

УДК 536.2

Б.Окрепкий, І.Новосад

Тернопільський національний економічний університет

ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ СИСТЕМИ ДВОХ КОНТАКТУЮЧИХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ

Резюме. Побудовано розв'язок осесиметричної температурної задачі для системи двох контактуючих кругових циліндрів при неідеальному тепловому контакті. Матеріали тіл припускаються трансверсально-ізотропними. Одержано формули для визначення температурних полів при різних варіантах температурних умов на бічних поверхнях і основах циліндрів. Досліджено вплив контактної провідності і анізотропії матеріалів на розподіл температурних полів в зоні контакту.

Ключові слова: осесиметричні задачі, анізотропія матеріалів, трансверсально-ізотропні матеріали, неідеальний тепловий контакт, коефіцієнт теплопровідності і теплообміну, контактна провідність.

Постановка проблеми. Визначення контактних деформацій і напружень, з урахуванням температурних факторів, є важливою задачею для дослідження міцності деталей машин і елементів конструкцій у місцях їх взаємодії, при розрахунку конструкції на пружній основі з метою раціонального використання конструкції і несучої здатності основи для підвищення експлуатаційних характеристик, надійності та довговічності.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В працях [1-5] досліджується вплив температурних факторів на характер розподілу контактної взаємодії тіл. До значних ускладнень при дослідженні контактних задач термопружності приводить припущення про неідеальний тепловий контакт між тілами. В роботі [5] розв'язано задачу теплопровідності для системи двох контактуючих циліндричних ізотропних тіл з врахуванням неідеального теплового контакту. Проте недостатньо вивченим є вплив неідеального теплового контакту трансверсально-ізотропних тіл на величину і характер розподілу температури в двох контактуючих тілах.

Мета роботи. Побудувати розв'язок осесиметричної температурної задачі для системи двох контактуючих кругових циліндричних трансверсально-ізотропних тіл, з врахуванням неідеального теплового контакту. Дослідити вплив контактної провідності і анізотропії матеріалів на розподіл температурних полів в зоні контакту двох тіл.

Постановка задачі. Нехай круговий циліндр радіусом R і довжиною L знаходиться в неідеальному тепловому контакті із другим круговим циліндром такого ж радіусу і довжиною L_1 . Бічна поверхня нижнього циліндра є теплоізольована. На всіх інших вільних поверхнях циліндрів відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем по закону Ньютона.

Введемо циліндричну систему координат r, Θ, z , центр якої лежить на поверхні контакту двох циліндрів, а вісь Oz спрямована вздовж осі верхнього циліндра. Всі величини які позначені індексом "1" відносяться до нижнього циліндра, без індексу – до верхнього.

Граничні умови для температури мають вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial z} + H_1(T - T_0) = 0 \quad (z = L; 0 \leq r \leq R) \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} + H_2 T = 0 \quad (r = R; 0 \leq z \leq L) \quad (2)$$

$$\lambda_z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z} = \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (z = 0; 0 \leq r \leq R) \quad (3)$$

$$\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} = h_0(T - T^1) \quad (z = 0; 0 \leq r \leq R) \quad (4)$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial r} = 0 \quad (r = R; -L_1 \leq z \leq 0) \quad (5)$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} - H_1^1 T^1 = 0 \quad (z = -L_1; 0 \leq r \leq R) \quad (6)$$

Тут λ_z, λ_z^1 - коефіцієнти теплопровідності; H_1, H_2, H_1^1 - коефіцієнти теплообміну; T_0 - температура зовнішнього середовища; h_0 - контактна провідність.

Відомо [6], у випадку трансверсально-ізотропних тіл, температурне поле задовільняє диференціальному рівнянню:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \lambda^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (7)$$

Температурне поле в циліндрі знаходимо методом Фур'є. Загальний розв'язок матиме вигляд:

$$T(r, z) = A_0 z + B_0 + D_0 (\lambda^2 r^2 - 2z^2) + \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\beta_k r) \left(A_k \operatorname{sh} \frac{\beta_k z}{\lambda} + B_k \operatorname{ch} \frac{\beta_k z}{\lambda} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} I_0(\lambda \gamma_k r) (C_k \sin \gamma_k z + D_k \cos \gamma_k z), \quad (8)$$

де A_k, B_k, C_k, D_k - довільні постійні; $J_0(\beta_k r)$ - функція Бесселя I-го роду дійсного аргументу; $I_0(\lambda \gamma_k r)$ - функція Бесселя I-го роду уявного аргументу; β_k, γ_k - власні числа, які визначаються із граничних умов; λ^2 - відношення коефіцієнтів теплопровідності в напрямку осі Oz і перпендикулярному до нього.

