УДК 515.2
С.І.Пустюльга, В.П.Самчук, Ю.В.Клак
Луцький національний технічний університет

ВИКОРИСТАННЯ МУЛЬТИПЛІКАЦІЇ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНИХ КРИВИХ ДЛЯ ПОБУДОВИ МОДЕЛЕЙ РОБОЧИХ ПРОЦЕСІВ ДВИГУНІВ

Робота присвячена аналізу вихідних умов та розробці алгоритмів дискретної інтерполяції точкових множин, які адекватно відображають результати експериментальних досліджень робочих процесів двигунів та базуються на мультиплікації базових геометричних образів.

Ключові слова: дискретна інтерполяція, скінченно-різницеве рівняння, апроксимація, мультиплікація.

Постановка проблеми. Дослідження показників двигунів, які переобладнуються на інші види палива, супроводжується побудовою індикаторних діаграм та графіків різноманітних залежностей, на основі яких проводиться аналіз результатів та оцінка відповідності математичної моделі отриманим експериментальним даним.

Показники, які відображають залежності між параметрами робочого процесу двигуна [1], наприклад, між тиском та тривалістю початкової фази згоряння при різних значеннях ступеня стискання чи залежності отримані з експериментальної навантажувальної характеристики ефективних показників двигуна, можуть мати яскраво виражений осцилюючий характер відносно уявної прямої чи криволінійної осі, рівновіддалених від отриманих експериментально значень. Використання степеневих поліномів для інтерполяції таких даних приводить до значних розбіжностей між результатами математичної моделі та експерименту, оскільки низький порядок інтерполяційного поліному не може адекватно відобразити результати проведеного експерименту, а штучне збільшення порядку спричиняє зайві осциляції, які не зумовлені поведінкою динамічної системи.

Для адекватної інтерполяції числової інформації експерименту слід використовувати гнучкі математичні алгоритми, які дають можливість оперативно адаптуватись до змінного характеру отриманих експериментальних даних. Саме розробка методів дискретної інтерполяції, у яких передбачена робота з дискретними аналогами як степеневих, так і трансцендентних функцій дозволить отримати якісно нові результати моделювання.

Аналіз останніх досліджень. В публікаціях [2, 3] розроблено основи підходу до дискретного геометричного моделювання хвилястих кривих та запропоновано алгоритми дискретної інтерполяції точкових множин, які мають синусно-косинусний характер.

В роботі [4] було розширено сферу використання дискретної інтерполяції за рахунок розроблених алгоритмів формування хвилястих кривих на основі принципу суперпозиції вихідних одновимірних образів.

Однак, не достатньо дослідженою залишається проблема дискретної інтерполяції числових даних, отриманих експериментальним шляхом, яка дозволить описувати моделі кривих ліній, що адекватно відображають характер робочих процесів двигунів.

Мета роботи. Проаналізувати вихідні умови та розробити алгоритми дискретної інтерполяції точкових множин, що базуються на мультиплікації базових геометричних образів процесу формоутворення.

Основна частина. В роботі [3] було доведено, що дискретно представлені періодичні криві описуються системами скінчено-різницевих рівнянь статико-геометричного методу виду:

$$y_{i-1} - 2\alpha\, y_i + y_{i+1} = -k\, P_i\,, \qquad 0 < i < n\,, \tag{1}$$

де y_i – ординати вузлів дискретно представленої кривої; α – параметр, який впливає на тип модельованої кривої; k – коефіцієнт пропорційності, який для спрощення в усіх формулах приймаємо рівним одиниці; P_i – функція узагальненого формоутворюючого навантаження.

Щоб побудувати дискретну модель кривої певного класу з врахуванням попередньо заданих вимог, складається система лінійних рівнянь (1). Тип кривої визначається або функцією зовнішнього формоутворюючого навантаження, або відповідним значенням коефіцієнта α обчислювального шаблону.

Вирішення задач побудови моделей робочих процесів двигунів вимагає формування періодичних кривих, амплітуда яких змінюється за певним, попередньо заданим законом. В такому випадку доцільно використати операцію мультиплікації. Вона дозволяє отримати модель кривої шляхом перемноження координат гармонічної кривої на координати іншої кривої, що характеризує зміну амплітуди гармоніки. Друга крива у відношенні до першої (базової) виступає кривою масштабних множників. Геометричний зміст її полягає в тому, що кожна точка представляє коефіцієнт масштабування відповідної координати першої кривої.

Побудова аналогічної моделі на основі механічного перемноження координат двох кривих описаних окремими алгоритмами формоутворення чи на основі використання складних функцій зовнішнього навантаження ускладнює модель і не дозволяє досягнути бажаного результату.

Відповідно до комутативної властивості дії множення двох величин, обидві криві в якості мультиплікаторів виступають як рівноправні. Можна вважати, що ординати другої кривої виступають масштабними множниками для відповідних ординат першої, або навпаки.

