УДК 517.962.2:519.651
Л.С.Бойко, О.Ю.Ройко
Луцький національний технічний університет

МЕТОДИКА АПРОКСИМАЦІЇ КРИВИХ ЗАЛЕЖНО ВІД ЗНАЧЕННЯ РАДІУСУ КРИВИНИ У ВИБРАНИХ ТОЧКАХ

Пропонується методика апроксимації кривих залежно від радіусу кривини у вибраних точках, а також дається оцінка точності такого типу апроксимації.

Ключові слова: *апроксимація, радіус кривини, ланцюгова лінія.*

Постановка проблеми. При апроксимації кривої ламаною важливе значення має вибір величини кроку дискретизації. Можна використовувати два варіанти розбиття проміжку на якому апроксимується крива – із рівномірним або нерівномірним кроком. Кожен з цих варіантів має свої переваги та недоліки. Апроксимація із застосуванням рівномірного кроку не викликає значних труднощів, однак результуюча ламана може не завжди точно апроксимувати вихідну криву. З іншої сторони процес розбиття певного проміжку з нерівномірним кроком може бути досить складним, оскільки при визначенні кожного наступного кроку повинні враховуватись геометричні параметри кривої, проте результат в цілому буде більш точним ніж у першому випадку. В даній роботі розглядається процес загущення кроку дискретизації на певних ділянках кривої залежно від значення радіусу кривини.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. При апроксимації складних геометричних об'єктів найбільш природно обирати рівномірний крок дискретизації. Це питання розглядається зокрема в роботі [1]. Проте такий спосіб розбиття не єдиний, і до того ж не завжди раціональний. У роботі [2] наведена методика розбиття, яка базується на умові, що значення кута між сусідніми дотичними має залишатись сталим, у результаті чого досягається рівномірність апроксимації.

Основна частина. Розглянемо ланцюгову лінію $y(x) = a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$ при $a = 2$, яку апроксимуватимемо ламаною на проміжку $[-5;5]$.

Розіб'ємо даний проміжок на десять частин з кроком $H = 1$. Кожну з ділянок $[x_i; x_{i+1}]$ розділимо на певну кількість проміжків залежно від значення радіусу кривини у вузлі x_i, $x_i \in -5..5, i \in 0..10$. У вузлах x_i значення радіусу кривини визначимо за формулою

$$r_i = \frac{1}{y''(x_i)} \tag{1}$$

Значення радіуса кривини ланцюгової лінії отримаємо з виразу (2).

$$r_i = \frac{y_i^2}{a}, \tag{2}$$

де $y_i = y(x_i)$, $i \in 0..10$.

Кількість проміжків p_i, на які потрібно розбити відрізок $[x_{i-1}; x_i]$ визначимо за формулою

$$p_i = \ln\frac{K \cdot R}{r_i}, \tag{3}$$

де $i \in 1..10$ $R = \max(r_i)$, K - коефіцієнт пропорційності, від якого залежить точність апроксимації, $K \in Z$. Чим вище значення K, тим більшою буде кількість проміжків, на які розбивається відрізок $[x_{i-1}; x_i]$. В даному випадку $K = 1$. Значення p_i необхідно заокруглювати до цілих, тобто $p_i \in Z$. Врахуємо, що ланцюгова лінія симетрична відносно очі ординат, тому p_i визначаємо при $i \in 0..5$. При $i \in 6..10$ $p_i = p_{11-i}$.

Тепер ми можемо розбити відрізки $[x_{i-1}; x_i]$ на відповідну кількість проміжків p_i. Величина h_i кроку становить

$$h_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{p_i} = \frac{H}{p_i} = \frac{1}{p_i} \quad (4)$$

Визначаємо значення функції $y_j = y\left(x_j\right)$, де $x_j = x_{i-1} + P \cdot h_i$, $P \in 1..p_i$, $j \in 0..\sum p_i$, $i \in 1..10$. Результати обчислень зводимо у таблицю та будуємо графік.

Таблиця 1

Уточнення координат вузлів ланцюгової лінії

i	x_i	y_i	r_i	p_i	h_i	j	x_j	y_j	j	x_j	y_j	j	x_j	y_j
0	-5	12,265	75,21	-	-	0	-5	12,265	11	-0,5	2,063	22	2,667	4,056
1	-4	7,524	28,308	1	1	1	-4	7,524	12	-0,25	2,016	23	3	4,705
2	-3	4,705	11,068	2	0,5	2	-3,5	5,928	13	0	2	24	3,5	5,928
3	-2	3,086	4,762	3	0,333	3	-3	4,705	14	0,25	2,016	25	4	7,524
4	-1	2,255	2,543	3	0,333	4	-2,667	4,056	15	0,5	2,063	26	5	12,265
5	0	2	2	4	0,25	5	-2,333	3,522	16	0,75	2,142			
6	1	2,255	2,543	4	0,25	6	-2	3,086	17	1	2,255			
7	2	3,086	4,762	3	0,333	7	-1,667	2,735	18	1,333	2,461			
8	3	4,705	11,068	3	0,333	8	-1,333	2,461	19	1,667	2,735			
9	4	7,524	28,308	2	0,5	9	-1	2,255	20	2	3,086			
10	5	12,265	75,21	1	1	10	-0,75	2,142	21	2,333	3,522			