Для задоволення граничної умови (2) у формулі (8) необхідно покласти $C_k = 0 (k = \overline{1, \infty})$, $\beta_k = \frac{\mu_k}{R}$, де μ_k корені рівняння $J_1(\mu_k) = 0$; $\gamma_k = \frac{k\pi}{L}$.

Гранична умова (1), з врахуванням ортогональності функцій Бесселя приводить до наступних співвідношень між постійними A_n, B_n і $D_n (n = \overline{0, \infty})$:

$$A_0 - 4D_0 l R + \frac{1}{R} \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k J_0(\mu_k \rho) \left(A_k \operatorname{ch} \frac{\mu_k l}{\lambda} + B_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k l}{\lambda} \right) + H_1 [A_0 l R + B_0 + D_0 R^2 (\lambda^2 \rho^2 - 2l^2) + \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\mu_k \rho) \left(A_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k l}{\lambda} + B_k \operatorname{ch} \frac{\mu_k l}{\lambda} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k I_0 \left(\lambda \frac{k\pi}{l} \rho \right) D_k] = H_1 T_0, \quad (9)$$

$$\text{де } l = \frac{L}{R}; \quad \rho = \frac{r}{R}.$$

Помноживши (9), послідовно на $\rho, \rho J_0(\mu_n \rho)$ і проінтегрувавши по ρ в межах від 0 до 1, з врахуванням ортогональності функцій Бесселя:

$$\text{а) } \int_0^1 \rho J_0(\mu_k \rho) d\rho = 0$$

$$\text{б) } \int_0^1 \rho J_0(\mu_k \rho) J_0(\mu_n \rho) d\rho = \begin{cases} 0, & \mu_k \neq \mu_n \\ \frac{1}{2} J_0^2(\mu_n), & \mu_k = \mu_n \end{cases}$$

і значень інтегралів:

$$\text{в) } \int_0^1 \rho I_0 \left(\lambda \frac{k\pi}{l} \rho \right) d\rho = \frac{l}{k\pi\lambda} I_1 \left(\lambda \frac{k\pi}{l} \right) \quad (10)$$

$$\Gamma) \int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) I_0\left(\lambda \frac{k\pi}{l} \rho\right) d\rho = \frac{k\pi}{l} \lambda J_0(\mu_n) \frac{I_1\left(\lambda \frac{k\pi}{l}\right)}{\mu_n^2 + \left(\frac{k\pi}{l}\lambda\right)^2}$$

$$\Delta) \int_0^1 \rho^3 J_0(\mu_n \rho) d\rho = -\frac{2J_2(\mu_n)}{\mu_n^2}$$

одержимо зв'язок між постійними $B_k (k = \overline{0, \infty})$ і $A_k, D_k (k = \overline{0, \infty})$:

$$\begin{aligned} B_0 &= T_0 - \left(\frac{1}{k_1} + l\right) A_0 R - D_0 R^2 \left(\frac{1}{2} \lambda^2 - 2l^2 - \frac{4l}{k_1}\right) - \frac{2l}{\pi \lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k I_1\left(\lambda \frac{k\pi}{l}\right)}{k} D_k, \\ B_n &= \frac{k_1 \lambda}{\mu_n \operatorname{sh} \frac{\mu_n l}{\lambda} + k_1 \lambda \operatorname{ch} \frac{\mu_n l}{\lambda}} \left\{ -\left(\frac{\mu_n}{k_1 \lambda} \operatorname{ch} \frac{\mu_n l}{\lambda} + \operatorname{sh} \frac{\mu_n l}{\lambda}\right) A_n + \frac{4R^2 J_2(\mu_n) \lambda^2}{\mu_n^2 J_0^2(\mu_n)} D_0 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\pi}{l J_0(\mu_n)} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k t_{n,k} I_1\left(\frac{k\pi}{l} \lambda\right) D_k \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{де } k_1 = H_1 R; \quad t_{n,k} = \frac{1}{\mu_n^2 + \left(\frac{k\pi}{l} \lambda\right)^2} \quad (n = \overline{1, \infty}).$$

