УДК 621.822:681.2:369.64

О.Л. Кайдик, Т.В. Терлецький
Луцький національний технічний університет

МОДЕЛЮВАННЯ ВИХІДНИХ ПОХИБОК ОБРОБКИ ПОВЕРХНІ КАРДАННИХ ПІДШИПНИКІВ ДЛЯ ФОРМОУТВОРЕННЯ ПОВЕРХОНЬ

Розглянуто теоретичні передумови моделювання точності поверхонь оброблюваних деталей, показано, що кожну математичну модель процесу представлено у вигляді співвідношень, які відтворюють найсуттєвіші та характерні закономірності й взаємозв'язки відповідні реальному технологічному процесу.

Показано, що початковим етапом моделювання точності є визначення похибок обробки з обов'язковим врахуванням взаємозв'язків між їх вхідними та вихідними параметрами. У даному випадку доцільно використовувати матричні методи запису рівнянь.

Ключові слова: *якість виробу, похибка обробки, математична модель, математичне очікування, дисперсія, матриця, кореляційний момент*.

Аналіз стану теорії та розрахунку точності виробництва дає можливість вважати, що подальший розвиток науки та практики інженерних розрахунків в області теорії та розрахунків точності виробництва залежать від ступеня розробки методів математичного опису закономірностей та взаємозв'язків технологічного процесу.

Велике значення у вирішенні питання точності виробництва має розробка математичної моделі (математичних описів) закономірностей та взаємозв'язків технологічного процесу. Вірно створені математичні моделі дають можливість не тільки прогнозувати точність кожної з складових операцій технологічного процесу, але й обумовлено підійти до розробки оптимальних систем автоматичного керування цими процесами з метою отримання високоякісної продукції за мінімальних затрат на виробництво.

Технологічні процеси серійного та масового виробництва, які багаторазово виконуються у практично однакових виробничих умовах, можна розглядати як складні системи перетворень (об'єкти) з великим числом вхідних та вихідних змінних, які мають випадковий характер. Тому, для побудови математичної моделі технологічного процесу можуть бути використані імовірнісні (теоретичні) та статистичні (експериментальні) методи.

Імовірнісний метод передбачає побудову моделей у вигляді співвідношень, які встановлюють взаємозв'язок між законами розподілу або математичним очікуванням та дисперсіями вхідних і вихідних випадкових змінних. Ці методи засновані на знанні функціональних залежностей, які відтворюють механічні, фізичні, хімічні та інші закономірності технологічного процесу.

Статистичні методи дозволяють за наявності відповідної апаратури [1] провести достатньо оперативно дослідження процесу у виробничих умовах з наступним отриманням його моделі шляхом обробки масової первинної інформації. В цьому випадку модель може бути представлена у вигляді рівнянь парної та множинної лінійної або нелінійної регресії, виразів математичного очікування тощо, які є статистичними аналогами залежностей, що отримані за результатами теоретичного аналізу.

Імовірнісний та статистичний методи побудови моделей знаходяться в тісному взаємозв'язку один з одним, так як теоретичні моделі потребують експериментальної перевірки, а експериментальні дослідження не можуть бути проведені без відповідних теоретичних даних. На основі теоретичного аналізу можна також оцінити отримані експериментальні результати та висунути більш правильні гіпотези про межі можливості ідеалізації припущень для побудови теоретичних моделей. Таким чином, імовірнісні та статистичні моделі не повинні протиставлятись одна одній і, навпаки, вони мають особливе значення у спільному застосуванні, стаючи, у цьому випадку, досконалим засобом пізнання фізичної суті технологічного процесу та виявлення резервів їх точності та продуктивності.

Залежно від точності математичного опису та конкретних вимог, які висуваються технічними умовами на вхідні параметри якості виробів, моделі процесів можуть бути побудовані на рівні відповідних величин та випадкових функцій. Застосування випадкових величин дає можливість отримати статистичні моделі технологічного процесу, а використання випадкових функцій – динамічні моделі, які більш повно відтворюють реальні процеси.

Принципи підходу до математичного опису технологічного процесу мають узагальнений характер незалежно від фізичної суті цих процесів і тому можуть бути застосовані до таких різного роду операцій, як обробка металу різанням, тиском, термічна обробка, складання тощо.