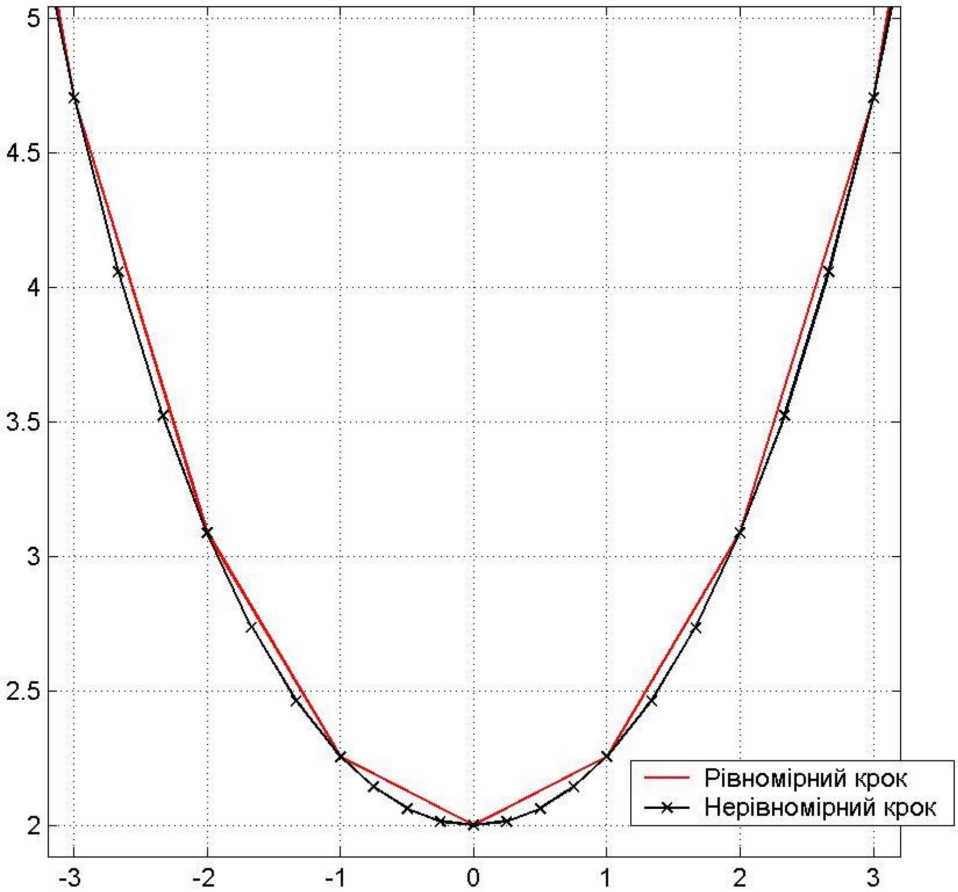

Рис.1. Графік ланцюгової лінії

Для оцінки відхилення ламаної від початкової кривої можна керуватись наступним міркуванням: величина відхилення буде тим більшою чим більше відрізняються площі криволінійної трапеції, утвореної кривою та віссю абсцис, і трапецій, утворених сегментами ламаної.

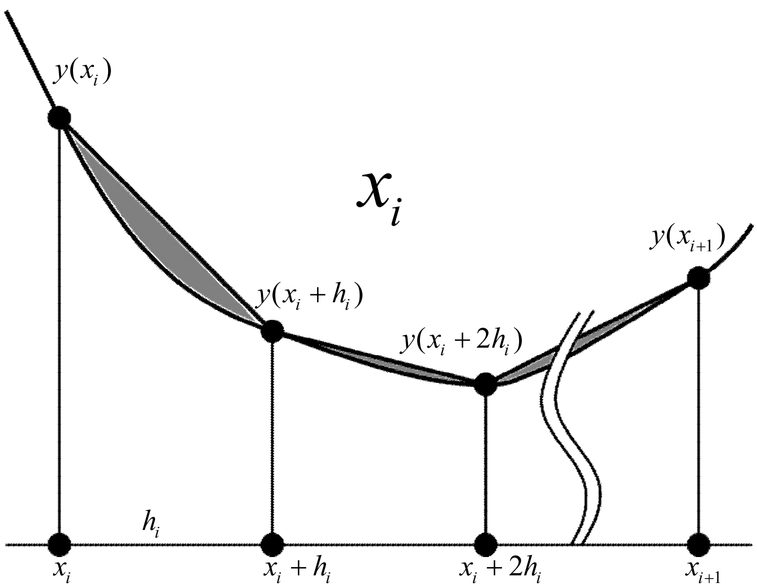

Рис.2. Оцінка точності апроксимації кривої ламаною.

