УДК 514.18

В.М.Бабка,Т.С.Пилипака
Національний університет біоресурсів і природокористування України

РУХ ВІДРІЗКА У ПЛОЩИНІ ІЗ РІВНИМИ ШВИДКОСТЯМИ ЙОГО КІНЦІВ

Розглянуто рух відрізка за умови, що швидкості його кінців рівні. Закон переміщення відрізка у площині задається аналітично. Чисельним інтегруванням побудовано траєкторії руху кінців відрізка.

Ключові слова: *швидкість, траєкторія, натуральне рівняння, тригранник Френе.*

Постановка проблеми. Дослідження кривих у системі їх супровідного тригранника дозволяє знаходити натуральні та параметричні рівняння цих кривих за наперед заданими властивостями. Наприклад, у праці [1] знайдено криву, яка за своїми кінематичними характеристиками є аналогом прямої, а саме: при однакових коефіцієнтах тертя матеріальна точка буде рухатися по них під дією сили власної ваги із однаковими сталими швидкостями (мається на увазі, що крива є ортогональним перерізом циліндра вертикальною площиною, а пряма – аналогічним перерізом похилої площини). У праці [2] досліджується такий рух відрізка, при якому його кінці рухаються із однаковими швидкостями, причому траєкторія одного кінця задана.

Аналіз останніх досліджень. Використання натуральних рівнянь кривих для одержання практичних результатів показано в згаданій праці [1], а також в праці [2]. В праці [2] розглянуто рух відрізка із сталими швидкостями переміщення його кінців для заданих найпростіших траєкторій руху одного кінця. Показано, зокрема, що при заданій траєкторії руху одного кінця задача має два розв’язки, одним із яких є поступальне переміщення відрізка по конгруентних кривих. Останні публікації робіт із прикладної геометрії показують, що цей напрям становить певний інтерес для досліджень кривих та їх властивостей.

Формулювання мети статті. Розглянути варіанти конструювання ліній у площині, по яких кінці відрізка сталої довжини рухаються із однаковими швидкостями.

Основна частина. Розглянемо супровідний тригранник Френе в точці А плоскої кривої. В системі самого тригранника задамо точку В, радіус-вектор якої позначимо через відстань ρ (рис. 1,а). Його проекції на орти $\overline{\tau}$ і $\overline{n}$ тригранника запишуться:

$$\rho_\tau = \rho_\tau(s); \qquad \rho_n = \rho_n(s). \tag{1}$$

У випадку, коли радіус-вектор $\overline{AB}$ заданий у полярній системі координат, то його проекції на осі тригранника запишуться в полярній системі координат через довжину радіус-вектора ρ і кут φ:

$$\rho_\tau = \rho\cos\varphi; \qquad \rho_n = \rho\sin\varphi. \tag{2}$$

Якщо ρ і φ є величинами сталими, то при русі тригранника по кривій (назвемо її напрямною), точка В опише певну криву. У випадку, коли вказані величини будуть змінними і залежними від довжини дуги s напрямної, тобто $\rho = \rho(s)$ і $\varphi = \varphi(s)$, то точка В перебуватиме у складному русі. У праці [3] отримано вирази для знаходження абсолютної швидкості точки В в проекціях на орти тригранника, із яких можна отримати аналітичну умову рівності швидкостей кінців відрізка через рівняння (1) і (2) та їх похідні і натуральне рівняння k=k(s) кривої, по якій рухається точка А. При описанні відносного руху точки В в системі тригранника Френе у вигляді (1) ця умова матиме наступний вигляд:

$$\left(\rho_\tau' - k\rho_n + 1\right)^2 + \left(k\rho_\tau + \rho_n'\right)^2 = 1. \tag{3}$$

Після піднесення до квадрату і спрощень рівність (3) набуває вигляду:

$$2\left(\rho_\tau' - k\rho_n\right) + \rho_\tau'^2 + \rho_n'^2 + k^2\left(\rho_\tau^2 + \rho_n^2\right) + 2k\left(\rho_\tau\rho_n' - \rho_\tau'\rho_n\right) = 0. \tag{4}$$

