірних автопоїздів у стиснутих міських умовах. Найбільш негативним фактом при цьому є занос напівпричепа при виконанні маневрів (поворотах, розворотах і русі дорогами з вузьким дорожнім коридором). Величина заносу, при значній довжині напівпричепа, може досягати декількох метрів.

Найбільш сприятливим можна вважати ситуацію, коли траєкторія руху задніх коліс напівпричепа буде збігатися із траєкторією руху задніх коліс тягача.

З метою поліпшення показників стійкості та маневреності автопоїзда пропонується запровадити систему керування кутом повороту осі напівпричепа за лінійним законом - кут повороту осі пропорційний куту складання між ведучою та першою веденою ланкою. У даній праці розвивається програмно обчислювальна база, що дозволяє досліджувати стаціонарні стани та перехідні режими руху моделі автопоїзда з керованою віссю напівпричепа при зміні управляючих параметрів.

Однією з особливостей даної роботи є спроба визначення функціональної залежності силового фактора, що забезпечує необхідну орієнтацію керованої вісі. У попередніх роботах [4] вивід диференціальних рівнянь здійснювався так, що положення керованої вісі та її кутова швидкість задавалися як відома функція від кута складання між тягачем та напівприцепом та кутової швидкості тягача відповідно, при цьому не враховувались реальні зусилля, що забезпечують таке сполучення.

Мета роботи: побудова математичної моделі автопоїзда з керованою віссю напівпричепа та її апробація на прикладі дослідження стійкості усталених рухів.

### Постановка задачі

Досліджується плоска модель автопоїзда без урахування колії (велосипедна схема) (рис.1).

Передня вісь тягача може повертатися на кут  $\theta$ . Зв'язок між ланками здійснюється циліндричними шарнірами, які допускають відносно обертання ланок у площині їхнього руху. Вісь напівпричепа повертається на кут  $\theta_1$ , відносно поздовжньої вісі напівпричепа, за допомогою тросової передачі, що з'єднує шків нерухомо прикріплені до тягача і до поворотної вісі напівпричепа відповідно (рис.2). Триланковий автопоїзд, що складається з тягача напівпричепа й поворотної вісі (див. рис.2), при відсутності керування віссю буде нестійким (поводження напівпричепа буде непередбаченим) [5]. При введенні пасивного керування віссю (вводиться жорсткий зв'язок між кутом складання та кутом повороту керованої вісі напівпричепа) може бути вирішена задача стабілізації та поліпшення показників маневреності. При цьому постає питання вибору синтезу такого керування.

