УДК 681.3+519.6
О.А.Пастух
Тернопільський національний технічний університет ім. І.Пулюя

МАТЕМАТИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ НЕЧІТКИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ

Зокрема, поняття нечіткої множини (а також нечітких чисел), нечіткої змінної, лінгвістичної змінної. Розглянуто математичний апарат семантичних просторів, нечітких універсальних алгебр, математичний формалізм критеріїв порівняння нечітких параметрів нечітких інформаційних систем, критеріїв розмитості, нечітких бінарних відношень, композиційного правила виведення в інтелектуалізованих нечітких інформаційних системах з різними типами імплікацій, функціонального відображення нечітких множин.

Ключові слова: *множина, система, дані.*

Вступ. Останнім часом все більшого прикладного застосування для обробки різного типу даних набувають нечіткі інформаційні системи (f -системи). Причиною цього є їх відносна проста будова, що проявляється у використанні ними менших об’ємів часових ресурсів та ресурсів пам’яті. Краща адаптованість до вербальної роботи, що поліпшує діалог з користувачем.

Аналіз досліджень і публікацій. Основи математичного забезпечення f -систем – базові поняття теорії нечітких множин вперше були введені Л.Заде [1]. В даний час математичне забезпечення f -систем стрімко розвивається збагачуючись досягненнями інших галузей математики і для його ефективного використання при розробці нових сучасних f -систем потрібно володіти останніми надбаннями. Серед літературних джерел, які містять велику низку напрацювань слід навести [2, 3].

Постановка завдання. У зв’язку із стрімким розвитком математичного забезпечення f -систем, який відбувається завдяки швидкому збагаченню досягненнями інших галузей математики для ефективної розробки нових сучасних f -систем слід здійснити аналіз останнього стану математичного забезпечення f -систем.

Основна частина. Базовим поняттям теорії нечітких множин Л.Заде та всіх нечітких математичних моделей f -систем є поняття нечіткої множини (f -множини). Якщо U – універсальна множина, то її нечіткою підмножиною називається множина fA в якої функція приналежності (індикаторна функція) має вигляд

$$I_{fA}(u):\ U \to [0,1],\ u \in U\ ,\ fA \subset U\ .$$

Оскільки з формальної точки зору немає необхідності розрізняти нечітку множину і її індикаторну функцію, то далі у роботі часто для зручності висвітлення матеріалу використовуються фразеологізми ототожнення цих різних хоча математично еквівалентних об’єктів.

Суть роботи f -систем ґрунтується на перетворенні вхідних чітких даних показників вимірювальних пристроїв у нечіткі дані, які описуються лінгвістичними змінними, що виконується блоком фаззифікації 1 (рис.1), після того відбувається обробка нечітких даних блоком 2 та зворотне перетворення (дефаззифікація) нечітких даних у чіткі дані блок 3, які подаються на вихід.

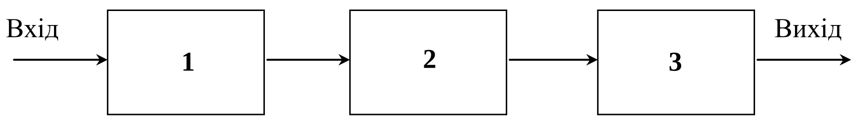


Рис.1. Блок-схема f -системи:1- блок фаззифікації, 2- блок обробки, 3- блок дефаззифікації.

Обробка нечітких даних f -системами базується на поняттях нечіткої змінної (fuzzy variable) та лінгвістичної змінної (linguistic variable) математичний формалізм яких має вигляд:

© О.А.Пастух

– нечітка змінна

$$\langle name,\ U,\ fA\rangle,$$

де $name$ – назва нечіткої змінної, U – область її визначення (універсальна множина), fA – нечітка множина в U, що описує обмеження на можливі значення нечіткої змінної $name$;

– лінгвістична змінна

$$\langle name,\ T(name),\ U,\ G,\ V\rangle,$$

де $name$ – назва змінної, $T(name)$ – терм-множини (term sets) змінної $name$, тобто множина назв лінгвістичних значень змінної $name$, кожне з таких значень – нечітка змінна із областю визначення U, G – синтаксичне правило (у більшості випадків формальна граматика), що породжує назви лінгвістичної змінної $name$, V – семантичне правило, яке ставить у відповідність кожній нечіткій змінній із $T(name)$ нечітку підмножину універсуму U.