До рівнянь (3) або (4) входить три невідомі залежності: $\rho_\tau = \rho_\tau(s);\ \rho_n = \rho_n(s);\ k = k(s)$. Однак у цьому випадку не поставлена умова, що відрізок АВ= ρ має бути сталої довжини. Виходячи із рис. 1,а, цю умову можна записати наступним чином:

$$\sqrt{\rho_\tau^2 + \rho_n^2} = \rho^2 \quad \text{звідки} \quad \rho_\tau = \sqrt{\rho^2 - \rho_n^2}. \tag{5}$$

Диференціюємо другий вираз із(5) і отримаємо:

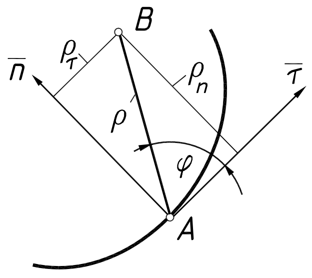
$$\frac{d\rho_\tau}{ds} = -\frac{\rho_n \rho_n'}{\sqrt{\rho^2 - \rho_n^2}}. \tag{6}$$

Підстановка другого виразу (5) і виразу (6) у (3) приводить до диференціального рівняння з однією невідомою функцією $\rho_n = \rho_n(s)$ (при заданій залежності k=k(s)):

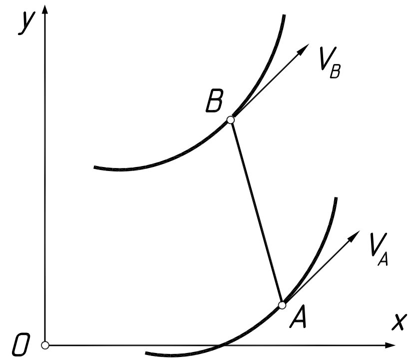
$$\left(1 - k\rho_n - \frac{\rho_n \rho_n'}{\sqrt{\rho^2 - \rho_n^2}}\right)^2 + \left(k\sqrt{\rho^2 - \rho_n^2} + \rho_n'\right)^2 = 1. \tag{7}$$

Рівняння (7) є громіздким. Проте якщо підставити в нього із (2) другий вираз та його похідну, то воно значно спроститься і запишеться у компактному вигляді:

$$\rho(k + \varphi')\left[\rho(k + \varphi') - 2\sin\varphi\right] = 0. \tag{8}$$



а



б

Рис. 1. До знаходження абсолютної траєкторії точки В:
а) положення точки В в системі тригранника Френе (бінормаль $\overline{b}$ проекціюється в точку);
б) відрізок АВ здійснює поступальний рух по конгруентних кривих.

Оскільки $\rho \neq 0$, то у (8) можливі два випадки: нулю дорівнюють вирази у круглих або квадратних дужках. Рівність нулю виразу у круглих дужках дає результат, згідно якого відрізок АВ рухається поступально і його кінці описують конгруентні криві (рис. 1,б). В загальному випадку із рівності нулю квадратних дужок (8) одержуємо диференціальне рівняння першого порядку:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{2}{\rho}\sin\varphi - k. \tag{9}$$

До рівняння (9) входить дві невідомі функції: φ=φ(s) і k=k(s) (ρ=АВ – стала величина). Щоб його розв'язати, необхідно одну залежність задати. В праці [2] розглянуто випадки, коли k=0 (траєкторія точки А пряма) і k=const (траєкторія точки А коло). Варто зауважити, що перехід від декартової до полярної системи значно спрощує диференціальне рівняння руху відрізка сталої довжини, про що свідчать вирази (7) і (8).