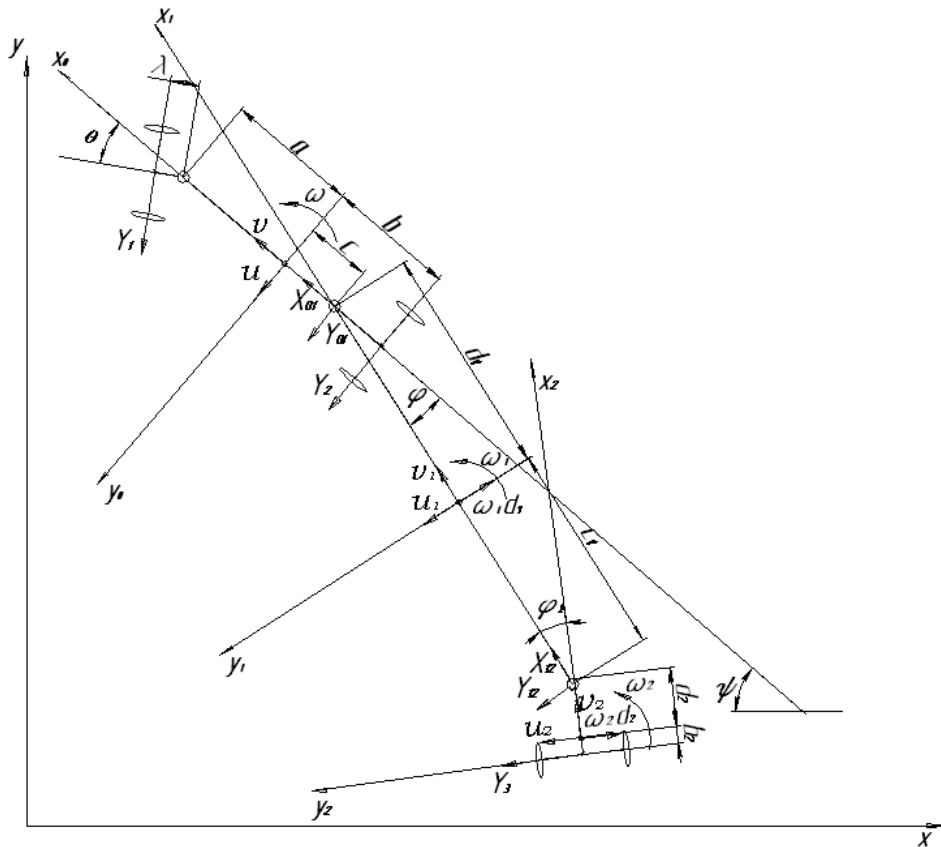
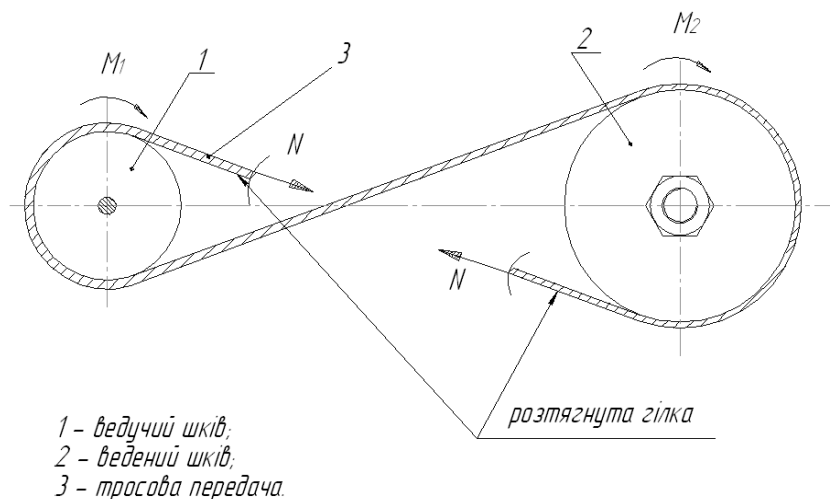


Рис. 1 (Принципова розрахункова схема автопоїзда)

Забезпечити задану траєкторію руху напівпричепи можна за рахунок керування поворотною віссю напівпричепи (див. рис.1). Керування віссю візка пропонується здійснювати передачею із гнучким зв'язком (тросовою передачею, позначеної на рис. 2 закресленою смугою). Тросова передача складається із системи шківів 1, 2 і троса 3 (див. рис.2)

При повороті автопоїзда між поздовжніми осями тягача й напівпричепи утвориться кут складання, за рахунок чого на поверхні зіткнення шківів 1 і троса 3 виникають сили тертя. Ці зусилля передаються уздовж троса на шків 2. Шків 2 нерухомо пов'язаний з керованою віссю візка, тобто момент сил тертя буде повертати її.



1 - ведучий шків;  
2 - ведений шків;  
3 - тросова передача.

Рис. 2. (Схема тросової передачі)

Обертаючі моменти, що виникають на шківках, пов'язані співвідношенням:

$$M_1 = PCH \cdot M_2,$$

де PCH – передаточне співвідношення тросової передачі.

Аналізуючи рисунок 2, приходимо до висновку, що моменти на шківках направлені в одну сторону.

Положення кожної ланки автопоїзда задається координатами  $x_i$ ,  $y_i$  його центра мас  $C_i$  і курсовим кутом  $\psi_i$  (який утворюється між поздовжньою віссю відповідної ланки й віссю абсцис (x) нерухомої системи координат).

