УДК 514.18
С.Ф.Пилипака, І.Ю.Грищенко
Національний університет біоресурсів і природокористування України

ПОВЕРХНІ ЦИЛІНДРИЧНИХ ЛІНІЙ ОДНАКОВОЇ ДОВЖИНИ

Розглянуто спосіб побудови поверхонь у яких однією сім'єю координатних ліній є циліндричні криві однакової довжини, розташовані на співвісних циліндрах.

Ключові слова: *параметричне рівняння, поверхня, координатна лінія, довжина.*

Постановка проблеми. При конструюванні поверхонь потрібно враховувати вихідні дані. Такими даними можуть бути криві або точки, через які має проходити поверхня, характер координатних ліній, функціональне призначення поверхні тощо. В даній статті такими умовами виступає вимога, щоб всі координатні лінії однієї сім'ї були розташовані на кругових циліндрах різних радіусів і їх довжина на заданому відсіку була однакова.

Аналіз останніх досліджень. Лінійчаті поверхні рівних відрізків або аналогічних смуг на лінійчатих поверхнях розглянуто в працях [1, 2]. Більш близькими до тем даної статті є праці [3, 4]. В них розглянуто конструювання поверхонь із множини гвинтових циліндричних ліній, причому розглянуто поверхні, у яких одна сім'я координатних ліній має однакову довжину в межах одного кроку.

Формулювання мети статті. Розробити спосіб конструювання поверхонь, у яких однією сім'єю координатних ліній є криві однакової довжини на співвісних кругових циліндрах.

Основна частина. Щоб побудувати поверхню циліндричних ліній однакової довжини, потрібно, щоб вони були задані у функції довжини власної дуги s. Спочатку розглянемо лінію на поверхні кругового циліндра, яка задається параметричними рівняннями:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad Z = \psi, \tag{1}$$

де r - радіус циліндра;
$\varphi = \varphi(s)$ і $\psi = \psi(s)$ - задані функції параметра s.

Перші похідні лінії (1) будуть:

$$x' = -r\varphi'\sin\varphi, \; y' = r\varphi'\cos\varphi, \; z' = \psi'. \tag{2}$$

При умові, що функції φ і ψ є функціями довжини дуги s лінії, повинна виконуватися умова $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$, тобто:

$$r^2\varphi'^2 + \psi'^2 = 1. \tag{3}$$

До рівняння (3) входить дві функції, отже одну із них можна задавати, а другу знаходити. Якщо, наприклад, задати функцію $\varphi = \varphi(s)$, то функція $\psi = \psi(s)$ знаходиться із (3) інтегруванням наступного виразу:

$$\psi = \int \sqrt{1 - r^2\varphi'^2}\,ds. \tag{4}$$

Розглянемо приклади. Будемо таким чином задавати функцію $\varphi = \varphi(s)$, щоб вираз (4) можна було проінтегрувати. Нехай, наприклад, $\varphi = \frac{1}{r}\sin s$, отже $\varphi' = \frac{1}{r}\cos s$. Згідно (4) маємо:

$$\psi = \int \sqrt{1 - \cos^2 s}\,ds = -\cos s. \tag{5}$$

Підставивши функції $\varphi = \frac{1}{r}\sin s$ і $\psi = -\cos s$ у (1), отримаємо параметричні рівняння циліндричної лінії у функції довжини власної дуги:

$$x = r\cos\left(\frac{1}{r}\sin s\right);$$

$$y = r\sin\left(\frac{1}{r}\sin s\right); \tag{6}$$

$$z = -\cos s\,.$$

При зміні параметра s від s_1 до s_2 рівняння (6) описують лінію на поверхні циліндра радіуса r довжиною $s_2 - s_1$, причому ця довжина буде однакова незалежно від величини радіуса r. Таким чином, якщо переписати рівняння (6), позначивши радіус через R і прийнявши R другою незалежною змінною, то вони перетворяться в рівняння поверхні, у якій однією сім'єю координатних ліній будуть циліндричні криві, що зображатимуться на горизонтальній проекції дугами концентричних кіл:

$$X = R\cos\left(\frac{1}{R}\sin s\right);$$

$$Y = R\sin\left(\frac{1}{R}\sin s\right); \qquad (7)$$

$$Z = -\cos s\,.$$

На рис.1 за рівняннями (7) побудовано прямокутні проекції та аксонометричне зображення відсіку поверхні.