Розв'язком рівняння (9) при k=const, який отримуємо за допомогою системи символьної математики програмного продукту „Mathematica", є закономірність зміни кута φ=φ(s), яким описується поворот відрізка АВ в системі тригранника навколо його вершини:

$$\varphi = 2\mathrm{arctg}\left[\frac{1}{k\rho}\left(2 - \sqrt{k^2\rho^2 - 4}\cdot \mathrm{tg}\frac{\sqrt{k^2\rho^2 - 4}}{2\rho}s\right)\right]. \tag{10}$$

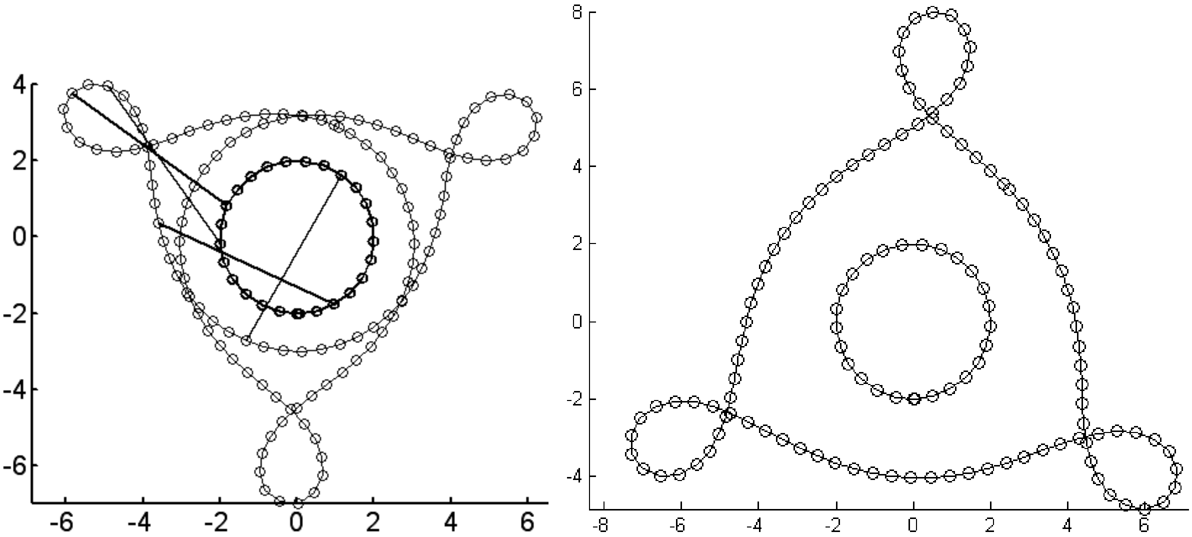
Одержаний результат (10) підставляємо у (2) і одержуємо закономірність повороту відрізка АВ навколо вершини тригранника при його русі по напрямній кривій, заданій натуральним рівнянням k=k(s). Знайденми виразами $\rho_\tau = \rho_\tau(s)$; $\rho_n = \rho_n(s)$ описується відносний рух точки В в системі тригранника. Щоб знайти абсолютну траєкторію точки В як суму відносного руху в системі тригранника і переносного руху самого тригранника, скористаємося формулами переходу, наведеними в праці [2]:

$$
\begin{aligned}
x_B &= \rho_\tau \cos\left(\int k ds\right) - \rho_n \sin\left(\int k ds\right) + \int \cos\left(\int k ds\right) ds;\\
y_B &= \rho_\tau \sin\left(\int k ds\right) + \rho_n \cos\left(\int k ds\right) + \int \sin\left(\int k ds\right) ds.
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

Підстановка отриманих залежностей $\rho_\tau = \rho_\tau(s);\ \rho_n = \rho_n(s)$ в (11) дає абсолютну траєкторію точки В у вигляді:

$$
\begin{aligned}
x_B &= \rho \cos\left\{ 2\mathrm{arctg}\left[\frac{1}{k\rho}\left(2 - \sqrt{k^2\rho^2 - 4}\cdot \mathrm{tg}\frac{\sqrt{k^2\rho^2-4}}{2\rho} s \right)\right] + ks \right\} + \frac{1}{k}\sin ks;\\
y_B &= \rho \sin\left\{ 2\mathrm{arctg}\left[\frac{1}{k\rho}\left(2 - \sqrt{k^2\rho^2 - 4}\cdot \mathrm{tg}\frac{\sqrt{k^2\rho^2-4}}{2\rho} s \right)\right] + ks \right\} - \frac{1}{k}\cos ks.
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

На рис. 2 за рівняннями (12) побудовані криві при k=0,5 (радіус напрямного кола R=1/k=2) і різних значеннях ρ.



