

УДК 514.18

Т.А.Кресан

Національний університет біоресурсів і природокористування України

### РОЗГОРТКИ ТРЬОХ ПРОЕКЦІОНОВАЛЬНИХ ЦИЛІНДРІВ, ЩО ПРОХОДЯТЬ ЧЕРЕЗ ЗАДАНУ ПРОСТОРОВУ КРИВУ

Здійснено конструювання циліндричних поверхонь, у яких напрям прямолінійних твірних паралельний одній з осей нерухомої системи координат. Побудовано розгортки проекціювальних циліндрів, що проходять через задану просторову криву. Наведено аналітичні залежності, здійснено візуалізацію отриманих результатів.

Ключові слова: циліндрична поверхня, розгортка поверхні, геодезична кривина, вектор нормалі.

Постановка проблеми. Для розв'язування задач, які стосуються внутрішньої геометрії поверхонь, доцільно використовувати рухому систему тригранника Френе вихідної кривої. Але коли в задачі ставиться умова конструювання поверхонь із заданими властивостями по відношенню до нерухомої системи координат (конструювання циліндричних поверхонь, у яких напрям прямолінійних твірних паралельний одній із осей нерухомої системи координат, конструювання торсів однакового нахилу твірних по відношенню до однієї із координатних площин тощо та побудова їх розгорток), то доцільно використовувати нерухому систему координат.

Аналіз останніх досліджень. Конструювання торса, як обвідної поверхні однопараметричної множини площин, відоме в курсі диференціальної геометрії [1]. Множина площин може бути задана довільними функціями [3], або ж може бути зв'язана із диференціальними властивостями просторової або плоскої кривої. При цьому сам торс може і не проходити через криву, з допомогою якої він конструюється [4, 5]. Його побудова за заданою кривою може здійснюватися без допомоги тригранника Френе [6], або ж з його допомогою [2,4, 5, 7].

Формулювання мети статті. Створити математичну модель конструювання циліндричних поверхонь, у яких напрям прямолінійних твірних паралельний одній із осей нерухомої системи координат, побудувати розгортки проекціювальних циліндрів, що проходять через задану просторову криву.

Основна частина. Розглянемо конструювання циліндричної поверхні, у якої твірні проходять через задану вихідну просторову криву, задану у функції довжини власної дуги  $s$ :

$$x = 0,5 \cos^2 s; \quad y = 0,5(s - \sin s \cos s); \quad z = \sin s. \quad (1)$$

Параметричні рівняння поверхні, твірні якої паралельні осі ОХ запишуться:

$$\begin{aligned} X &= 0,5 \cos^2 s + u; \\ Y &= 0,5(s - \sin s \cos s); \\ Z &= \sin s. \end{aligned} \quad (2)$$

Рівняння (2) мають дуже простий вигляд в нерухомій системі координат і мали б складний вигляд в триграннику Френе, оскільки напрямний вектор твірної в системі тригранника матиме не сталий напрям. Сама циліндрична поверхня показана на рис. 1,а, а плоска крива її ортогонального перерізу – на рис. 1,б.

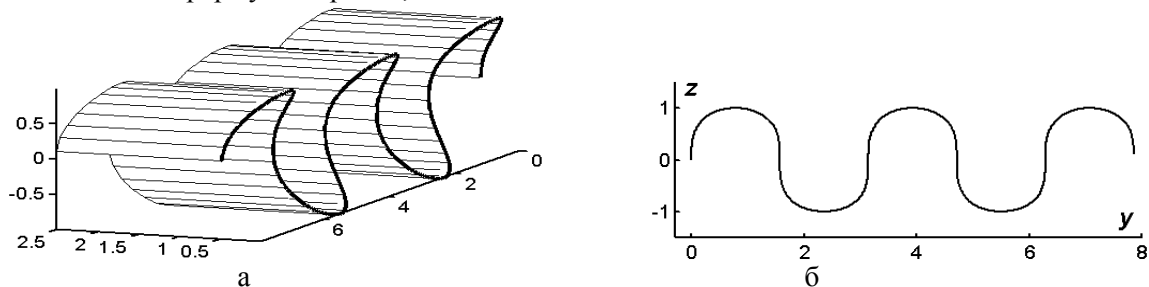


Рис. 1. Циліндрична поверхня, побудована за рівняннями (1): а) аксонометрія; б) плоска крива ортогонального перерізу.