Як видно з рис.2, на проміжку $[x_i, x_{i+1}]$ різниця площ може бути визначена за наступною формулою:

$$\Delta S_i = \left| \left(\frac{y(x_i) + y(x_i + h_i)}{2} h_i + \frac{y(x_i + h_i) + y(x_i + 2h_i)}{2} h_i + \ldots + \frac{y(x_i + (p_i - 1)h_i) + y(x_{i+1})}{2} h_i \right) \right| = \\ = \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} y(x)dx - \frac{1}{2} h_i \sum_{P=0}^{p_i - 1} \Big(y\big(x_i + Ph_i\big) + y\big(x_i + (P+1)h_i\big) \Big) \right| \quad (5)$$

В загальному на всьому проміжку $[x_0, x_N]$ відхилення становить:

$$\Delta S = \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} y(x)dx - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} h_i \sum_{P=0}^{p_i - 1} \Big(y\big(x_i + Ph_i\big) + y\big(x_i + (P+1)h_i\big) \Big) \right| \quad (6)$$

У нашому випадку при $N = 10$ відхилення дорівнює $\Delta S = 0,501$, що становить приблизно 1% від площі криволінійної трапеції ($S_{тр} = 48,402$). Очевидно, що при $h_i \to 0$ ($p_i \to \infty$) відхилення $\Delta S \to 0$.

З'ясуємо вплив величини коефіцієнта K з формули (3) на точність апроксимації.

Із характеру логарифмічної функції (3) можна зробити припущення, що при $K \to \infty$ $p_i \to \infty$, а отже $\Delta S \to 0$ - точність зростає. У таблиці 2 наведені значення ΔS та $\sum_i p_i$ при різних значеннях коефіцієнта K.

Таблиця 2

Вплив коефіцієнта K на точність апроксимації

K	1	2	3	4	5	10	30	50	70	100
ΔS	0,501	0,297	0,286	0,284	0,102	0,095	0,051	0,033	0,033	0,024
$\frac{\Delta S}{S_{тр}}$	0,01	0,006	0,005	0,005	0,002	0,0019	0,001	0,0006	0,0006	0,0005
$\sum_i p_i$	26	32	36	38	42	48	58	66	68	72

Як бачимо, вже при $K = 5$ і $K = 10$ різниця площ ΔS відрізняється несуттєво. Тому на практиці не варто застосовувати дуже великі значення K, щоб уникнути розбиття ламаної на велику кількість дрібних частин.

В цілому можна сформулювати наступний алгоритм загущення кроку дискретизації кривої залежно від радіусу кривини:

1. Розбиття обраного проміжку області визначення на N рівних частин.
2. Визначення радіусу кривини r_i у вузлах x_i, $i \in 0..10$ (1).
3. Визначення кількості проміжків p_i, на які розбивається відрізок $[x_{i-1}; x_i]$ (3).
4. Визначення значень функції $y_j = y\big(x_j\big)$, де $x_j = x_{i-1} + P \cdot h_i$, $P \in 1..p_i$, $j \in 0..\sum p_i$, $i \in 1..N$.
5. Оцінка точності апроксимації (6). Якщо результат апроксимації є недостатньо точним, то необхідно повторити пункти 3-5, збільшивши значення коефіцієнта K.

Висновки та перспективи. Методика, що наведена у роботі, дозволяє без значних обчислювальних потужностей апроксимувати криві ламаними, а врахування диференціальних характеристик кривої дає можливість виконувати апроксимацію з високою точністю. В перспективі дана методика може бути поширена на поверхні та образи вищих розмірностей простору, а також її допустимо застосовувати для моделювання зрівноважених сіток із нерівномірним кроком методом числових послідовностей.

1. Прикладна геометрія та інженерна графіка / [Ковальов С.М., Гумен М.С., Пустюльга С.І. та ін.]. – Луцьк: Редакційно-видавничий відділ ЛДТУ, 2006. – 256 с.
2. Пилипака С.Ф. Апроксимація катеноїда, який є згинанням відсіку гвинтового коноїда, зрізаними конусами / С.Ф. Пилипака, Л.С. Бойко. – К., 2010. – 320 с.