Для рішення задач аналізу та синтезу похибок обробки застосовуються матричні методи, які скорочують об'єм записів, роблять результат наглялнішим та у ряді випадків полегшують дослідження точності технологічного процесу з багатомірними входами та виходами [2].

Для доцільності моделювання параметрів якості в процесі формоутворенні поверхні перш за все потрібно сформулювати задачу математичного моделювання технологічного процесу.

Нехай маємо складну систему перетворень, під якою розуміють [3] сукупність матеріальних засобів (обладнання, пристрої, інструменти тощо), які необхідні для виконання технологічної операції, а також сукупність методів для підготовки, налагодження та керування цими засобами. Структуру цієї схеми в загальному вигляді подано на рис. 2, де $x_1, x_2, \dots, x_m$ – вхідні змінні системи перетворень, які характеризують вихідні фактори (похибка розміру, форми, мікрогеометрії, твердості) заготовок, що оброблюються, $z_1, z_2, \dots, z_m$ – вихідні змінні системи перетворень, які визначають кількісні характеристики якості (похибка розмірів, форми, розташування поверхні, хвилястість, фізико-механічні властивості) деталей, які оброблені. Через $y_1, y_2, \dots, y_m$ – позначено інші вхідні змінні, які характеризують вихідні фактори (жорсткість, зношення та затуплення робочого інструменту, температурні деформації, похибка встановлення інструменту тощо), які відносяться до системи перетворень. Символами $a_{10}, a_{20}, \dots, a_{m0}$ позначено сталі складові вихідних змінних, які не залежать від значень вхідних змінних та визначають систематичні похибки, що присутні в самій системі.

Для побудови структурної схеми та подальшому математичному моделюванні технологічного процесу слід взяти до уваги наступні припущення та обмеження: технологічний процес розглядається як статистична система перетворень; вхідні та вихідні змінні (похибки) технологічної системи описуються векторними (випадковими) величинами; усі ланцюги системи перетворень є лінійними або ліанеризованими до яких слід застосувати принцип суперпозиції [4].

Характер залежності вихідних змінних від вхідних $x_1, x_2, \dots, x_n$ та $y_1, y_2, \dots, y_n$ визначає лінійність або нелінійність системи перетворень. Для лінійної системи перетворень на основі принципу суперпозиції кожну з вихідних похибок z_i розглянемо як лінійну комбінація вхідних факторів $x_1, x_2, \dots, x_p$ та $y_1, y_2, \dots, y_p$:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = a_{10} + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \dots + b_{1p}y_p; \\ z_2 = a_{20} + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \dots + b_{2p}y_p; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_{1m} = a_{m0} + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + b_{m1}y_1 + b_{m2}y_2 + \dots + b_{mp}y_p. \end{array}\right\}, \qquad (1)$$

де $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ та $b_{11}, b_{12}, \dots, b_{mn}$ – передатні коефіцієнти системи перетворень, які є характеристиками передачі (переносу) похибок початкових (вхідних) факторів на результуючу (вихідну) похибку обробки.

Запис рівнянь, які встановлюють перетворення вхідних змінних $y_1, y_2, \dots, y_p$ та $x_1, x_2, \dots, x_n$ у вихідні $z_1, z_2, \dots, z_m$ у вигляді співвідношень (1) та їх подальше використання ускладнюють математичні викладки та роблять більш імовірнісну появу помилок у рішенні практичних задач. Тому від такого запису потрібно переходити до матричної форми, яка є практичнішою та компактнішою.