Параметри системи:  $v$  - поздовжня складова швидкості центра мас тягача;  $a$ ,  $b$  - відстань від центра мас тягача до крапок кріплення передньої й задньої осей тягача;

$c$  - відстань від центра мас тягача до крапки зчипки із задньою ланкою;  $d_1$ ,  $d_2$  - відстань від центра мас напівпричепа й вісі до крапки зчипки відповідно; коефіцієнт тертя  $k_f$ ; коефіцієнти відведення на осях ( $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ); коефіцієнти зчеплення при визначенні бічних сил відведення ( $\chi_1$ ,  $\chi_2$ ,  $\chi_3$ ); установлений кут повороту коліс керованого модуля  $\theta$ , приведена бічна реакція полотна дороги на опорних осях тягача й напівпричепа ( $Y_1, Y_2, Y_3$ ).

Позначимо через  $C$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  - центри мас,  $m$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  - маси,  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  - центральні моменти інерції щодо відповідних вертикальних осей ланок автопоїзда,  $\varphi$  - кут складання (утворюється між поздовжніми осями тягача й напівпричепа).

$$\omega = \dot{\psi}, \quad \omega_1 = \dot{\psi}_1, \quad \omega_2 = \dot{\psi}_2 - \text{абсолютні кутові швидкості ланок,}$$

тоді

$$\omega_1 = \omega - \dot{\varphi}, \quad \omega_2 = \omega_1 - \dot{\theta}_1.$$

Задамо абсолютні швидкості крапок  $C$ ,  $C_1$  розкладаннями по ортах відповідних базисів:

$$\begin{aligned} v_c &= i_0 v + j_0 u, & v_{c1} &= i_1 v_1 + j_1 u_1, \\ v &= \dot{x} \cdot \cos \psi + \dot{y} \cdot \sin \psi, & u &= -\dot{x} \cdot \sin \psi + \dot{y} \cdot \cos \psi, \\ v_1 &= v \cdot \cos \varphi - (u - \omega \cdot c) \cdot \sin \varphi, & u_1 &= v \cdot \sin \varphi + (u - \omega \cdot c) \cdot \cos \varphi - \omega_1 \cdot d_1, \\ v_2 &= v_1 \cdot \cos \varphi_1 - (u_1 - \omega_1 \cdot b_1) \cdot \sin \varphi_1, & u_2 &= v_1 \cdot \sin \varphi_1 + (u_1 - \omega_1 \cdot b_1) \cdot \cos \varphi_1 - \omega_2 \cdot d_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Система диференціальних рівнянь руху автопоїзда описує зміну фазових змінних ( $u$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\Phi$ ):  $u$  - поперечна складова швидкості центра мас тягача (квазішвидкість),  $U$  - її похідна в рухомій системі координат;  $\Omega$  - кутове прискорення відносно вертикальної осі;  $\Phi$  - швидкості складання кута  $\varphi$ ;  $\rho\rho$  - кутове прискорення напівпричепа.

Серед різних теорій кочення пружнодеформованих коліс найбільше поширення одержала аксіоматика І. Рокара, відповідно до якої бічна реакція  $Y_i$  полотна дороги, прикладена в центрі плями контакту пружного колеса, що котиться, є функцією лише так званого кута відведення  $\delta_i$ .

Приведені кути бічного відведення колісних осей визначаються виразами

$$\delta_1 = \theta - \arctg \frac{(u + a\omega)}{v}; \quad \delta_2 = \arctg \frac{-u + b\omega}{v}; \quad \delta_3 = -\theta_1 + \arctg \frac{-u_1 + b_1\omega_1}{v_1}. \quad (2)$$

Залежності сил бічного відведення, що мають емпіричне походження [1], можна апроксимувати залежністю (монотонно зростаюча функція, що має характер кривої насичення)

$$Y_i = k_i \delta_i / \sqrt{1 + (k_i \delta_i / \chi_i Z_i)^2}, \quad (3)$$

де  $Z_i$  - вертикальні реакції опорної поверхні на осях.

Нехтуючи перерозподілом нормальних реакцій між бортами, будемо розглядати одне зведене колесо із центром у середині кожної вісі. Тоді

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{l} [mgb + m_1 g \frac{c_1}{L_1} (b - c)]; & Z_2 &= \frac{1}{l} [mga + m_1 g \frac{c_1}{L_1} (c + a)]; \\ Z_3 &= m_2 \cdot g + \frac{m_1 \cdot g \cdot d_1}{L_1}; & l &= a + b; L_1 = d_1 + c_1; L_2 = d_2 + b_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Примітка. Далі будемо вважати  $L_2 \approx 0$  (відповідні розміри опорної вісі порівняно малі).