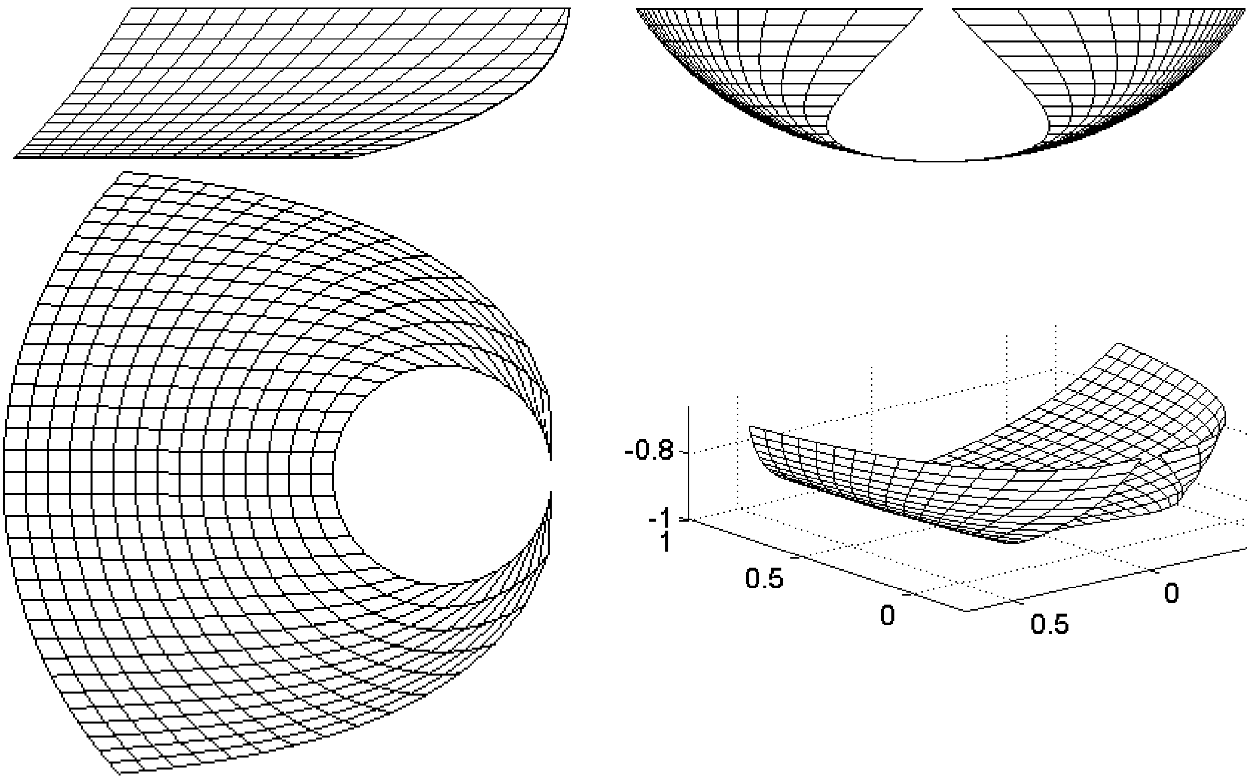


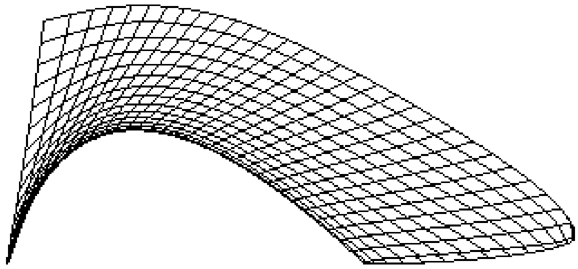
Рис. 1. Проекції та аксонометричне зображення поверхні, побудованої за рівняннями (7).