Для запису системи рівнянь (1) у вигляді матриці вводимо прямокутні матриці A та B, $m \times n$ та $m \times p$ типів відповідно, які скомпоновано з елементів, кожен з яких дорівнює передатному коефіцієнту системи (1):

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mp} \end{Vmatrix}. a \qquad (2)$$

Позначимо через X, Y та Z матриці-стовпці (вектори-стовпці), елементами котрих є змінні, які характеризують відповідно вихідні фактори заготовок x_j, системи перетворень y_k та вихідні похибки z_i:

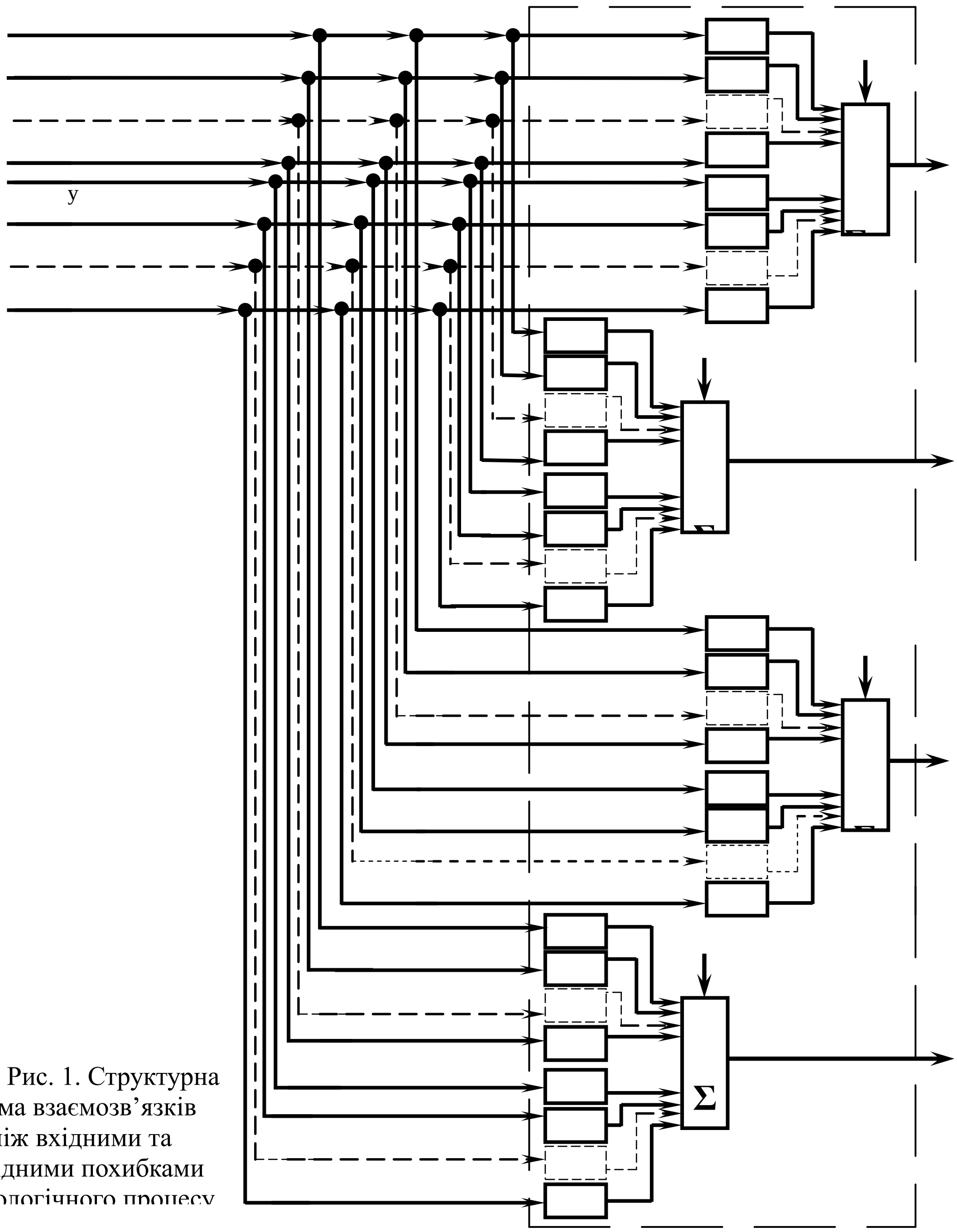

Рис. 1. Структурна схема взаємозв'язків між вхідними та вихідними похибками технологічного процесу

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{Vmatrix}; \quad Y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .... \\ y_n \end{Vmatrix}; \quad Z = \begin{Vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ .... \\ z_m \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Насамкінець, позначимо через A_0 матрицю-стовпець, елементи якої – складові вихідні змінні, які визначають систематичні похибки системи перетворень:

$$A_0 = \begin{Vmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ .... \\ a_{m0} \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

з врахуванням правила множення матриці [5], систему рівнянь (1) записуємо одним матричним рівнянням:

$$Z = A_0 + AX + BY. \tag{5}$$

Матриці A та B системи перетворень будуються відносно просто. По головних діагоналях розміщені передатні коефіцієнти зв'язків. У випадку відсутності зв'язку в матрицях, на відповідному місці ставляться нулі. Якщо зв'язок прямий, але негативний, то елементи заносяться в матрицю зі знаком "мінус".