Слушно відмітити, що при обробці нечітких даних f-системи оперують, зокрема, частинним видом нечітких множин – нечіткими числами, тобто такими нечіткими множинами в яких універсальна множина U є підмножиною дійсних чисел.

Серед можливих нечітких чисел (які є вихідним результатом роботи блоку фаззифікації (рис.1) над чіткими числовими даними, що надходять із зовнішніх пристроїв), обробку яких можуть здійснювати f-системи, найбільшого практичного застосування набули нечіткі числа ($\hat{L}-\hat{R}$)-типу в яких індикаторна функція має вид

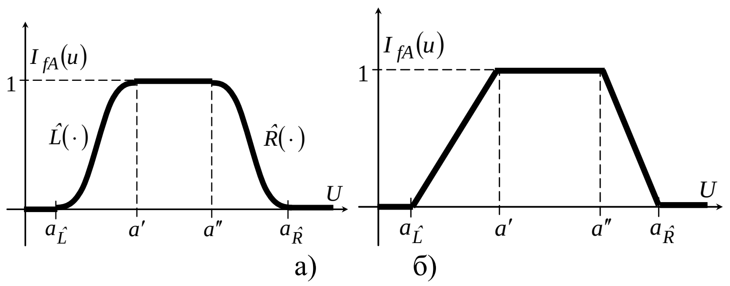
$$I_{fA}(u)=\begin{cases}\hat{L}\left(a'-u/a_{\hat{L}}\right), & u\le a', \quad a_{\hat{L}}>0,\\ \hat{R}\left(u-a''/a_{\hat{R}}\right), & u\ge a'', \quad a_{\hat{R}}>0,\\ 1, & u\in[a',a''],\end{cases}$$

де $\hat{L}(u)=\exp\left(|u|^p\right)$, $\hat{R}(u)=1/1+|u|^p$, $p\ge 0$ (графік рис.2а).

А також зокрема нечіткі числа з лінійними індикаторними функціями ($\hat{L}-\hat{R}$)-типу аналітичний вигляд яких має вид

$$I_{fA}(u)=\begin{cases}0, & u\le a_{\hat{L}},\\ u-a_{\hat{L}}/a'-a_{\hat{L}}, & a_{\hat{L}}\le u\le a',\\ 1, & a'\le u\le a'',\\ a_{\hat{R}}-u/a_{\hat{R}}-a'', & a''\le u\le a_{\hat{R}},\\ 0, & u\ge a_{\hat{R}},\end{cases}$$

графік наведено на рис.2б.



а) б)

Рис.2. Графік індикаторної функції: а) нелінійної індикаторної функції нечіткого числа ($\hat{L}-\hat{R}$)-типу, б) лінійної індикаторної функції нечіткого числа ($\hat{L}-\hat{R}$)-типу.

Якщо $a'<a''$, то лінійна індикаторна функція є трапецеїдальною, а якщо $a'=a''$, то трикутною.

При фаззифікації та загалом при обробці даних f-системами використовується математичний формалізм семантичних просторів, де під семантичним простором розуміється лінгвістична змінна з фіксованою терм-множиною, тобто

© О.А.Пастух

$$\left\langle name,\, T\left(name\right),\, U,\, G,\, V\right\rangle,$$

або, що є аналогічним – це набір нечітких змінних

$$\left\langle name_1,\, U,\, fA_1\right\rangle,\, \left\langle name_2,\, U,\, fA_2\right\rangle,\, \dots,\, \left\langle name_n,\, U,\, fA_n\right\rangle.$$

В різних прикладних задачах, наприклад, використання f-систем в розв'язуванні задач нечіткого пошуку даних, прийняття рішень в умовах невизначеності, використовуються різні сукупності семантичних просторів, що породжуються синтаксичним правилом G, яке математично формалізується за допомогою універсальної алгебри – уноїд

$$\left\langle I_f, \Omega 1_{I_f}\right\rangle,$$

де I_f – (носій) множина індикаторних функцій, кожна з яких відповідає окремому значенню фіксованої лінгвістичної змінної, наприклад, $name$, тобто окремому терму із терм-множини T;

$$\Omega 1_{I_f} = \left\{ \text{äóæ å}\;\; fA \sim \left(I_{fA}\left(u\right)\right)^2, \quad \text{á³ëüø} - \text{ì åíø}\;\; fA \sim \sqrt{I_{fA}\left(u\right)}, \quad \text{í å}\;\; fA \sim 1 - I_{fA}\left(u\right): \right.$$

$\left. fA \in T \right\}$ – (сигнатура) множина модифікаторів, які є операторами, що задані на функціональному просторі I_f.