Розгортку поверхні (2) шукатимемо наступним чином: спочатку знайдемо геодезичну кривину вихідної просторової кривої, бо вона нам потрібна для того, щоб побудувати вихідну криву на розгортці циліндра. Геодезична кривина не змінюється при згинанні поверхні, отже вона перейде на розгортці в кривину вихідної кривої. Для цього необхідно мати три вектори  $\bar{N}$ ,  $\frac{d\bar{r}}{ds}$ ,  $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$ , але якщо в системі тригранника вони описувалися дуже компактно [2], то тут буде дещо інакше. Спочатку знайдемо вектор нормалі, як векторний добуток частинних похідних рівнянь поверхні (2). Частинні похідні мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial s} &= -\sin s \cos s; & \frac{\partial X}{\partial u} &= 1; \\ \frac{\partial Y}{\partial s} &= \sin^2 s; & \frac{\partial Y}{\partial u} &= 0; \\ \frac{\partial Z}{\partial s} &= \cos s; & \frac{\partial Z}{\partial u} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Із векторного добутку знаходимо:

$$\bar{N} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X'_s & Y'_s & Z'_s \\ X'_u & Y'_u & Z'_u \end{vmatrix}, \quad \text{звідки} \quad \begin{aligned} N_x &= Y'_s Z'_u - Y'_u Z'_s = 0; \\ N_y &= -X'_s Z'_u + X'_u Z'_s = \cos s; \\ N_z &= X'_s Y'_u - X'_u Y'_s = -\sin^2 s. \end{aligned} \quad (4)$$

Нормалізувавши вектор (4) до одиничного, отримаємо:

$$\bar{N} = \left\{ 0 \quad \frac{\cos s}{\sqrt{\cos^2 + \sin^4 s}}; \quad -\frac{\sin^2 s}{\sqrt{\cos^2 + \sin^4 s}} \right\}. \quad (5)$$

Одиничний вектор  $\frac{d\bar{r}}{ds}$  кривої (1) проєкціюється на орт дотичної в системі тригранника, а на осі нерухомої системи координат проєкціями  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , причому він теж одиничний, оскільки крива задана у функції своєї дуги. Третій вектор  $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$  має проєкції  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$ . Геодезичну кривину кривої на поверхні знаходимо як мішаний добуток векторів  $\bar{N}$ ,  $\frac{d\bar{r}}{ds}$ ,  $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$ :

$$k_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\cos s}{\sqrt{\cos^2 + \sin^4 s}}; & -\frac{\sin^2 s}{\sqrt{\cos^2 + \sin^4 s}} \\ -\sin s \cos s & \sin^2 s & \cos s \\ -\cos 2s & \sin 2s & -\sin s \end{vmatrix} = -\frac{\cos 2s}{\sqrt{\cos^2 + \sin^4 s}}. \quad (6)$$

Інтегруванням виразу (6) отримаємо кут  $\alpha$ , як проміжний результат знаходження кривої за заданим її натуральним рівнянням, яким є наступний вираз:

$$\alpha = \int k_2 ds = -\int \frac{\cos 2s}{\sqrt{\cos^2 + \sin^4 s}} ds = -\text{Arctg} \frac{\sqrt{2} \sin 2s}{\sqrt{7 + \cos 4s}}. \quad (7)$$

Знаходимо рівняння вихідної кривої на розгортці циліндра:

$$\begin{aligned} x_p &= \int \cos \alpha ds = \int \cos \left( -\text{Arctg} \frac{\sqrt{2} \sin 2s}{\sqrt{7 + \cos 4s}} \right) ds = \frac{\sqrt{2}}{4} \int \sqrt{7 + \cos 4s} ds; \\ y_p &= \int \sin \alpha ds = \int \sin \left( -\text{Arctg} \frac{\sqrt{2} \sin 2s}{\sqrt{7 + \cos 4s}} \right) ds = -\int \sin s \cos s ds = \frac{\cos^2 s}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