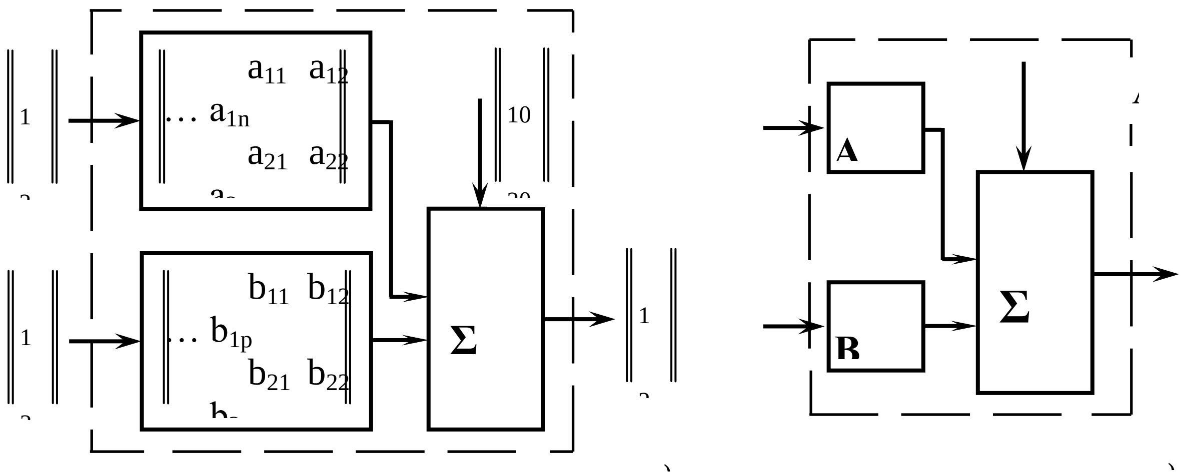

Рис. 2. Загальні схеми взаємозв'язку між вхідними та вихідними похибками технологічного процесу:

а) та б) – матричні схеми в розгорнутому та компактних видах

З врахуванням запису системи рівнянь (1) у матричному вигляді (5) структурна схема технологічного процесу з багатьма входами та виходами (див. рис. 1) може бути замінена еквівалентною матричною структурною схемою, яка зображена в розгорнутому (рис. 2, *а*) та компактному (рис. 2, *б*) видах.

В умовах серійного та масового виробництва виробів, які виготовляються згідно одного креслення та одного технологічного процесу, при повторному відображенні одного і того ж комплексу початкових умов, вхідні та вихідні змінні системи перетворень можна розглянути у вигляді випадкових величин або випадкових функцій. Для рішення задач синтезу похибок обробки в цьому випадку необхідно перейти від співвідношення (1) до системи рівнянь, які пов'язують математичне очікування та дисперсії вхідних та вихідних змінних.

Застосуємо до системи рівнянь (1) теорему про числову характеристику лінійних функцій декількох взаємнонезалежних випадкових аргументів [4]. Тоді математичне очікування вихідних похибок обробки визначимо наступним чином:

$$\left.\begin{array}{l} m_{z_1} = a_{10} + a_{11}m_{x_1} + a_{12}m_{x_2} + \ldots + a_{1n}m_{x_n} + b_{11}m_{y_1} + b_{12}m_{y_2} + \ldots + b_{1p}m_{y_p}; \\ m_{z_2} = a_{20} + a_{21}m_{x_1} + a_{22}m_{x_2} + \ldots + a_{2n}m_{x_n} + b_{21}m_{y_1} + b_{22}m_{y_2} + \ldots + b_{2p}m_{y_p}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_{z_{1m}} = a_{m0} + a_{m1}m_{x_1} + a_{m2}m_{x_2} + \ldots + a_{mn}m_{x_n} + b_{m1}m_{y_1} + b_{m2}m_{y_2} + \ldots + b_{mp}m_{y_p}. \end{array}\right\}, \quad (6)$$