Слушно відмітити, що в різних конкретних застосуваннях f-систем модифікатор ''не'' може математично формалізуватися й іншим чином, зокрема:

– квадратичне заперечення

$$I_{f\bar{A}}\left(u\right) = \sqrt{1 - \left(I_{fA}\left(u\right)\right)^2};$$

– заперечення Сугено

$$I_{f\bar{A}}\left(u\right) = 1 - I_{fA}\left(u\right) / 1 + kI_{fA}\left(u\right),\; -1 < k < \infty;$$

– заперечення порогового типу

$$I_{f\bar{A}}\left(u\right) = \begin{cases} 1, & \text{ÿêù î} \quad I_{fA}\left(u\right) \le \phi, \\ 0, & \text{ÿêù î} \quad I_{fA}\left(u\right) > \phi. \end{cases}$$

Але математичний формалізм синтаксичного правила G часто містить не лише універсальну алгебру у вигляді уноїда, але й універсальні алгебри із сигнатурами, що містять бінарні операції, які формалізують логічні зв'язки ''або'', ''і''. До таких універсальних алгебр відносяться:

$$\left\langle I_f, \Omega 2_{I_f}\right\rangle,$$

де I_f – (носій) множина індикаторних функцій, кожна з яких відповідає окремому терму із терм-множини T фіксованої лінгвістичної змінної;

$\Omega 2_{I_f} = \left\{ \max\left\{ I_{fA}, I_{fB}\right\},\;\; \min\left\{ I_{fA}, I_{fB}\right\},\;\; I_{f\bar{A}} = 1 - I_{fA}\right\}$ – сигнатура, що складається з максимінних бінарних операцій – $\max$, $\min$ та унарної операції – інверсії;

$$\left\langle I_f, \Omega 3_{I_f}\right\rangle,$$

де I_f – (носій) множина індикаторних функцій, кожна з яких відповідає окремому терму із терм-множини T фіксованої лінгвістичної змінної;

$\Omega 3_{I_f} = \left\{ I_{fA} + I_{fB} - I_{fA} \cdot I_{fB},\;\; I_{fA} \cdot I_{fB},\;\; I_{f\bar{A}} = 1 - I_{fA}\right\}$ – сигнатура, що складається з двох алгебраїчних бінарних операцій та унарної операції – інверсії; та інші.

Досить часто при обробці нечітких даних f-системами використовуються критерії порівняння нечітких змінних між собою, які виражають можливість обчислювати похибки нечітких розрахунків степені розмитості нечітких змінних та ін. Найбільш поширеними математичними формулами цих критеріїв є:

– відстань Хеммінга для скінченного універсуму $|U| = N$

$$\rho 1_{H_{\sum}}\left(fA, fB\right) = \sum_{i=1}^{N}\left|I_{fA}\left(u_i\right) - I_{fB}\left(u_i\right)\right|;$$

– відстань Евкліда для скінченного універсуму $|U| = N$

$$\rho 1_{E_{\sum}}\left(fA, fB\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(I_{fA}\left(u_i\right) - I_{fB}\left(u_i\right)\right)^2}\,.$$

Поряд з цим, при застосуванні f-систем для розв'язку багатьох прикладних задач використовується, введений Де Лука, показник нечіткості. Показник нечіткості у роботі f-систем може характеризувати оцінку якості різних алгоритмів у розпізнаванні образів, прийнятті рішень, моделях пошуку інформації, загалом, класифікації об'єктів [4]. Серед відомих математичних описів, що формалізують показник нечіткості найбільшого використання набув ентропійний підхід згідно якого показник нечіткості визначається

$$k_f\left(f\hat{A}\right) = -\frac{1}{\ln n}\cdot\sum_{u_i\in U} I_{f\hat{A}}\left(u_i\right)\cdot\ln I_{f\hat{A}}\left(u_i\right),\ i = \overline{1,n}.$$