Задовільнимо граничну умову (2):

$$\begin{aligned} 2D_0 R \lambda^2 + \lambda \frac{\pi}{lR} \sum_{k=1}^{\infty} k I_1\left(\lambda \frac{k\pi}{l}\right) \cos \frac{k\pi}{l} \zeta D_k + H_2 [A_0 R \zeta + B_0 + D_0 R^2 (\lambda^2 - 2\zeta^2) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\mu_k) \left(A_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k \zeta}{\lambda} + B_k \operatorname{ch} \frac{\mu_k \zeta}{\lambda} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} I_0\left(\frac{k\pi}{l} \lambda\right) \cos \frac{k\pi}{l} \zeta D_k] = 0 \quad (0 \leq \zeta \leq l) \end{aligned} \quad (12)$$

Помноживши рівність (12) на $\cos \frac{\pi n}{l} \zeta$ ($n = 0, 1, \dots$) і про інтегрувавши по ζ в межах від 0 до l , з врахуванням ортогональності тригонометричних функцій і формул (11), одержимо співвідношення, які зв'язують невідомі $A_k, D_k (k = \overline{0, \infty})$:

$$\begin{aligned} 1) \quad e_{0,0} D_0 R^2 - \frac{2l^2}{\pi \lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k I_1\left(\frac{k\pi}{l} \lambda\right)}{k} D_k - A_0 R l \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{2} l\right) - \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k) U_{k,0}}{\mu_k} A_k - \\ - \frac{2\pi}{l} k_1 \sum_{k=1}^{\infty} e(\mu_k) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m I_1\left(\frac{m\pi}{l} \lambda\right) t_{k,m} D_m = -l T_0 \\ 2) \quad e_{n,0} R^2 D_0 + \left[\frac{\pi n}{2k_2} \lambda I_1\left(\frac{\pi n}{l} \lambda\right) + \frac{1}{2} l I_0\left(\frac{\pi n}{l} \lambda\right) \right] D_n - \\ - \frac{2\pi}{l} k_1 \lambda (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 e(\mu_k) t_{k,n} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m I_1\left(\frac{m\pi}{l} \lambda\right) t_{k,m} D_m + A_0 R \frac{l^2}{\pi^2 n^2} [(-1)^n - 1] - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k U_{k,n} J_0(\mu_k) t_{k,n} A_k = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{де } k_2 = H_2 R,$$

$$e_{0,0} = \left(\frac{2l}{k_2} + \frac{1}{2}l \right) \lambda^2 + \frac{4}{3}l^3 + \frac{4l^2}{k_1} - 4k_1 \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e(\mu_k)}{\mu_k^2},$$

$$e(\mu_k) = \frac{\lambda^3 th \frac{\mu_k l}{\lambda}}{\mu_k \left(\mu_k th \mu_k \frac{l}{\lambda} + k_1 \lambda \right)}, \quad U_{k,0} = 1 - \frac{k_1 \lambda}{\mu_k sh \frac{\mu_k l}{\lambda} + k_1 \lambda ch \frac{\mu_k l}{\lambda}},$$

$$U_{k,n} = 1 - \frac{(-1)^n k_1 \lambda}{\mu_k sh \frac{\mu_k l}{\lambda} + k_1 \lambda ch \frac{\mu_k l}{\lambda}}, \quad e_{n,0} = -\frac{4l^3 (-1)^n}{\pi^2 n^2} - 4(-1)^n k_1 \lambda \sum_{k=1}^{\infty} e(\mu_k) t_{k,n}$$