та дисперсії:

$$\left.\begin{array}{l} D_{z_1} = a^2_{11}D_{x_1} + a^2_{12}D_{x_2} + \ldots + a^2_{1n}D_{x_n} + b^2_{11}D_{y_1} + b^2_{12}D_{y_2} + \ldots + b^2_{1p}D_{y_p}; \\ D_{z_2} = a^2_{21}D_{x_1} + a^2_{22}D_{x_2} + \ldots + a^2_{2n}D_{x_n} + b^2_{21}D_{y_1} + b^2_{22}D_{y_2} + \ldots + b^2_{2p}D_{y_p}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_{z_m} = a^2_{m1}D_{x_1} + a^2_{m2}D_{x_2} + \ldots + a^2_{mn}D_{x_n} + b^2_{m1}D_{y_1} + b^2_{m2}D_{y_2} + \ldots + b^2_{mp}D_{y_p}. \end{array}\right\}, \quad (7)$$

або у матричній формі:

$$M\{Z\} = A_0 + AM\{X\} + BM\{Y\}; \quad (8)$$

$$D\{Z\} = CD\{X\} + FD\{Y\}, \quad (9)$$

де: матриці-стовпці, елементи котрих є відповідно математичним очікуванням сумарних похибок обробки z_i, початкових факторів заготовок x_j та системи перетворень:

$$M\{Z\} = \begin{Vmatrix} m_{z_1} \\ m_{z_2} \\ \ldots. \\ m_{z_m} \end{Vmatrix}; \quad M\{X\} = \begin{Vmatrix} m_{x_1} \\ m_{x_2} \\ \ldots. \\ m_{x_n} \end{Vmatrix}; \quad M\{Y\} = \begin{Vmatrix} m_{y_1} \\ m_{y_2} \\ \ldots. \\ m_{y_n} \end{Vmatrix}; \quad (10)$$

матриці-стовпці, елементи яких є відповідно дисперсіями сумарних похибок обробки z_i, початкових факторів заготовок x_j та системи перетворень y_k:

$$D\{Z\} = \begin{Vmatrix} D_{z_1} \\ D_{z_2} \\ \ldots. \\ D_{z_m} \end{Vmatrix}; \quad D\{X\} = \begin{Vmatrix} D_{x_1} \\ D_{x_2} \\ \ldots. \\ D_{x_n} \end{Vmatrix}; \quad D\{Y\} = \begin{Vmatrix} D_{y_1} \\ D_{y_2} \\ \ldots. \\ D_{y_n} \end{Vmatrix}; \quad (11)$$

матриці, елементи яких здійснюють перетворення дисперсії початкових факторів відповідно заготовок та системи перетворень в дисперсії похибок обробки:

$$C = \begin{Vmatrix} a^2_{11} & a^2_{12} & \ldots & a^2_{1n} \\ a^2_{21} & a^2_{22} & \ldots & a^2_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a^2_{m1} & a^2_{m2} & \ldots & a^2_{mn} \end{Vmatrix}; \quad F = \begin{Vmatrix} b^2_{11} & b^2_{12} & \ldots & b^2_{1p} \\ b^2_{21} & b^2_{22} & \ldots & b^2_{2np} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ b^2_{m1} & b^2_{m2} & \ldots & b^2_{mp} \end{Vmatrix}. \quad (12)$$

Інші позначення незмінні (такі, які були раніше).