а б

Рис. 2. Коло і супутня крива, по яких кінці відрізка сталої довжини рухаються із однаковими швидкостями:

а) R=2; ρ=5; б) R=2; ρ=6,04.

В обох випадках довжини ρ підібрані так, щоб крива була замкнена. В загальному випадку вона незамкнена. На рисунку 2.1,а також показані окремі положення відрізка. Відстані між сусідніми точками вихідної і побудованої кривих рівні між собою, отже і швидкості руху кінців відрізка при проходженні по кривих теж будуть рівними. При збільшенні довжини відрізка від 5 одиниць до 6,04 (рис. 2) траєкторія точки В відрізка суттєво змінюється, хоча зовні здається подібною, оскільки має три петлі. Якщо довжина відрізка менша за його діаметр, то дуже швидко точка В, яка знаходиться поза колом на внутрішній або зовнішній стороні, переходить на коло і далі відрізок рухається так, що обидва його кінці ковзають по колі.

Потрібно сказати, що вираз (9) вдається проінтегрувати тільки для найпростіших випадків напрямних ліній, а саме при k=0 (пряма лінія) і при k=const (коло). Проте можна і по іншому підходити до конструювання траєкторій кіців відрізка за умови рівності їх швидкостей. Наприклад, можна задати одну із закономірностей $\rho_\tau = \rho_\tau(s)$ або $\rho_n = \rho_n(s)$ і із умови (5) знайти другу закономірність. Знайдені закономірності підставляємо в рівняння (4) і розв'язуємо його відносно k, тобто отримуємо натуральне рівняння кривої – траєкторії точки А відрізка. Розглянемо сказане на прикладі.

Задамо варіант залежностей, що задовольняють умові $\rho_\tau^2 + \rho_n^2 = \rho^2$, описаних тригонометричними функціями:

$$\rho_\tau = \rho\cos as; \qquad \rho_n = \rho \sin as. \qquad (13)$$

Підставимо вирази (13) та їх похідні в (4) і після спрощень отримаємо:

$$\left(a+k\right)\left(a\rho+k\rho-2\sin as\right)=0. \tag{14}$$

Рівняння (14) має два розв'язки:

$$k=-a; \qquad k=\frac{2}{\rho}\sin as-a. \tag{15}$$

До першого розв'язку не входить довжина ланки ρ. Знайдемо вихідну криву (траєкторію точки А) за відомими формулами переходу від натурального рівняння до параметричних [3]. Це буде коло, оскільки k=const. Знайдемо траєкторію точки В за формулами (11), підставивши в них вирази (13) і перший вираз із (15). Після інтегрування і спрощень одержимо рівняння конгруентного кола, зміщеного вздовж осі Ох на відстань ρ. Отже відрізок здійснює поступальний рух. Звідси стає зрозуміло, чому до натурального рівняння траєкторії точки А (перший вираз в (15)) не входить довжина відрізка ρ. Відрізок буде рухатися поступально з рівними швидкостями кінців при будь-якій довжині відрізка ρ, як показано на рис. 1,б.

Для другого натурального рівняння (15) неможливо знайти параметричні рівняння в кінцевому вигляді, отже потрібно застосувати чисельні методи. За допомогою їх отримуємо цікавий результат, згідно якого обидві траєкторії кінців відрізка є конгруентними кривими (рис. 3). Дослідження також показали, що ці траєкторії є періодичними кривими і можуть продовжуватися як завгодно довго, причому цей процес періодичного продовження відбувається у прямолінійному напрямі.