Мультиплікація координат різних типів дискретних моделей кривих, що описуються системами рівнянь виду (1) в загальному випадку, виражається у вигляді:

$$y_i = y1_i \cdot y2_i \times \ldots \times yn_i, \tag{2}$$

де $y1_i$, $y2_i$, …, yn_i – ординати вузлів вихідних кривих.

Нехай дві криві, принаймні одна з яких періодична, описуються системами скінчено-різницевих рівнянь виду (1) з однорідними граничними умовами, причому $\alpha \neq 0$:

$$y1_{i-1} - 2\alpha_1 y1_i + y1_{i+1} = 0, \qquad 0 < i < n, \tag{3}$$

$$y2_{i-1} - 2\alpha_2 y2_i + y2_{i+1} = 0, \qquad 0 < i < n. \tag{4}$$

Побудуємо іншу систему скінчено-різницевих рівнянь, яка включає розв’язки систем (3) та (4) і задовольняє добутку розв’язків (2). Отримане загальне рівняння системи буде мати 4-й порядок і дозволить визначити граничні умови моделі.

Для визначення граничних умов розглядається два варіанта рівнянь (3) та (4) – після зміщення індекса на одиницю вперед та назад.

Перший варіант – виконується зміщення вперед:

$$y1_i - 2\alpha_1 y1_{i+1} + y1_{i+2} = 0,\ 0 < i < n-2, \tag{5}$$

$$y2_i - 2\alpha_2 y2_{i+1} + y2_{i+2} = 0,\ 0 < i < n-2. \tag{6}$$

Перетворивши вираз (2), відповідно до (5) та (6), отримаємо:

$$y_{i+1} = y1_{i+1} \cdot y2_{i+1}, \tag{7}$$

$$y_{i+2} = y1_{i+2} \cdot y2_{i+2}. \tag{8}$$

Підставивши в (8) вирази для $y1_{i+2}$ та $y2_{i+2}$ з (5) та (6), отримаємо:

$$y_i + 4\alpha_1\alpha_2 y_{i+1} - y_{i+2} = 2\alpha_2 y1_i y2_{i+1} + 2\alpha_1 y1_{i+1} y2_i. \tag{9}$$

Двічі виконавши операцію збільшення індекса рівняння (9) на одиницю і підстановку з (5) та (6) виразів для $y1_{i+2}$ та $y2_{i+2}$, отримаємо:

$$\begin{aligned} &8\alpha_1\alpha_2 y_{i+1} + \left(1 - 4\alpha_1^2 - 4\alpha_2^2\right) y_{i+2} + 4\alpha_1\alpha_2 y_{i+3} - y_{i+4} = \\ &= 2\alpha_2 y1_i y2_{i+1} + 2\alpha_1 y1_{i+1} y2_i \end{aligned}. \tag{10}$$

В результаті проведених операцій, рівняння (9) та (10) отримали однакові праві частини. Віднявши від (9) рівняння (10), та відцентрувавши індекси, отримаємо:

$$y_{i-2} - 4\alpha_1\alpha_2 y_{i-1} + 2\left(2\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 - 1\right) y_i - 4\alpha_1\alpha_2 y_{i+1} + y_{i+2} = 0. \tag{11}$$

Рівняння (11) являє собою скінченно-різницеве рівняння 4-го порядку, якому задовольняє добуток розв’язків рівнянь (3) та (4).

До рівняння (11), в загальному випадку, можна ставити довільні граничні умови, але тоді воно не розпадеться на два вихідних (3) та (4), і представлятиме добуток двох інших рівнянь.

Якщо потрібно, щоб рівняння (11) представляло результат добутку рівнянь (3) та (4), тоді до нього слід вивести відповідні граничні умови які формуються числовими даними експерименту.

Оскільки обидві вихідні криві моделюються за рахунок зміни параметра α і під дією навантаження, яке рівне нулю, то крайові умови доцільно привести до однорідних. Розглянемо випадок, коли в двох вихідних дискретних кривих (3) та (4) ординати крайніх та сусідніх точок пропорційні:

$$y1_0 = a_0 y1_1, \qquad y2_0 = b_0 y2_1, \tag{12}$$

$$y1_n = a_n y1_{n-1}, \qquad y2_n = b_n y2_{n-1}, \tag{13}$$

де a_0, a_n, b_0, b_n – довільні коефіцієнти пропорційності.

Визначимо дві граничні умови на лівому краю кривої.