В загальному випадку, коли початкові фактори знаходяться в кореляційній залежності між собою (попарно), дисперсії похибок обробки (7) мають наступний вигляд:

$$D_{z_i} = a^2_{i1}D_{x1} + a^2_{x2}D_{x2} + \ldots + a^2_{in}D_{xn} + b^2_{i1}D_{y1} + b^2_{i2}Dy + \ldots + b^2_{ip}D_{yp} +$$

$$+ \sum_{j,\mu=1}^{n} a_{ij}a_{i\mu}\rho_{xjx\mu}\sigma_{xj}\sigma_{x\mu} + \sum_{\substack{k,s=1 \\ k\neq s}} b_{ik}b_{is}\rho_{ykys}\sigma_{yk}\sigma_{ys} + \sum\sum a_{ij}b_{ik}\rho_{xjyk}\sigma_{xj}\sigma_{yk}, \quad (i=1, 2, \ldots, m) \quad (13)$$

де $\rho_{x_jx_\mu}$, $\rho_{y_ky_s}$, $\rho_{x_jy_k}$ – коефіцієнти кореляції між початковими факторами x_j та x_μ, y_k та y_s, x_j та y_k; σ_{x_j}, σ_{x_μ}, σ_{y_k}, σ_{y_s} – середнє квадратичне відхилення похибок початкових факторів x_j, x_μ, y_k та y_s відповідно.

В матричній формі дисперсію похибок обробки (2.13) записуємо у вигляді:

$$D\{Z\} = CD\{X\} + FD\{Y\} + HK\{x_j, x_\mu\} + RK\{y_k, y_s\} + TK\{x_j, y_k\}, \qquad (14)$$

де H – кліткова (блокова) матриця типу $m \times n$, яка здійснює перетворення кореляційних моментів початкових факторів заготовки x_j та x_μ в дисперсії сумарних похибок обробки; $K\{x_j, x_\mu\}$ – матриця типу $n \times 1$, розбита на клітки, елементами котрих є кореляційні моменти початкових факторів заготовок x_j та x_μ; R – кліткова матриця типу $m \times p$, яка здійснює перетворення кореляційних моментів початкових факторів заготовок та системи перетворень y_k та y_s в дисперсії сумарних похибок обробки; $K\{y_k, y_s\}$ – матриця типу $p \times 1$, розбита на клітки, елементами яких є кореляційні моменти початкових факторів заготовок та системи перетворень y_k та y_s; T – кліткова матриця типу $m \times n$, яка здійснює перетворення кореляційних моментів початкових факторів заготовок та системи перетворень x_j та y_k в дисперсії сумарних похибок обробки; $K\{x_j, y_k\}$ – матриця типу $n \times 1$, розбита на клітки, елементи якої – кореляційні моменти початкових факторів заготовок та системи перетворень x_j та y_k.

Кліткові матриці H, R та T в рівнянні (14) визначаються наступним чином:

$$H = \left\| \begin{matrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{m1} & H_{m2} & \dots & H_{mn} \end{matrix} \right\|; \quad R = \left\| \begin{matrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1p} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{m1} & R_{m2} & \dots & R_{mp} \end{matrix} \right\|; \quad T = \left\| \begin{matrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{m1} & T_{m2} & \dots & T_{mn} \end{matrix} \right\|, \qquad (15)$$

де клітки H_{ij}, R_{ik} та T_{ij} є матриці-стрічки, елементи яких являють собою добуток передатних коефіцієнтів $a_{ij}a_{i\mu}$, $b_{ik}b_{is}$ та $a_{ij}b_{ik}$ відповідно (i=1, 2, …, m; j, μ=1, 2, …, n; k, s=1, 2, …, p; $j \neq \mu$; $k \neq s$) системи рівнянь (13):

$$\begin{gathered} H_{11} = a_{11}\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}; \; H_{12} = a_{12}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}; \; \dots \; H_{mn} = a_{mn}\begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn-1} \end{pmatrix}; \\ R_{11} = b_{11}\begin{pmatrix} b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1p} \end{pmatrix}; \; R_{12} = b_{12}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{13} & \dots & b_{1p} \end{pmatrix}; \; \dots \; R_{mp} = b_{mp}\begin{pmatrix} b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mp-1} \end{pmatrix}; \\ T_{11} = a_{11}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \end{pmatrix}; \; T_{12} = a_{12}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \end{pmatrix}; \; \dots \; T_{mn} = a_{mn}\begin{pmatrix} b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mp} \end{pmatrix}. \end{gathered} \qquad (16)$$