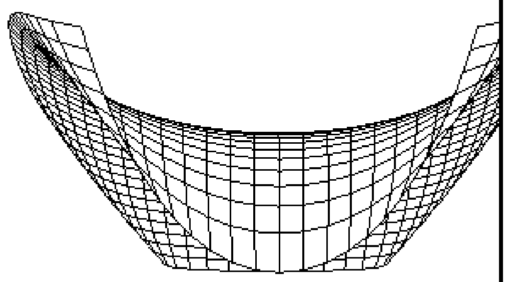
Нижче наводимо в таблиці 1 ще деякі поверхні, знайдені запропонованим способом, та відповідні параметричні рівняння.

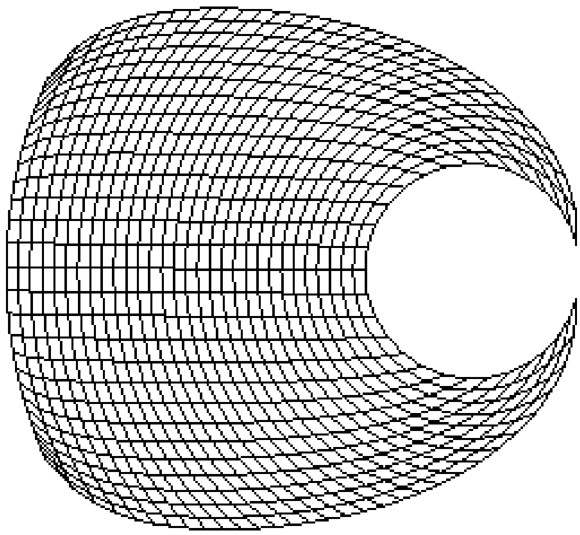
В табл. 1 під номером 3 наведена поверхня, утворена множиною гвинтових ліній однакової довжини. Вона відрізняється від поверхні, наведеної у праці [3] тим, що гвинтовий параметр b є величиною сталою. В праці [3] кожна лінія однакової довжини є гвинтовою в межах кроку, тобто крок гвинтових ліній є змінним.

Таблиця 1

Поверхні циліндричних ліній однакової довжини





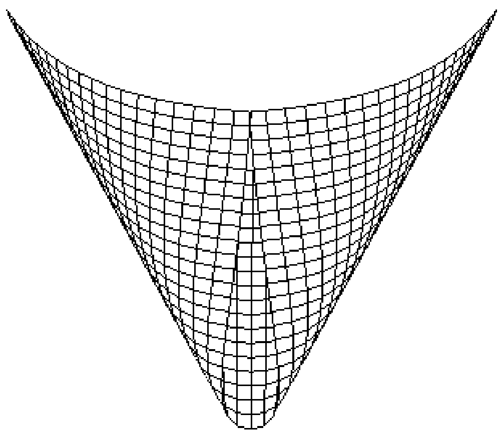


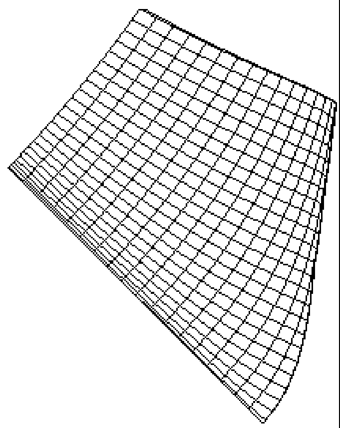
$$X = -R\sin\left[\frac{\sqrt{1-R^2}}{R}\ln\frac{\sqrt{1-R^2}+s^2-s}{\sqrt{1-R^2}}\right.;$$

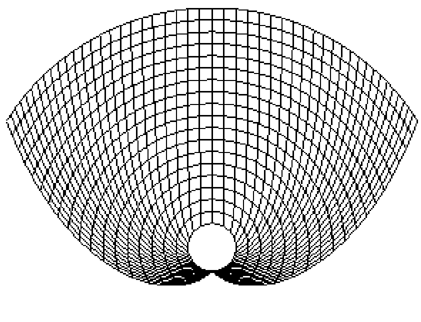
$$Y = R\cos\left[\frac{\sqrt{1-R^2}}{R}\ln\frac{\sqrt{1-R^2+s^2}-s}{\sqrt{1-R^2}}\right];$$