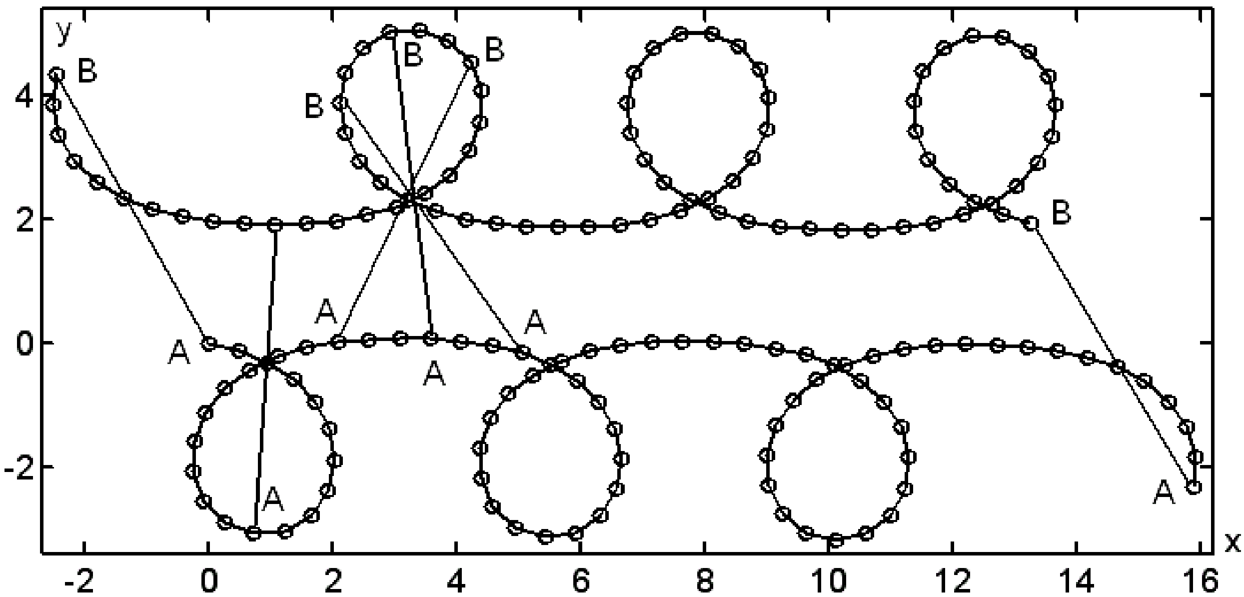


Рис. 3. Траєкторії руху кінців відрізка АВ при описанні його переміщення в системі тригранника залежностями (13) при а=0,5; ρ=5.

Взагалі для побудови траєкторій кінців відрізка, які рухаються із рівними швидкостями, доцільніше використовувати диференціальне рівняння (9). Воно має компактний вигляд і передбачає тільки один розв'язок, оскільки другий – поступальне переміщення відрізка по конгруентних кривих – ми отримали із узагальненого рівняння (8).

Розглянемо ще один приклад. За траєкторію точки А відрізка візьмемо ланцюгову лінію, натуральне рівняння якої k=k(s) відоме. Підстановка його в (9) і подальші обчислення чисельними методами дали наступні зображення (рис. 4).

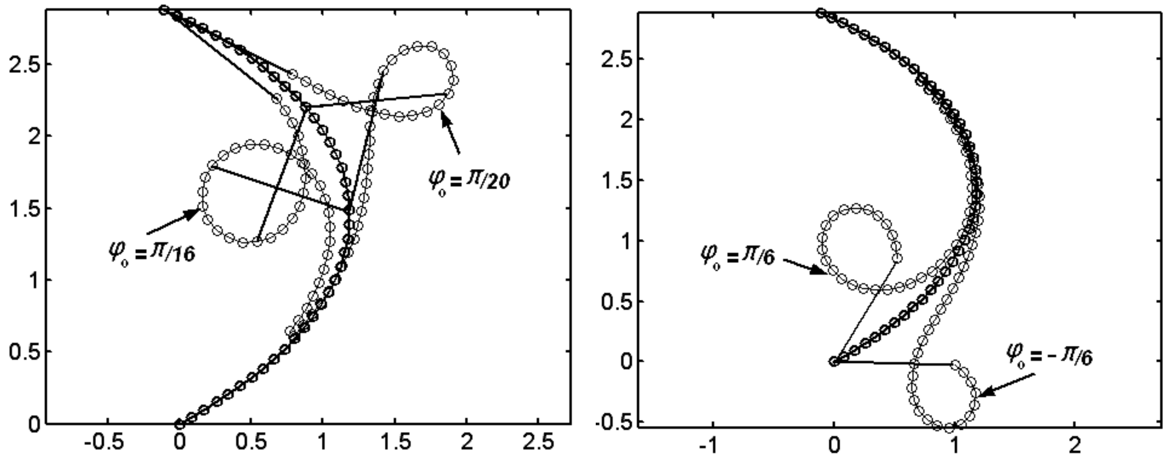


Рис. 4. Траєкторії руху кінців відрізка АВ при заданій траєкторії точки А, якою є ланцюгова лінія (зображена потовщеною).