Температура у верхньому циліндрі прийме вигляд:

$$T(\rho, \zeta) = T_0 + A_0 R \left(\zeta - \frac{1}{k_1} - l \right) + D_0 R^2 \left\{ \lambda^2 \rho^2 - 2\zeta^2 - \frac{1}{2} \lambda^2 + 2l^2 + \frac{4l}{k_1} - \right.$$

$$\left. - 4k_1 \lambda^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k \rho) ch \frac{\mu_k \zeta}{\lambda}}{\mu_k^2 J_0(\mu_k) \left(\mu_k sh \frac{\mu_k l}{\lambda} + k_1 ch \frac{\mu_k l}{\lambda} \right)} \right\} - \frac{2l}{\pi \lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k I_1 \left(\lambda \frac{k\pi}{l} \right) D_k}{k} - \quad (14)$$

$$- \frac{2\pi k_1}{l} \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k \rho)}{J_0(\mu_k)} \frac{ch \frac{\mu_k \zeta}{\lambda}}{\left(\mu_k sh \frac{\mu_k l}{\lambda} + k_1 \lambda ch \frac{\mu_k l}{\lambda} \right)} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m I_1 \left(\frac{m \pi}{l} \lambda \right) t_{k,m} D_m +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} I_0 \left(\frac{k\pi}{l} \lambda \rho \right) \cos \frac{k\pi}{l} \zeta D_k + \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\mu_k \rho) A_k \frac{\mu_k ch \frac{\mu_k}{\lambda} (\zeta - l) + k_1 \lambda sh \frac{\mu_k}{\lambda} (\zeta - l)}{\mu_k sh \frac{\mu_k l}{\lambda} + k_1 \lambda ch \frac{\mu_k l}{\lambda}}.$$

Температура для нижнього циліндра представляється у вигляді:

$$T^1(r, z) = A_0^1 z + B_0^1 + D_0^1 \left((\lambda^1)^2 r^2 - 2z^2 \right) + \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\beta_k r) \left(A_k^1 sh \frac{\beta_k}{\lambda^1} z + B_k^1 ch \frac{\beta_k}{\lambda^1} z \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} I_0(\gamma_k \lambda^1 r) \left(C_k^1 \sin \gamma_k^1 z + D_k^1 \cos \gamma_k^1 z \right). \quad (15)$$

Для задоволення граничної умов (5) у формулу (15) необхідно покласти $D_k^1 = 0$, $C_k^1 = 0$ ($k = \overline{0, \infty}$), $\beta_k = \mu_k / R$, де μ_k - корені рівняння $J_1(\mu) = 0$.

Тоді температура матиме вигляд:

$$T^1(\rho, \zeta) = A_0^1 \zeta R + B_0^1 + \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\mu_k \rho) \left(A_k^1 sh \frac{\mu_k \zeta}{\lambda^1} + B_k^1 ch \frac{\mu_k \zeta}{\lambda^1} \right) \quad (\rho < 1), \quad (16)$$

де $\zeta = \frac{z}{R}$.

Гранична умова (6), з врахуванням ортогональності функцій Бесселя, приводить до слідуючих співвідношень між постійними A_n^1 і B_n^1 ($n = \overline{0, \infty}$):

$$B_0^{(1)} = \left(l_1 + \frac{1}{k_1^1} \right) A_0^1 R, \quad B_n^{(1)} = \frac{\mu_n + k_1^1 \lambda^1 th \frac{\mu_n l_1}{\lambda^1}}{\mu_n th \frac{\mu_n l_1}{\lambda^1} + k_1^1 \lambda^1} A_n^1 \quad (17)$$

Температура в нижньому циліндрі, згідно (16), (17), прийме вигляд:

$$T^1(\rho, \zeta) = A_0^1 R \left(\zeta + l_1 + \frac{1}{k_1^1} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\mu_k \rho) \frac{\mu_k ch \frac{\mu_k}{\lambda^1} (l_1 + \zeta) + k_1^1 \lambda^1 sh \frac{\mu_k}{\lambda^1} (l_1 + \zeta)}{\mu_k sh \frac{\mu_k l_1}{\lambda^1} + k_1^1 \lambda^1 ch \frac{\mu_k l_1}{\lambda^1}} A_k^{(1)} \quad (\rho < 1) \quad (18)$$