Значення показника нечіткості залежить від відносних значень індикаторної функції. У f-системах розглядаються й інші математичні моделі показника нечіткості, наприклад, на основі метричного підходу, коли показник нечіткості розглядається, як відстань між індикаторною функцією оцінюваної нечіткої множини та індикаторної функції множини з відомим показником нечіткості. Зокрема, множиною із заданим показником нечіткості часто використовується чітка множина A, що є найближчою до оцінюваної нечіткої множини fA, з індикаторною функцією виду

$$I_A\left(u\right) = \begin{cases} 0, & \text{ÿêù î} \quad I_{fA}\left(u\right) < 0,5, \\ 1, & \text{ÿêù î} \quad I_{fA}\left(u\right) > 0,5, \\ 0 \ \text{àáî}\ 1, & \text{ÿêù î} \quad I_{fA}\left(u\right) = 0,5. \end{cases}$$

Показник нечіткості множини fA в даному випадку визначається, як відстань між індикаторними функціями множин A та fA, тобто

$$k_f\left(fA\right) = \rho\left(fA, A\right) = \rho\left(I_{fA}\left(u\right), I_A\left(u\right)\right),$$

де ρ – відстань у функціональному просторі.

Чим більша відстань між індикаторними функціями множин A та fA, тим більше значення показника нечіткості $k_f\left(fA\right)$ нечіткої множини fA.

Поряд з цим при метричному підході за множину з відомим показником нечіткості може бути вибрано максимально нечітку множину $f\tilde{A}$ з індикаторною функцією виду

$$I_{f\tilde{A}}\left(u\right) = 0,5,\ \forall u \in U\,.$$

Показник нечіткості в такому випадку для множини fA визначається, як відстань між індикаторними функціями множин fA та $f\tilde{A}$, тобто

$$k_f\left(fA\right) = g\left(\rho\left(fA, f\tilde{A}\right)\right) = g\left(\rho\left(I_{fA}\left(u\right), I_{f\tilde{A}}\left(u\right)\right)\right),$$

де ρ – відстань у функціональному просторі.

Чим менша відстань між індикаторними функціями множин fA та $f\tilde{A}$, тим більше значення показника нечіткості $k_f\left(fA\right)$.

В розрізі вище висвітленого слушно відмітити, що показником нечіткості може бути не довільний функціонал, а лише той який задовольняє певній сукупності аксіом, що наведені в [5].

При розробці різного роду f-систем важливе місце займають нечіткі відношення (f-відношення). Математичний формалізм f-відношень використовується при побудові нечітких

© О.А.Пастух

автоматів, аналізі процесів прийняття рішень. Нечітке відношення

$$fA = fA_1 \times fA_2 \times \ ... \ \times fA_N ,$$

де fA – нечітке N -арне відношення, $fA_1, \ \dots, \ fA_N$ – f -множини;

математично може формалізуватися різними способами:

– індикаторна функція визначається, як

$$I_{fA}\left(u_1, u_2, ..., u_N\right) = \min\left\{ I_{fA_1}\left(u_1\right), I_{fA_2}\left(u_2\right), ..., I_{fA_N}\left(u_N\right)\right\},$$

де $I_{fA}\left(u_1, u_2, ..., u_N\right)$ – індикаторна функція нечіткого N-арного відношення fA, $I_{fA_1}\left(u_1\right)$, $I_{fA_2}\left(u_2\right), \ \dots \ , I_{fA_N}\left(u_N\right)$ – індикаторні функції f -множин відповідно $fA_1, \ fA_2, \ \dots \ , fA_N$;

– індикаторна функція визначається, як

$$I_{fA}\left(u_1, u_2, ..., u_N\right) = I_{fA_1}\left(u_1\right) \cdot I_{fA_2}\left(u_2\right) \cdot \ ... \ \cdot I_{fA_N}\left(u_N\right),$$

де $I_{fA}\left(u_1, u_2, ..., u_N\right)$ – індикаторна функція нечіткого N-арного відношення fA, $I_{fA_1}\left(u_1\right)$, $I_{fA_2}\left(u_2\right), \ \dots \ , I_{fA_N}\left(u_N\right)$ – індикаторні функції f -множин відповідно $fA_1, \ fA_2, \ \dots \ , fA_N$.