Блочні матриці-стовпці у формулі (14) мають наступний вигляд:

$$K\{x_j, x_\mu\} = \left\| \begin{matrix} K_{x_1 x_\mu} \\ K_{x_2 x_\mu} \\ \dots \\ K_{x_n x_\mu} \end{matrix} \right\|; K\{y_k, y_s\} = \left\| \begin{matrix} K_{y_1 y_s} \\ K_{y_2 y_s} \\ \dots \\ K_{y_p y_s} \end{matrix} \right\|; \quad K\{x_j, y_k\} = \left\| \begin{matrix} K_{x_1 y_k} \\ K_{x_2 y_k} \\ \dots \\ K_{x_n y_k} \end{matrix} \right\|, \qquad (17)$$

де клітинки $K_{x_j x_\mu}$, $K_{y_k y_s}$ та $K_{x_j y_k}$ (j=1, 2, …, n; k=1, 2, …, p) є матриці-стовпці, елементами яких є кореляційний момент початкових факторів відповідно заготовок x_j та x_μ, системи перетворень y_k та y_s, заготовок x_j та системи перетворень y_k.

Вирази, які були отримані (6), (7), (8), (13) та (14) дають можливість розраховувати точність, яка буде отримана після обробки дисперсії на виході технологічного процесу згідно математичного очікування, дисперсії, кореляції початкових факторів та передаточними коефіцієнтами системи перетворень. Практичний інтерес також має розрахунок оберненої задачі: згідно заданих вихідних характеристик (технічні умови) по точності (нормальний розмір та допуск деталей) і передаточним коефіцієнтам сформулювати відносно початкових факторів вимоги за точністю, які відносять до заготовки та системи перетворень.

$$\left.\begin{array}{l}
K_{x_1x_\mu}=\sigma_{x_1}\cdot\begin{Vmatrix}\rho_{x_1x_2}\cdot\sigma_{x_2}\\ \rho_{x_1x_3}\cdot\sigma_{x_3}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \rho_{x_1x_n}\cdot\sigma_{x_n}\end{Vmatrix};\ \ldots;\ K_{x_nx_\mu}=\sigma_{x_n}\cdot\begin{Vmatrix}\rho_{x_nx_1}\cdot\sigma_{x_2}\\ \rho_{x_nx_2}\cdot\sigma_{x_3}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \rho_{x_nx_{n-1}}\cdot\sigma_{x_{n-1}}\end{Vmatrix};\\
K_{y_1y_s}=\sigma_{y_1}\cdot\begin{Vmatrix}\rho_{y_1y_2}\cdot\sigma_{y_2}\\ \rho_{y_1y_3}\cdot\sigma_{y_3}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \rho_{y_1y_p}\cdot\sigma_{y_p}\end{Vmatrix};\ \ldots;\ K_{y_py_s}=\sigma_{y_p}\cdot\begin{Vmatrix}\rho_{y_py_1}\cdot\sigma_{y_2}\\ \rho_{y_py_2}\cdot\sigma_{y_3}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \rho_{y_py_{p-1}}\cdot\sigma_{y_{p-1}}\end{Vmatrix};\\
K_{x_1y_k}=\sigma_{x_1}\cdot\begin{Vmatrix}\rho_{x_1y_1}\cdot\sigma_{y_1}\\ \rho_{x_1y_2}\cdot\sigma_{y_2}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \rho_{x_1y_p}\cdot\sigma_{y_p}\end{Vmatrix};\ \ldots;\ K_{x_ny_k}=\sigma_{x_n}\cdot\begin{Vmatrix}\rho_{x_ny_1}\cdot\sigma_{y_1}\\ \rho_{x_ny_2}\cdot\sigma_{y_2}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \rho_{x_ny_p}\cdot\sigma_{y_p}\end{Vmatrix}.
\end{array}\right\}\qquad(18)$$

Математично ця задача зводиться до розв'язку матричних рівнянь (8) та (14) відносно векторів-стовпців математичного очікування та $M\{y\}$, дисперсій $D\{x\}$ та $D\{y\}$, кореляційних моментів $K\{x_j, x_\mu\}$, $K\{y_k, y_s\}$ та $K\{x_j, y_k\}$ і початкового фактору заготовок та системи перетворень. Однозначне рішення поставленої задачі можливе у випадку, коли права частина (8) та (14) має одне невідоме. В іншому випадку рівняння (8) та (14) будуть мати безліч (множину) розв'язків.