В цілому рівняння циліндричної поверхні на розгортці запишуться:

$$X_p = \frac{\sqrt{2}}{4} \int \sqrt{7 + \cos 4s} ds; \tag{9}$$

$$Y_p = \frac{\cos^2 s}{2} + u.$$

Частинні похідні рівнянь (9) будуть:

$$\frac{\partial X_p}{\partial s} = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{7 + \cos 4s}; \quad \frac{\partial X_p}{\partial u} = 0;$$

$$\frac{\partial Y_p}{\partial s} = -\sin s \cos s; \quad \frac{\partial Y_p}{\partial u} = 1. \tag{10}$$

Виходячи із частинних похідних (3) циліндра і частинних похідних (10) його розгортки знаходимо перші квадратичні форми і бачимо, що вони однакові:

$$dS^2 = ds^2 - 2 \sin s \cos s ds du + du^2. \tag{11}$$

Отже, рівняння розгортки знайдені правильно. Щоправда, для її побудови потрібно застосовувати чисельне інтегрування. Розгортка відсіку циліндра (2) (рис. 1,а) за рівняннями (9) побудована на рис. 2.

Якщо вирізати із листового гнучкого матеріалу відсік, показаний на рис. 2, провести на ньому пряму лінію паралельно осі  $Ox$ , а потім зігнути заготовку вздовж прямолінійних твірних так, щоб пряма перетворилася в криву ортогонального перерізу циліндра (рис. 1,б), то крива, що показана на розгортці потовщеною лінією, прийме відповідну просторову форму вихідної просторової кривої на циліндрі (рис. 1,а).

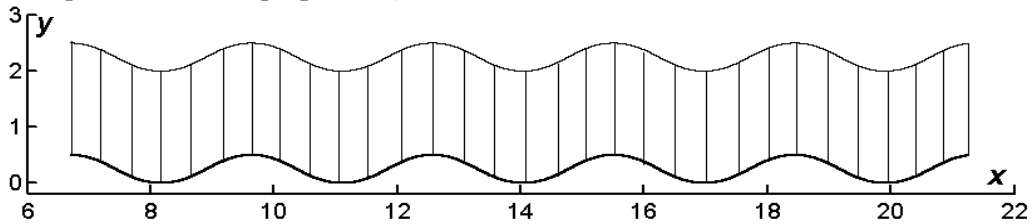


Рис. 2. Розгортка відсіку циліндра (1).

За такою схемою можна будувати розгортки циліндричних поверхонь, у яких вихідна просторова крива задана у функції довільної змінної  $t$ . При цьому є певні особливості. Розглянемо побудову розгортки циліндричної поверхні в загальному вигляді.

Нехай вихідна просторова крива, через яку проходить циліндрична поверхня, задана параметричними рівняннями:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t). \tag{12}$$

Рівняння циліндричної поверхні, що проходить через криву (12) із твірними, паралельними осі  $Ox$ , запишуться:

$$X = x + u;$$

$$Y = y;$$

$$Z = z. \tag{13}$$

Частинні похідні поверхні (13) будуть наступними:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = x'; \quad \frac{\partial X}{\partial u} = 1;$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = y'; \quad \frac{\partial Y}{\partial u} = 0;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = z'; \quad \frac{\partial Z}{\partial u} = 0. \tag{14}$$

Одиничний вектор нормалі до поверхні (13) за аналогією (4), (5) має вигляд:

$$\vec{N} \left\{ 0; \quad \frac{z'}{\sqrt{y'^2 + z'^2}}; \quad -\frac{y'}{\sqrt{y'^2 + z'^2}} \right\}. \tag{15}$$

Від одиничного вектора  $\frac{d\bar{r}}{ds}$  потрібно перейти до вектора у функції змінної  $t$ :

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} \frac{1}{s'} = \frac{1}{s'} \{x'; \quad y'; \quad z'\}. \quad (16)$$

У третьому векторі  $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$  теж переходимо до змінної  $t$ :

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\bar{r}}{ds} \right) \frac{dt}{ds} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\bar{r}}{dt} \frac{1}{s'} \right) \frac{1}{s'} = \frac{1}{s'^2} \{x''; \quad y''; \quad z''\}. \quad (17)$$