Основна частина

Вивід диференціальних рівнянь плоскопаралельного руху триланкового автопоїзда методом перетинів [3].

Застосовуючи метод перетинів, одержимо наступні рівняння плоскопаралельного руху у проєкціях на осі, що незмінно зв'язані з ланками, для тягача, напівпричепа й опорного візка відповідно:

1. Рівняння руху тягача
 
$$m(V - u\omega) - X_{01} + Y_1 \sin(\theta) = 0,$$

$$m(U + v\omega) - Y_{01} - Y_1 \cos(\theta) - Y_2 = 0, \tag{5}$$

$$J\Omega + Y_{01}c - Y_1a \cos(\theta) + Y_2b + M_1 = 0.$$
2. Рівняння руху напівпричепа
 
$$m_1(V_1 - u_1\omega_1) + X_{01} \cos(\varphi) - Y_{01} \sin(\varphi) - X_{12} = 0,$$

$$m_1(U_1 + v_1\omega_1) + X_{01} \sin(\varphi) + Y_{01} \cos(\varphi) - Y_{12} = 0, \tag{6}$$

$$J_1\Omega_1 + X_{01} d_1 \sin(\varphi) + Y_{01}d_1 \cos(\varphi) + Y_{12}c_1 = 0.$$
3. Рівняння руху візка
 
$$m_2(V_2 - u_2\omega_2) + X_{12} \cos(\theta_1) - Y_{12} \sin(\theta_1) = 0,$$

$$m_2(U_2 + v_2\omega_2) + X_{12} \sin(\theta_1) + Y_{12} \cos(\theta_1) - Y_3 \cos(\theta_1) = 0, \tag{7}$$

$$J_2\Omega_2 + X_{12} d_2 \sin(\theta_1) + Y_{12}d_2 \cos(\theta_1) + Y_3 \cos(\theta_1)b_2 + M_2 = 0.$$

Виключивши із (5), (6) і (7) внутрішні сили  $Y_{01}$ ,  $X_{01}$ ,  $Y_{12}$ ,  $X_{12}$ ,  $M_1$  взаємодії підсистем, одержимо систему нелінійних диференціальних рівнянь (8) у загальному виді:

За змінною	-v	$f_1(v, u, \omega, \varphi, V, U, \Omega, \Phi, PP, \theta) = 0;$
	-u	$f_2(v, u, \omega, \varphi, V, U, \Omega, \Phi, PP, \theta) = 0;$
	- $\omega$	$f_3(v, u, \omega, \varphi, V, U, \Omega, \Phi, PP, \theta) = 0;$ (8)
	- $\varphi$	$f_4(v, u, \omega, \varphi, V, U, \Omega, \Phi, PP, \theta) = 0.$

У процесі вилучення внутрішніх сил взаємодії підсистем було визначено їх аналітичні залежності, у тому числі моменту, що орієнтує керовану вісь напівпричепа.

$$M_1 = PCH(-J_2\Omega_2 + m_2d_2(U_2 + \omega_2v_2) - Y_3 \cos(\theta_1)L_2). \tag{9}$$

Результати чисельного аналізу математичної моделі автопоїзда

При виводі рівнянь руху й чисельному інтегруванні використовувався пакет «Maple». Чисельні значення конструктивних параметрів системи відповідають роботі [6]:

$$m = 6500 \text{ êã}, m_2 = 36500 \text{ êã}, a = 0,4 \text{ ì}, b = 3,2\text{ì}, c = 2,7 \text{ ì}, \tilde{n}_1 = 2,6 \text{ ì}, d_1 = 5,6 \text{ ì}, m_3 = 800 \text{ êã}$$

$$d_2 = 0,8 \text{ ì}, b_2 = 0,2 \text{ ì}, k_1 = 160000 \text{ Í}, k_2 = 226000 \text{ Í}, k_3 = 270000 \text{ Í}, J = 0,35 * m * a * b \text{ êã ì}^2,$$

$$J_1 = 0,8 * m_1 * d_1 * b_1 \text{ êã ì}^2, J_2 = 200 \text{ êã ì}^2, \chi_i = 0,8, K = 1,5 \text{ ì}, PCH = 0,3$$

Нижче представлені результати чисельного інтегрування моделі при значеннях керуючих параметрів  $v \in \theta$ .