Для однозначного рішення задачі необхідно накласти додаткові обмеження пов'язані з тим, щоб деяким невідомим рівнянням (8) та (14) надати визначені (допустимі) числові значення, в результаті чого отримаємо вирази, які містять лише один аргумент.

Спочатку розв'яжемо рівняння (8) та (14) згідно математичного очікування та дисперсії початкових факторів системи перетворень, коли задані всі інші невідомі. Для простоти розв'язку необхідно припустити, що матриці B та F є квадратними m-го порядку. Якщо визначники (детермінанти) цих матриць (B) та (F) не дорівнюють нулю, то для отримання розв'язку системи рівнянь (6) та (13) необхідно помножити обидві ліві частини рівнянь (8) та (14) на матрицю B^{-1} та F^{-1} відповідно (обернені по відношенню до матриць B та F), тоді:

$$M\{Y\}=B^{-1}\left(M\{Z\}-A_0-AM\{X\}\right),\qquad(19)$$

$$D\{Y\}=F^{-1}\left(D\{Z\}-CD\{X\}-HK\{x_j,x_\mu\}-RK\{y_k,y_s\}-TK\{x_j,y_k\}\right).\qquad(20)$$

Повторюючи аналогічні викладки для рішення рівнянь (8) та (14) відносно інших невідомих, отримаємо матричні вирази для визначення наступних імовірнісних характеристик початкових факторів:

- математичне очікування та дисперсія похибок заготовок:

$$M\{X\}=A^{-1}\left(M\{Z\}-A_0-BM\{Y\}\right),\qquad(21)$$

$$D\{X\}=C^{-1}\left(D\{Z\}-FD\{Y\}-HK\{x_j,x_\mu\}-RK\{y_k,y_s\}-TK\{x_j,y_k\}\right);\qquad(22)$$

- кореляційні моменти похибок заготовок:

$$K\{x_j,x_\mu\}=H^{-1}\left(D\{Z\}-CD\{X\}-FD\{Y\}-RK\{y_k,y_s\}-TK\{x_j,y_k\}\right);\qquad(23)$$

- кореляційні моменти початкових факторів системи перетворень:

$$K\{y_k,y_s\}=R^{-1}\left(D\{Z\}-CD\{X\}-FD\{Y\}-HK\{x_j,x_\mu\}-TK\{x_j,y_k\}\right);\qquad(24)$$

- кореляційні моменти між похибками заготовки та системи перетворень:

$$K\{x_j,y_k\}=F^{-1}\left(D\{Z\}-CD\{X\}-FD\{Y\}-HK\{x_j,x_\mu\}-RK\{y_k,y_s\}\right).\qquad(25)$$

Отримані матричні вирази (19)÷(25) дають можливість для заданої якості деталей, які обробляються та при введені додаткових умов сформулювати вимоги відносно точності до заготовок та системи перетворень. Виходячи з цього, з'являється можливість обґрунтовано підійти до нормування похибки заготовок та відхилень жорсткості пружної системи технологічного процесу, розмірного зношування та затуплення інструменту, зусиль різання, температурного режиму, налагодження, підналагодження тощо, які характеризують систему перетворень.

1. Меламед В.И., Новоселов Ю.К. Оптимизация процесса тонкого шлифования по числу операций //Передовая технология и автоматизация управления процессами обработки деталей машин. – Л.: Машиностроение, 1970. – С. 25-67.
2. Направление развития технологии приборостроения /Под ред. А.Н. Гаврилова. – М.: Машиностроение, 1968. – 162 с.
3. Бородачев Н.А. Математические представления закономерностей хода рабочих процессов – основа комплексной механизации //Автоматизация процессов машиностроения. – М.: Изд. АН СССР, 1962. – Т. 3. – С. 34-42.
4. Дунин-Барковский И.В., Карташева А.И. Измерения и анализ шероховатости, волнистости и некруглости поверхности. – М.: Машиностроение, 1978. – 232 с.

Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Гостехиздат, 1953. – 344 с.