При $i = 0$, перша умова отримується з рівняння (9) після підстановки в нього (12) та врахування (2), і зв’язує три точки з індексами 0, 1 та 2:

$$y_0 + \left(4\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_2 a_0 - 2\alpha_1 b_0\right) y_1 - y_2 = 0. \tag{14}$$

Друга умова визначається з рівняння (10) і зв’язує три послідовні точки з індексами 1, 2 та 3:

$$\left(1 - 4\alpha_1^2 - 4\alpha_2^2 + 2\alpha_1 a_0 + 2\alpha_2 b_0\right) y_1 + 4\alpha_1\alpha_2 y_2 - y_3 = 0. \tag{15}$$

Для визначення граничних умов на правому краю кривої, розглядається інший варіант рівнянь (3) та (4) – після зміщення індексу назад:

$$y1_{i-2} - 2\alpha_1 y1_{i-1} + y1_i = 0, \qquad 2 < i < n, \tag{16}$$

$$y2_{i-2} - 2\alpha_2 y2_{i-1} + y2_i = 0, \qquad 2 < i < n. \tag{17}$$

Виконавши з (16) та (17) перетворення аналогічні до (7) – (11), отримаємо рівняння за допомогою яких виводяться дві граничні умови справа.

При $i = n$, перша та друга умови мають вигляд:

$$y_n + \left(4\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_2 a_0 - 2\alpha_1 b_0\right) y_{n-1} - y_{n-2} = 0, \tag{18}$$

$$\left(1 - 4\alpha_1^2 - 4\alpha_2^2 + 2\alpha_1 a_n + 2\alpha_2 b_n\right) y_{n-1} + 4\alpha_1\alpha_2 y_{n-2} - y_{n-3} = 0. \tag{19}$$

Отже, якщо дискретна крива описується системою скінчено-різницевих рівнянь 4-го порядку (11) і граничні умови задовольняють рівнянням (14), (15), (18) та (19), тоді така модель є результатом мультиплікації координат точок двох дискретно представлених кривих, які описуються рівняннями (3) та (4) з граничними умовами (12) та (13).

Коефіцієнти скінчено-різницевого рівняння (11) можна представити у вигляді обчислювального шаблону (рис. 1) для більш загального випадку, коли вихідні рівняння (3) та (4) формують не тільки степеневі функції, але і тригонометричні чи гіперболічні [2].

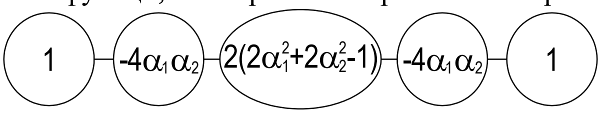

Рис. 1. Обчислювальний шаблон мультиплікації двох дискретно представлених функцій в загальному випадку

Якщо одне з вихідних рівнянь формує модель тригонометричної чи гіперболічної функції, а інше – степеневої, тоді, $\alpha = \alpha_1 \neq 1$, $\alpha_2 = 1$, а обчислювальний шаблон набуде вигляду (рис. 2).

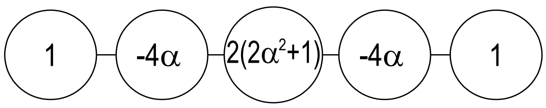

Рис. 2. Обчислювальний шаблон мультиплікації двох дискретно представлених функцій, степеневої та тригонометричної

У випадку, коли розглядається мультиплікація двох дискретно представлених степеневих функцій ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$), обчислювальний шаблон набуде відомого вигляду (рис. 3):

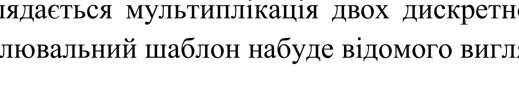

Рис. 3 Обчислювальний шаблон мультиплікації двох дискретно представлених степеневих функцій

Висновки. В даній роботі для побудови моделей робочих процесів двигунів запропоновано алгоритм дискретної інтерполяції точкових множин періодичного характеру в основу якого покладено операцію мультиплікації базових геометричних образів процесу формоутворення.

Отримано обчислювальні шаблони для формування систем скінчено-різницевих рівнянь, що описують періодичні криві, амплітуда яких може змінюватись за заданим законом.

Запропонована методика дозволяє швидко та ефективно формувати хвилясті криві зі змінною амплітудою, і може бути використана в прикладних задач моделювання для дискретної інтерполяції експериментальних даних, які мають періодичний або осцилюючий характер.

1. Глаголев Н.М. Рабочие процессы в двигателях внутреннего сгорания. – К.: Машгиз, 1951. – 481с.
2. Пустюльга С.І., Самчук В.П. Формоутворення дискретно поданих кривих під навантаженням, що залежить від метричних параметрів кривих // Прикладна геометрія та інженерна графіка. - К.: КНУБА. – 2003. - Вип. 72. – С. 178-182.
3. Самчук В.П. Дискретне представлення періодичних кривих на основі статико-геометричного методу // Прикладна геометрія та інженерна графіка. - К.: КНУБА. – 2004. - Вип. 74.
4. Пустюльга С.І., Самчук В.П. Моделювання хвилястих дискретно представлених кривих на основі принципу суперпозиції // Прикладна геометрія та інженерна графіка. К.: КНУБА. – 2009. Вип. 82. – С. 197 - 203.