Так, значенням  $(v = 4,5 \text{ ì} / \tilde{n}, \theta = 0,38 \text{ ðãä})$  відповідає круговий стаціонарний режим  $\{u^* = 1,158 \text{ ì} / \tilde{n}, \omega^* = 0,456 \text{ ðãä} / \tilde{n}, \varphi^* = 0,54 \text{ ðãä}\}$  - для автопоїзда з керованим напівприцепом, та стаціонарний режим  $\{u^* = 1,062 \text{ ì} / \tilde{n}, \omega^* = 0,464 \text{ ðãä} / \tilde{n}, \varphi^* = 0,92 \text{ ðãä}\}$  - для автопоїзда з некерованим напівприцепом; траєкторія руху центра мас тягача в площині дороги й конфігурація автопоїзда представлені на рисунку 3.

На рисунку 3 показані положення автопоїзда при русі по круговому коридору, габарити якого відповідають стандартам ЄС.

Аналіз стаціонарних станів дає можливість дійти до висновку, що введення пасивного керування напівприцепом призводить до поліпшення показників маневреності. Так, при однакових керуючих параметрах  $v \in \theta$  кут складання  $\varphi$  зменшився майже вдвічі, що позначилось на величині необхідного дорожнього коридору – він також зменшився (див. рис.3а).

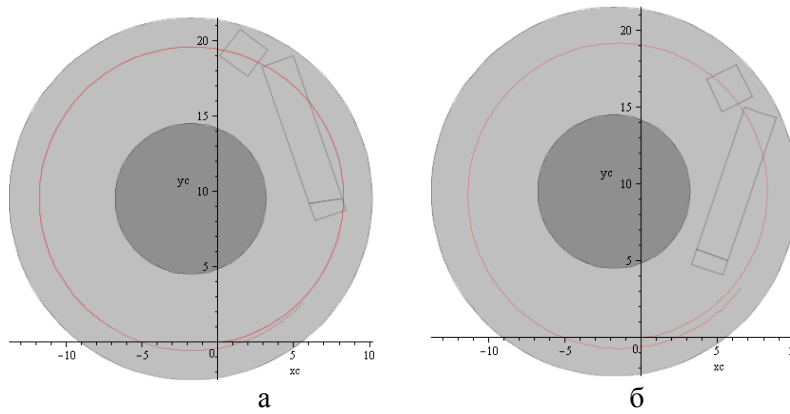


Рис. 3 Траекторія центра мас тягача в площині дороги при  $v = 4.5 \text{ і } /\text{ї}$ ,  $\theta = 0.38\delta\text{а\text{а}}$  ;  
а – з керованим напівпричепом, б – з некерованим напівпричепом

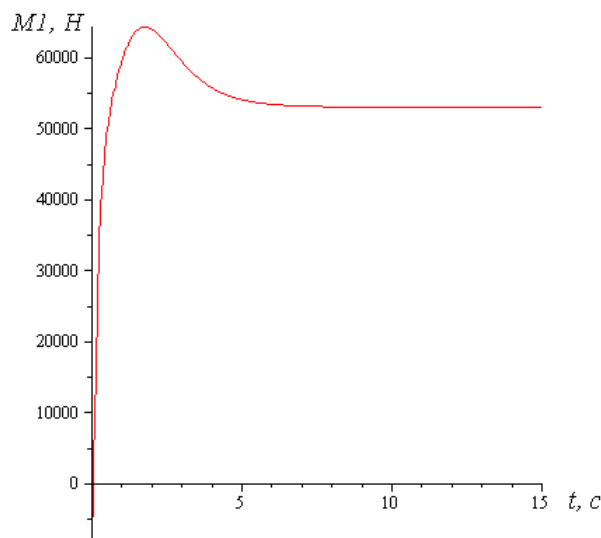


Рис. 4 – Графік залежності моменту керування як функції часу при входженні в круговий стаціонарний режим ( $v = 4.5 \text{ і } /\text{ї}$ ,  $\theta = 0.38\delta\text{а\text{а}}$  )

Визначення області стійкості прямолінійного режиму в просторі параметрів (аналітичне й чисельне визначення критичної швидкості прямолінійного руху)

Для чисельного визначення критичної швидкості використовується лінійне наближення вихідної системи й визначається спектр власних значень при різних значеннях швидкості. Цей підхід дає можливість встановити факт стійкості (нестійкості) для конкретного набору конструктивних параметрів. Метод розподілу інтервалу навпіл дає можливість визначити момент втрати стійкості ( $v_{kr}$ ) [2].