$$Z = \sqrt{1-R^2+S}\,.$$

Поверхня 1







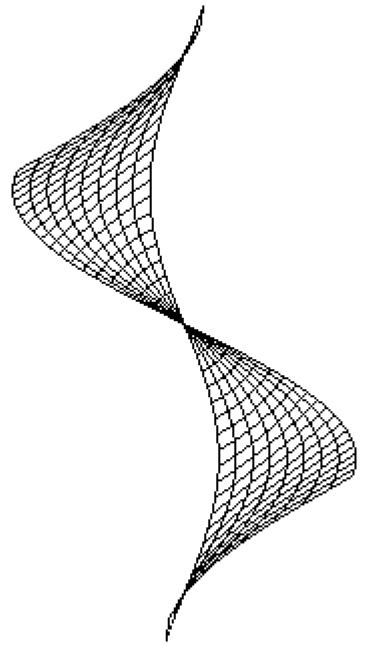
$$X = R\cos\left[\mathrm{Arsh}\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{R}}\right];$$

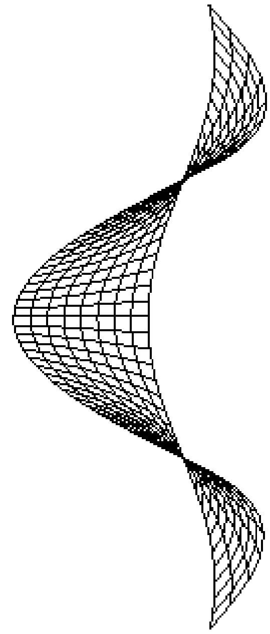
$$Y = R\sin\left[\mathrm{Arsh}\frac{s}{R}\right];$$

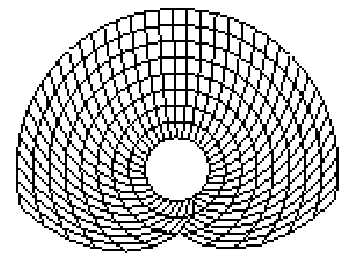
$$Z = \sqrt{R^2+s^2}.$$

Поверхня 2

Продовження табл. 1





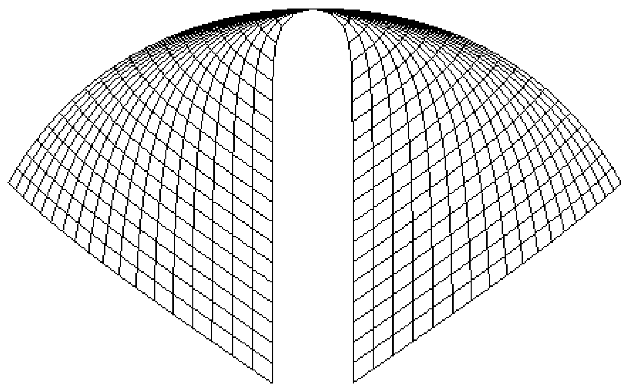


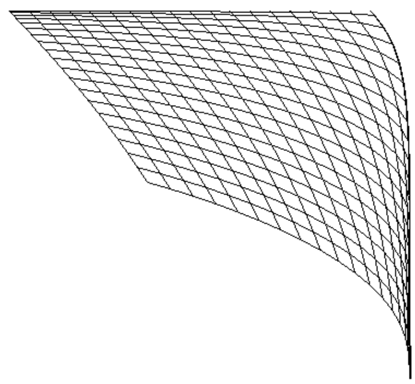
$$X = R\cos\left[\frac{s}{\sqrt{R^2+b^2}}\right];$$

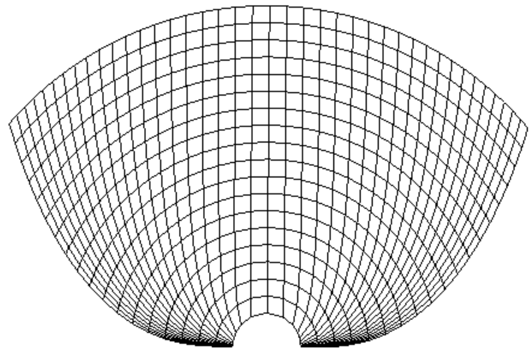
$$Y = R\sin\left[\frac{s}{\sqrt{R^2+b^2}}\right];$$