Траєкторії точки В залежать від початкового значення кута φ_0. На рис. 4 показані траєкторії точки В відрізка для різних початкових значень кута φ_0, а також окремі положення відрізка. Варто сказати, що при розв'язуванні поставленої задачі чисельними методами траєкторію точки А можна задавати натуральним рівнянням, у якого відсутні параметричні рівняння. В наступному прикладі траєкторія точки А відрізка була задана рівнянням k=22sin36s+12, яке описує замкнену криву. Результати обчислень показані на рис. 5.

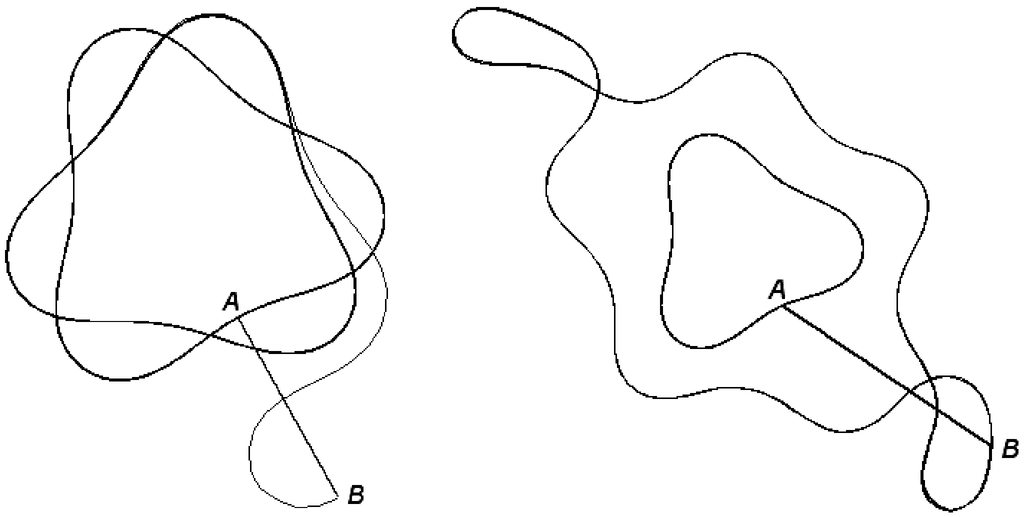


Рис. 5. Траєкторії руху кінців відрізка АВ при заданому рівнянні k=22sin36s+12.

Висновки. При заданій траєкторії руху одного кінця відрізка за умови, що другий кінець рухається із такою ж швидкістю, існує два розв'язки, одним із яких є поступальний рух відрізка по конгруентних кривих. Другим розв'язком є крива, форма якої залежить від початкових умов розташування відрізка. Для замкненої кривої (траєкторії точки А) друга крива (траєкторія точки В) теж може бути замкнена при підборі належних початкових умов.

1. Пилипака С.Ф. Параметричні та натуральні рівняння кривих із заданими кінематичними характеристиками / С.Ф. Пилипака, В.М.Несвідомін, Т.С. Пилипака // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. –Випуск 3 (44). – Дніпропетровськ, 2006. – С. 69 – 75.
2. Пилипака С.Ф. Кінематика відрізка, кінці якого описують задані лінії у площині / С.Ф. Пилипака, В.М. Бабка, Т.С. Пилипака // Прикл. геометрія та інж. графіка.- К.: КНУБА, 2007.- Вип. 77. – С. 36 – 42.
3. Пилипака С.Ф. Теорія складного руху матеріальної точки на площині. Частина перша. Абсолютна швидкість і траєкторія / С.Ф. Пилипака // Електротехніка і механіка. – К., 2006. - № 1. – С. 84 -94.