Геодезичну кривину кривої на циліндрі знайдемо як мішаний добуток трьох векторів (15), (16) і (17):

$$k_2 = \frac{1}{s'^3} \begin{vmatrix} 0; & \frac{z'}{\sqrt{y'^2 + z'^2}}; & -\frac{y'}{\sqrt{y'^2 + z'^2}} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}. \quad (18)$$

Із врахуванням того, що  $s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ , після розкриття визначника (18) одержимо:

$$k_2 = \frac{x''(y'^2 + z'^2) - x'(y'y'' + z'z'')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2} \sqrt{y'^2 + z'^2}}. \quad (19)$$

Проміжний кут  $\alpha$  (за аналогією із (7)) отримаємо інтегруванням виразу (19)  $\alpha = \int k_2 ds$ , де  $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$ . Таким чином отримуємо:

$$\alpha = \int \frac{x''(y'^2 + z'^2) - x'(y'y'' + z'z'')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2) \sqrt{y'^2 + z'^2}} dt. \quad (20)$$

Інтеграл виразу (20) існує і він має вигляд:

$$\alpha = \text{Arcsin} \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \quad \text{або} \quad \alpha = \text{Arc cos} \sqrt{\frac{y'^2 + z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}}. \quad (21)$$

В цьому можна переконатися, взявши похідну виразів (21).

Криву на розгортці циліндра знаходимо наступним інтегруванням виразів (21):

$$x_p = \int \cos \left( \text{Arc cos} \sqrt{\frac{y'^2 + z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right) ds = \int \sqrt{\frac{y'^2 + z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}} ds = \int \sqrt{y'^2 + z'^2} dt; \quad (22)$$

$$y_p = \int \sin \left( \text{Arc cos} \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \right) ds = \int x' dt = \int dx = x.$$

Із врахуванням (22) рівняння розгортки циліндричної поверхні (13) в загальному вигляді запишуться:

$$X_p = \int \sqrt{y'^2 + z'^2} dt; \quad (23)$$

$$Y_p = x + u.$$

Для поверхні (13) і для її розгортки (23) перша квадратична форма має однаковий вигляд:

$$dS^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2) dt^2 + 2x' dt du + du^2. \quad (24)$$

Це свідчить про те, що задача на знаходження розгортки в загальному вигляді розв'язана правильно. Параметричні рівняння (13) є рівняннями циліндра, у якого твірні паралельні осі  $Ox$  і відповідно (23) є рівняннями його розгортки. Однак нескладно записати рівняння циліндра, у якого твірні проходять через ту ж саму просторову криву, але паралельні іншій осі і відповідно записати відповідні рівняння розгортки, відштовхуючись від (23). Розглянемо приклад із

просторовою кривою, через яку проходять три циліндричні поверхні, і твірні яких паралельні до різних осей нерухомої системи координат.

Нехай вихідна просторова крива задана параметричними рівняннями у функції довільного параметра  $t$ :

$$\begin{aligned} x &= 2\text{Arctg}\left(\tanh\frac{t}{2}\right); \\ y &= \ln(\cosh t); \\ z &= t - \ln(\cosh t). \end{aligned} \tag{25}$$