Поряд з цим у f -системах досить часто використовується композиція $fR_1 \circ fR_2$ нечітких бінарних відношень, яка математично формалізується різними способами:

$$– \ I_{fR}\left(u_1, u_3\right) = I_{fR_1 \circ fR_2}\left(u_1, u_3\right) = \max_{u_2}\left\{ \ \min\left\{ I_{fR_1}\left(u_1, u_2\right), I_{fR_2}\left(u_2, u_3\right)\right\} \right\},$$

де $I_{fR_1}\left(u_1, u_2\right)$ – індикаторна функція нечіткого бінарного відношення fR_1 заданого на декартовому добутку універсумів U_1 та U_2, тобто $fR_1 \subset U_1 \times U_2$, при цьому $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$, $I_{fR_2}\left(u_2, u_3\right)$ – індикаторна функція нечіткого бінарного відношення fR_2 заданого на декартовому добутку універсумів U_2 та U_3, тобто $fR_2 \subset U_2 \times U_3$, при цьому $u_2 \in U_2$, $u_3 \in U_3$, $I_{fR}\left(u_1, u_3\right)$ – індикаторна функція нечіткого бінарного відношення fR заданого на декартовому добутку універсумів U_1 та U_3, тобто $fR \subset U_1 \times U_3$, при цьому $u_1 \in U_1$, $u_3 \in U_3$;

– якщо область значення індикаторних функцій нечітких бінарних відношень є множина дійсних чисел, то їх композиція представляється:

$$I_{fR}\left(u_1, u_3\right) = I_{fR_1 \circ fR_2}\left(u_1, u_3\right) = \max_{u_2}\left(\frac{1}{2}\left(I_{fR_1}\left(u_1, u_2\right) + I_{fR_2}\left(u_2, u_3\right)\right)\right),$$

Або $I_{fR}\left(u_1, u_3\right) = I_{fR_1 \circ fR_2}\left(u_1, u_3\right) = \max\limits_{u_2}\left(I_{fR_1}\left(u_1, u_2\right) \cdot I_{fR_2}\left(u_2, u_3\right)\right)$,

залежно від семантики конкретних задач для розв’язку яких використовуються f -системи.

Поряд з цим у прикладних застосуваннях важливе місце посідають поняття проекцій нечіткого бінарного відношення. Якщо $I_{fR}\left(u_1, u_2\right)$, де $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$ – індикаторна функція нечіткого бінарного відношення $fR \subset U_1 \times U_2$, то проекції fA_1 та fA_2 цього відношення відповідно на U_1 та U_2 мають індикаторні функції

$$I_{fA_1}\left(u_1\right) = \max_{u_2} I_{fR}\left(u_1, u_2\right), \ I_{fA_2}\left(u_2\right) = \max_{u_1} I_{fR}\left(u_1, u_2\right).$$

Умовні проекції першого типу fB_1 та fB_2 мають індикаторні функції відповідно виду

$$I_{fB_1}\left(u_1 \middle| u_{2_\circ}\right) = I_{fR}\left(u_1, u_{2_\circ}\right), \text{та } I_{fB_2}\left(u_2 \middle| u_{1_\circ}\right) = I_{fR}\left(u_{1_\circ}, u_2\right).$$

Умовні проекції другого типу $f\tilde{N}_1$ та $f\tilde{N}_2$ мають індикаторні функції відповідно виду

$$I_{fC_1}\left(u_1 \middle| u_{2_\circ}\right) = I_{fR}\left(u_1, u_{2_\circ}\right) \Big/ I_{fA_2}\left(u_{2_\circ}\right), \ I_{fA_2}\left(u_{2_\circ}\right) > 0,$$

$$I_{fC_2}\left(u_2 \middle| u_{1_\circ}\right) = I_{fR}\left(u_{1_\circ}, u_2\right) \Big/ I_{fA_1}\left(u_{1_\circ}\right), \ I_{fA_1}\left(u_{1_\circ}\right) > 0.$$

Проекції першого типу незалежні, якщо

$$I_{fR}\left(u_1, u_2\right) = \min\left\{ I_{fB_1}\left(u_1\right), I_{fB_2}\left(u_2\right)\right\},$$

проекції другого типу незалежні, якщо

$$I_{fR}\left(u_1,u_2\right)=I_{fC_1}\left(u_1\right)\cdot I_{fC_2}\left(u_2\right).$$