Значенню  $v = 16 \text{ і } /\text{ї}$  відповідає спектр власних значень:

$$\text{eig}v = -1,415 + 2,423 \cdot I; -0,0994; -2,119; -1,415 - 2,423 \cdot I.$$

Так, як всі корені характеристичного рівняння системи у варіаціях мають від'ємні дійсні частини, то, відповідно до теореми Ляпунова, прямолінійний режим руху стійкий.

При  $v = 20 \text{ і } /\text{ї}$  маємо:

$$\text{eig}v = 0,12; -1,125 + 2,56 \cdot I; -1,908; -1,125 - 2,56 \cdot I.$$

Один дійсний корінь додатний – режим нестійкий.

Отже, в інтервалі швидкостей  $16 \text{ м/с} < v < 20 \text{ м/с}$  відбувається втрата стійкості прямолінійного руху, значенню  $v_{kr}$ , при якому це відбувається, відповідає нульове власне значення (так званий критичний випадок одного нульового кореня – випадок дивергентної втрати стійкості). У цьому випадку початкові збурення фазових змінних ростуть аперіодично. Випадку пари комплексних власних значень із нульовою дійсною частиною відповідає періодичне зростання початкових збурень фазових змінних - флатерна нестійкість.

При  $v = 17,6 \text{ і } / \text{ї}$  маємо:

$$\text{eig}v = 0; -1,282 + 2,49 \cdot \text{I}; -2,024; -1,282 - 2,49 \cdot \text{I}.$$

Один з коренів із достатнім ступенем точності дорівнює нулю, це означає, що при значенні швидкості  $v_{kr} = 17,6 \text{ і } / \text{ї}$  відбулась дивергентна втрата стійкості.

Аналітичний вираз для визначення критичної швидкості (дивергентна втрата стійкості) має вигляд:

$$v_{kr} = \sqrt{\frac{k_1 k_2 l^2 L_1}{((L_1 m_2 b_2 + L_2 m_1 d_1) PCH + c c_1 m_1)(k_1 + k_2) + (m_1 c_1 + m L_1)(k_1 a - k_2 b)}}. \quad (10)$$

Чисельне значення критичної швидкості при обраних параметрах системи  $v_{kr} = 17,598 \text{ і } / \text{ї}$ , що підтверджує результати методу послідовних наближень.

#### Висновки

Побудовано математичну модель автопоїзда з керованою віссю напівпричепа, досліджено стійкість кругового стаціонарного руху, проведено порівняльний аналіз конфігурації автопоїзда з керованою віссю та без керування віссю – теоретично доведена доцільність обраної системи керування.

- 1 Рокар И. Неустойчивость в механике. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959. – 288с.
- 2 Лобас Л.Г., Вербицкий В.Г. Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин. - Киев: Наук. думка, 1990. – 232 с .
- 3 Эллис Д.Р. Управляемость автомобиля. – М.: Машиностроение, 1975. – 216с.
- 4 Вербицкий В. Г., Загороднов М. И. Определение и анализ устойчивости круговых стационарных режимов движения модели седельного автопоезда // Віст. Донецьк. ін – ту автомоб. трансп.: Сб. наук. пр. – 2007. – Вып. 1-2. – С.10 – 19.
- 5 Мойся Д. Л. Анализ стационарных состояний и их устойчивости трехзвенного автопоезда с безопорным промежуточным звеном автопоезда // Вістник національного транспортного університету: науково – технічний збірник.- №17'.- 2008. С.8 – 13.
- 6 6 Nonlinear Dynamics of a Wheeled Vehicle - R. Andrejloski, J. Awrejcewicz (Springer, 2005)