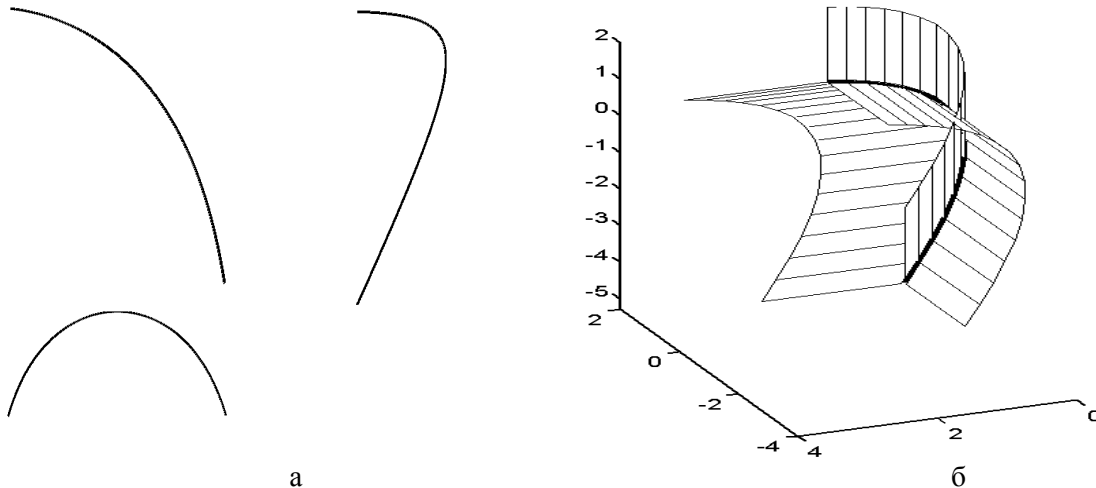


Рис. 3. Проекції просторової кривої – а) та три циліндри, що через неї проходять – б).

На рис. 3,а побудована крива (25) в проекціях. Її характерною особливістю є те, що для визначення довжини дуги відсутній вираз в елементарних функціях, тобто довжина дуги знаходиться чисельним інтегруванням, але для кожної із представлених проекцій такий вираз є, тобто для всіх трьох циліндрів, що через неї проходять (рис. 3,б), інтеграли в рівняннях розгортки (23) виражаються через елементарні функції. Наводимо рівняння цих циліндрів, у яких твірні паралельні одній із осей нерухомої системи координат:

$$\begin{aligned} X &= 2\text{Arctg}\left(\tanh\frac{t}{2}\right) + u; & X &= 2\text{Arctg}\left(\tanh\frac{t}{2}\right); & X &= 2\text{Arctg}\left(\tanh\frac{t}{2}\right); \\ Y &= \ln(\cosh t); & Y &= \ln(\cosh t) + u; & Y &= \ln(\cosh t); \\ Z &= t - \ln(\cosh t); & Z &= t - \ln(\cosh t); & Z &= t - \ln(\cosh t) + u. \end{aligned} \tag{26}$$

Щоб побудувати розгортки кожного із циліндрів (26), візьмемо перші похідні напрямної просторової кривої (25):

$$x' = \text{sech } t; \quad y' = \tanh t; \quad z' = 1 - \tanh t. \tag{27}$$

За формулами (23) із врахуванням (27) і (25) знаходимо параметричні рівняння розгортки циліндра, твірні якого паралельні осі  $Ox$ :

$$\begin{aligned} X_p &= \int \sqrt{y'^2 + z'^2} dt = \int \sqrt{\tanh^2 t + (1 - \tanh t)^2} dt; \\ Y_p &= x + u = 2\text{Arctg}\left(\tanh\frac{t}{2}\right) + u. \end{aligned} \tag{28}$$

Інтеграл у першому рівнянні (28) існує, однак має дуже громіздкий вигляд, тому ми його не наводимо. Параметричні рівняння розгортки циліндра, твірні якого паралельні осі  $Oy$ , мають вигляд:

$$\begin{aligned} X_p &= \int \sqrt{x'^2 + z'^2} dt = \ln \frac{2 - \sqrt{2 - 2 \tanh t}}{2 + \sqrt{2 - 2 \tanh t}}; \\ Y_p &= y + u = \ln(\cosh t) + u. \end{aligned} \tag{29}$$