Слушно зауважити, що математична формалізація нечіткого бінарного відношення fR володіє важливим наслідком, а саме, за допомогою неї можна формалізувати арифметичні операції за умови, що нечіткі множини є нечіткими числами, тобто задані на універсумі, який є підмножиною або всією множиною дійсних чисел R. Тобто, якщо fA_1 з індикаторною функцією $I_{fA_1}\left(u_1\right)$, $u_1\in U$, $U\subset \mathrm{R}$ та fA_2 з індикаторною функцією $I_{fA_2}\left(u_2\right)$, $u_2\in U$, $U\subset \mathrm{R}$ – нечіткі числа, то математична формалізація арифметичних операцій загалом має вид

$$fR=fA_1\times fA_2\to fA_3,$$

де fA_3 з $I_{fA_3}\left(u_3\right)$, $u_3\in U$, $U\subset \mathrm{R}$; і зокрема:

$$fA_1+fA_2=fA_3^{+},\ I_{fA_3^{+}}\left(u_3\right)=\max_{\left\{\left(u_1,u_2\right)\in fR=fA_1\times fA_2:\ u_1+u_2=u_3\right\}}\left\{I_{fA_1}\left(u_1\right)\cdot I_{fA_2}\left(u_2\right)\right\};$$

$$fA_1-fA_2=fA_3^{-},\ I_{fA_3^{-}}\left(u_3\right)=\max_{\left\{\left(u_1,u_2\right)\in fR=fA_1\times fA_2:\ u_1-u_2=u_3\right\}}\left\{I_{fA_1}\left(u_1\right)\cdot I_{fA_2}\left(u_2\right)\right\};$$

$$fA_1\cdot fA_2=fA_3^{\bullet},\ I_{fA_3^{\bullet}}\left(u_3\right)=\max_{\left\{\left(u_1,u_2\right)\in fR=fA_1\times fA_2:\ u_1\cdot u_2=u_3\right\}}\left\{I_{fA_1}\left(u_1\right)\cdot I_{fA_2}\left(u_2\right)\right\};$$

$$fA_1/fA_2=fA_3^{/},\ I_{fA_3^{/}}\left(u_3\right)=\max_{\left\{\left(u_1,u_2\right)\in fR=fA_1\times fA_2:\ u_1/u_2=u_3\right\}}\left\{I_{fA_1}\left(u_1\right)\cdot I_{fA_2}\left(u_2\right)\right\}.$$

Окрім цього важливе місце при розробці f-систем займає поняття – функціонального відображення між нечіткими множинами fA_1 з індикаторною функцією $I_{fA_1}\left(u_1\right)$, $fA_1\subset U_1$, $u_1\in U_1$ та fA_2 з індикаторною функцією $I_{fA_2}\left(u_2\right)$, $fA_2\subset U_2$, $u_2\in U_2$; яке може бути математично формалізоване за допомогою поняття нечіткого відношення у вигляді

$$fA_2=g\left(fA_1\right),$$

де g – функціональне відображення, яке представляє собою один із видів нечіткого бінарного відношення fR заданого на $U_1\times U_2$.

Зв’язок між індикаторними функціями нечітких множин fA_1 та fA_2 математично формалізується

$$I_{fA_2=g\left(fA_1\right)}\left(u_2\right)=\sup_{u_1}\hat{g}\left(I_{fA_1}\left(u_1\right),I_{fR}\left(u_1,u_2\right)\right),$$

де $\hat{g}$ – один із видів операції перетину, $I_{fA_1}\left(u_1\right)$ – індикаторна функція нечіткої множини fA_1, $I_{fR}\left(u_1,u_2\right)$ – індикаторна функція нечіткого бінарного відношення fR, $fR\subset U_1\times U_2$.

У випадку, коли g є звичайним функціональним відображенням від однієї змінної, тобто

$$I_{fR}\left(u_1,u_2\right)=\begin{cases}1, & \text{ÿêù î}\quad u_2=g\left(u_1\right),\\ 0, & \text{ÿêù î}\quad u_2\neq g\left(u_1\right),\end{cases}$$

то діє принцип узагальнення Л.Заде

$$I_{fA_2=g\left(fA_1\right)}\left(u_2\right)=\sup_{u_1\in g^{-1}\left(u_2\right)}I_{fA_1}\left(u_1\right).$$