$$Z = \frac{bs}{\sqrt{R^2+b^2}}.$$

Поверхня 3







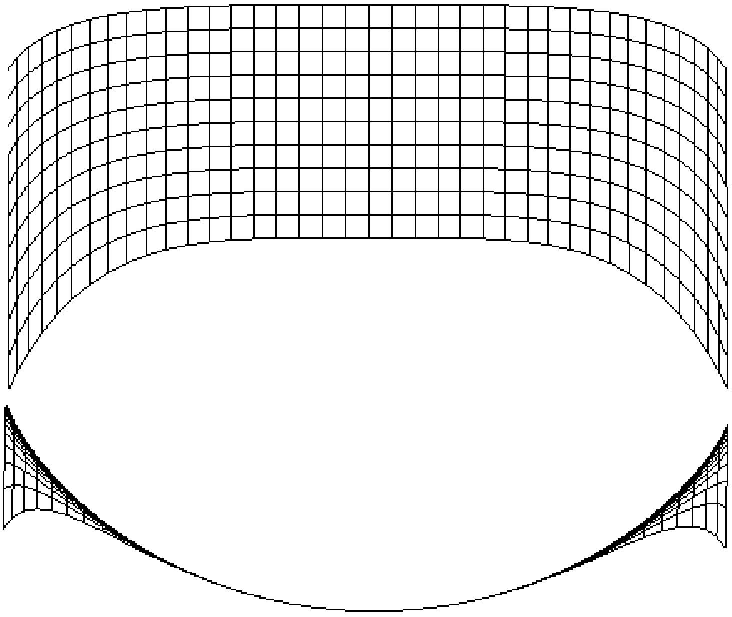
$$X = R\,\mathrm{sec\,h}\left(\frac{s}{R}\right);$$

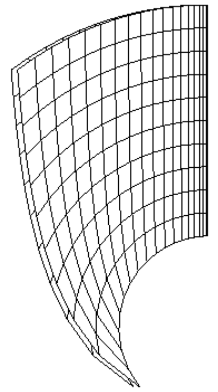
$$Y = R\tanh\left(\frac{s}{R}\right);$$

$$Z = R\ln\left[\mathrm{sec\,h}\left(\frac{s}{R}\right)\right].$$

Поверхня 4

Продовження табл. 1





$$X = 0,5\left(s\sqrt{1-s^2} + \arcsin s\right);$$

$$Y = R\sin\left[\frac{s^2}{2R}\right];$$

$$Z = R\cos\left[\frac{s^2}{2R}\right].$$

Поверхня 5

Підтвердженням того, що одна сім'я координатних ліній наведених поверхонь має однакову довжину, є те, що для всіх них виконується рівність:

$$E = \left(\frac{\partial X}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial s}\right)^2 = 1. \tag{8}$$

Якщо в параметричних рівняннях будь-якої із наведених поверхонь задати стале значення параметра R, то при зміні s вони опишуть циліндричну лінію у функції натурального параметра, розташовану на циліндрі радіуса R.

Висновки. В статті показана можливість знаходження параметричних рівнянь поверхонь, у яких однією сім'єю координатних ліній є циліндричні криві однакової довжини, розташовані на співвісних циліндрах. Всі вони окрім однієї (поверхня 3 в табл. 1) мають площину симетрії. Поверхні описані параметричними рівняннями у функції двох змінних s і R, які мають фізичний зміст: s – довжина дуги однієї сім'ї координатних ліній, розташованих на співвісних циліндрах; R – радіуси кіл поперечного перерізу цих циліндрів.

1. Підгорний О.Л. Поверхні рівних відрізків / О.Л. Підгорний // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КДТУБА, 1997. – Вип. 62. – С.7-10.
2. Обухова В.С. Побудова смуг рівних відрізків на лінійчатих поверхнях / В.С.Обухова // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КДТУБА, 1998. – Вип. 63. – С.16-20.
3. Обухова В.С. Поверхні гвинтових ліній однакової довжини в межах кроку / В.С.Обухова // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КДТУБА, 1999. – Вип. 66. – С.27-31.
4. Обухова В.С. Поверхні циліндричних гвинтових ліній / В.С.Обухова // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КДТУБА, 2002. – Вип. 71. – С.22-25.