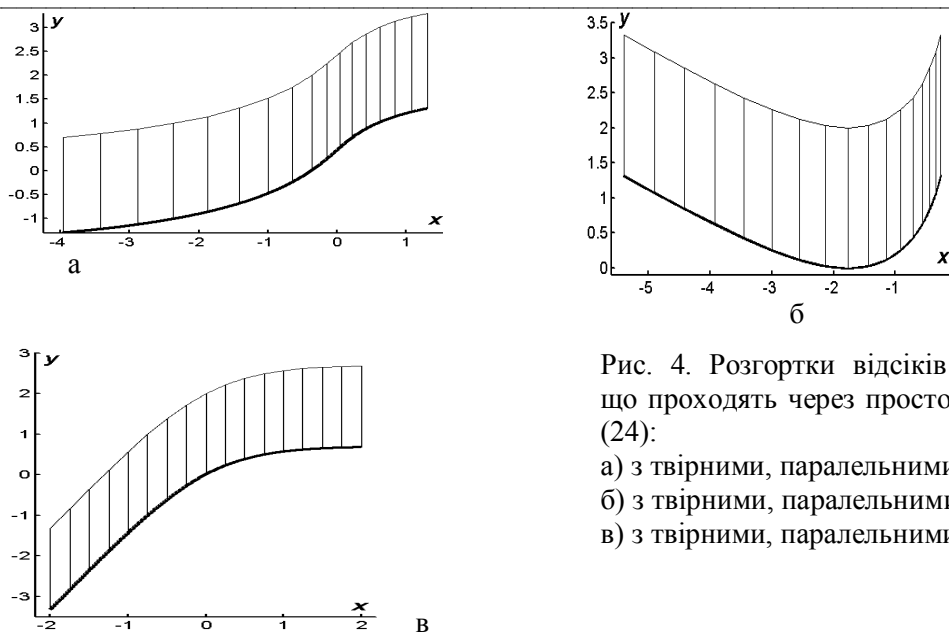


Рис. 4. Розгортки відсіків циліндрів, що проходять через просторову криву (24):

- а) з твірними, паралельними осі  $Ox$ ;  
 б) з твірними, паралельними осі  $Oy$ ;  
 в) з твірними, паралельними осі  $Oz$ .

І, нарешті, знаходимо розгортку циліндра, у якого твірні паралельні осі  $Oz$ :

$$X_p = \int \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = t; \quad (30)$$

$$Y_p = z + u = t - \ln(\cosh t) + u.$$

На рис. 4 за рівняннями (28), (29) і (30) побудовано розгортки відсіків циліндрів, що проходять через просторову криву (25) і зображені на рис. 3,б. Якщо із листового матеріалу (наприклад, паперу), вирізати заготовки за знайденим контуром, а потім кожну із них зігнути вздовж прямолінійних твірних так, щоб потовщена лінія в просторі збіглася в одну, то ми отримаємо модель, зображену на рис. 3,б.

Висновки. Побудовано розгортки проєкціювальних циліндрів, що проходять через дану напрямну криву, яка задана у функції довжини власної дуги та у функції довільного параметра. Рівність першої квадратичної форми для поверхонь та їх розгорток підтверджує достовірність отриманих результатів.

1. Милинский В.И. Дифференциальная геометрия / В.И. Милинский. – Л.: Кубуч, 1934. –332 с.
2. Кресан Т.А. Конструювання тора, що проходить через задану просторову криву / Т.А. Кресан // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. –Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка. –Том 46. –Мелітополь: ТДАТУ, 2010. – С.14 2 – 149.
3. Пилипака С.Ф. Утворення однопараметричної множини положень площини при додаванні її обертальних рухів / С.Ф. Пилипака, Т.А. Кресан // Прикл. геометрія та інж. графіка. –К.: КНУБА, 2009. –Вип. 82. –С. 32-41.
4. Пилипака С.Ф. Конструювання полярного тора кривої укусу та побудова його розгортки / С.Ф. Пилипака, Т.А. Кресан // Прикл. геометрія та інж. графіка. –К.: КНУБА, 2010. –Вип. 85. –С. 93-101.
5. Пилипака С.Ф. Торс, як обвідна поверхня множини положень площини, закріпленої в системі супровідного тригранника плоскої кривої / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. –Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка. –Том 41. –Мелітополь: ТДАТУ, 2008. – С. 26 – 36.
6. Пилипака С.Ф. Конструювання торсів однакового нахилу твірних, як обвідної поверхні однопараметричної множини площин / С.Ф. Пилипака, Г.В. Білоног // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2007. – Вип. 77. – С. 47 – 53.
7. Пилипака С.Ф. Конструювання розгортних поверхонь в системі супровідного тригранника Френе напрямної кривої та побудова їх розгорток / С.Ф. Пилипака // Прикл. геометрія та інж. графіка. –К.: КДТУБА, 1997. -Вип.62. -С.74-77.