Нечіткі бінарні відношення та зокрема функціональні відображення нечітких множин, їх композиція є також основою математичного формалізму інтелектуалізованих f-систем. Саме в інтелектуалізованих f-системах використовуються нечіткі імплікації $fA_1\to fA_2$, які математично формалізуються різним чином. Зокрема до найвідоміших відносяться нечіткі імплікації:

- нечітка імплікація Larsen

$$I_{fA_1\to fA_2}\left(u_1,u_2\right)=I_{fA_1}\left(u_1\right)\cdot I_{fA_2}\left(u_2\right);$$

- нечітка імплікація Mamdani

$$I_{fA_1 \to fA_2}(u_1, u_2) = \min\left\{ I_{fA_1}(u_1),\ I_{fA_2}(u_2) \right\};$$

- нечітка імплікація Лукасевича

$$I_{fA_1 \to fA_2}(u_1, u_2) = \min\left\{ 1,\ 1 - I_{fA_1}(u_1) + I_{fA_2}(u_2) \right\}.$$

За допомогою цих імплікацій та $\max-\min$ композиції отримується нечітка множина висновків fA_2', що відповідають нечіткій множині fA_1', а саме

$$fA_2' = fA_1' \circ \left(fA_1 \to fA_2 \right),$$

де $I_{fA_2'}(u_2) = \max\limits_{u_1} \min\left\{ I_{fA_1'}(u_1), I_{fA_1 \to fA_2}(u_1, u_2) \right\}$.

У випадках, коли потрібно отримати на виході інтелектуалізованих f-систем чіткий висновок, то використовується дефаззифікації (defuzzification) нечіткого висновку за допомогою одного з виразів:

- якщо індикаторна функція $I_{fA_2'}(u)$ нечіткого висновку fA_2' має один максимум, то із множини елементів $\left\{ u:\ \ u \in fA_2',\ \ u \in U \right\}$ вибирається такий елемент $\hat{u}$, щоб

$$\max I_{fA_2'}(u) = I_{fA_2'}(\hat{u});$$

- якщо індикаторна функція $I_{fA_2'}(u)$ нечіткого висновку fA_2' має більше ніж один максимум, то використовуються:

- метод центру тяжіння $\hat{u} = \int\limits_{\inf\{u\}}^{\sup\{u\}} u \cdot I_{fA_2'}(u)\,du \Bigg/ \int\limits_{\inf\{u\}}^{\sup\{u\}} I_{fA_2'}(u)\,du$,

- метод медіани. Вибирається $\hat{u}$, щоб $\int\limits_{\inf\{u\}}^{\hat{u}} I_{fA_2'}(u)\,du = \int\limits_{\hat{u}}^{\sup\{u\}} I_{fA_2'}(u)\,du$,

- метод центра максимумів $\hat{u} = \int\limits_{\tilde{U}} \tilde{u}\,d\tilde{u} \Bigg/ \int\limits_{\tilde{U}} d\tilde{u}$,

де $\tilde{U}$ – множина всіх елементів з інтервалу $\left[\inf\{u\}, \sup\{u\} \right]$, що мають максимальну степінь належності нечіткому висновку fA_2'.

Наведений огляд математичного формалізму представляє основні моменти теорії нечітких множин, нечітких алгебр та нечіткої логіки, що лежать в основі розробки всіх f-систем у сфері інформаційних технологій.

Висновок. Проведено аналіз математичного забезпечення, яке використовується в роботі f-систем, що дало можливість встановити сучасні можливості f-систем при розв’язуванні задач у сфері інформаційних технологій.

1. Zadeh. L.A. Fuzzy sets. Information and Control, 1965, v.8, P.338-353.
2. Рыжов А.П. Элементы теории нечетких множеств и ее приложений. М.: Изд-во МГУ, 2003, 81с.
3. Мациевский С.В. Нечеткие множества: Учебное пособие. Калининград.: Изд-во КГУ, 2004, 176с.
4. Рыжов А.П. Об одном методе оптимального описания объектов и ситуацій в интелектуальных системах. Создание и приминение гибридных экспертных систем: Тезисы докладов Всесоюзной конференции.- Рига, 1990.-С.62-64.
5. Рыжов А.П. О степени нечеткости зазмытых характеристик. Математическая кібернетика и ее приложения в биологии. Под ред. Л.В.Крушинского, С.В.Яблонского, О.Б.Лупанова. М.: Изд-во МГУ, 1987.- С.60-77.

© *О.А.Пастух*