Задовольнивши граничні умови (3) і (4), одержимо:

$$а) \lambda_z \left(A_0 + \frac{1}{R\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k J_0(\mu_k \rho) A_k \right) = \lambda_z^1 \left(A_0^{(1)} + \frac{1}{R\lambda^1} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k J_0(\mu_k \rho) A_k^{(1)} \right) \quad (\rho < 1) \quad (19)$$

$$б) \frac{\lambda_z}{R} \left[A_0 R + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k J_0(\mu_k \rho) A_k \right] = \left\{ T_0 - A_0 R \left(\frac{1}{k_1} + l \right) + D_0 R^2 \left[\lambda^2 \rho^2 - \frac{1}{2} \lambda^2 + 2l^2 + \frac{4l}{k_1} - \right. \right.$$

$$\left. - 4k_1 \lambda^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k \rho)}{\mu_k^2 J_0(\mu_k)} \frac{1}{\left(\mu_k sh \frac{\mu_k l}{\lambda} + k_1 \lambda ch \frac{\mu_k l}{\lambda} \right)} \right\} D_0 - \frac{2l}{\pi \lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k I_1 \left(\frac{k\pi}{l} \lambda \right) D_k}{k} -$$

$$- \frac{2\pi}{l} k_1 \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k \rho)}{J_0(\mu_k)} \frac{1}{\left(\mu_k sh \frac{\mu_k l}{\lambda} + k_1 \lambda ch \frac{\mu_k l}{\lambda} \right)} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m I_1 \left(\frac{m\pi}{l} \lambda \right) t_{k,m} D_m +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} I_0 \left(\frac{k\pi}{l} \lambda \rho \right) D_k + \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\mu_k \rho) \frac{\mu_k ch \frac{\mu_k l}{\lambda} - k_1 \lambda sh \frac{\mu_k l}{\lambda}}{\mu_k sh \frac{\mu_k l}{\lambda} + k_1 \lambda ch \frac{\mu_k l}{\lambda}} A_k - A_0^{(1)} R \left(l_1 + \frac{1}{k_1^1} \right) -$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\mu_k \rho) A_k^1 \frac{\mu_k ch \frac{\mu_k l_1}{\lambda^1} + k_1^1 \lambda^1 sh \frac{\mu_k l_1}{\lambda^1}}{\mu_k sh \frac{\mu_k l_1}{\lambda^1} + k_1^1 \lambda^1 ch \frac{\mu_k l_1}{\lambda^1}} \right\} h_0$$

Помноживши обидві частини рівнянь (19) на $\rho, \rho J_0(\mu_n \rho)$ і про інтегрувавши по ρ в межах від 0 до 1, із врахуванням ортогональності функцій Бесселя, одержимо співвідношення, які зв'язують коефіцієнти $A_k^{(1)}$ з A_k, D_k :

$$1) \quad A_0^{(1)} = \frac{\lambda_z}{\lambda_z^1} A_0, \quad A_n^{(1)} = \frac{\lambda_z}{\lambda_z^1} \frac{\lambda^1}{\lambda} A_n \quad (20)$$

$$2) \quad \frac{1}{2} A_0 R \left[\frac{\lambda_z}{h_0 R} + \frac{1}{k_1} + l \right] + D_0 R^2 \left[\frac{1}{4} \lambda^2 - l^2 - \frac{2l}{k_1} \right] + \frac{l}{\pi \lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k I_1 \left(\frac{k\pi}{l} \lambda \right) D_k}{k} -$$

$$- \frac{l}{\pi \lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_1 \left(\frac{k\pi}{l} \lambda \right)}{k} D_k + \frac{1}{2} A_0^{(1)} R \left(l_1 + \frac{1}{k_1^1} \right) = \frac{1}{2} T_0 \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
3) \quad & \left[\frac{\lambda_z \mu_n}{Rh_0 \lambda} - \frac{\mu_n ch \frac{\mu_n l}{\lambda} - k_1 \lambda sh \frac{\mu_n l}{\lambda}}{\mu_n sh \frac{\mu_n l}{\lambda} + k_1 \lambda ch \frac{\mu_n l}{\lambda}} \right] A_n + \frac{\mu_n ch \frac{\mu_n l}{\lambda} + k_1 \lambda^1 sh \frac{\mu_n l}{\lambda}}{\mu_n sh \frac{\mu_n l}{\lambda} + k_1 \lambda^1 ch \frac{\mu_n l}{\lambda}} A_n^{(1)} + \left(-\frac{4\lambda^2}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)} + \right. \\
& \left. + \frac{4k_1 \lambda^3}{J_0(\mu_n) \mu_n^2 \left(\mu_n sh \frac{\mu_n l}{\lambda} + k_1 \lambda ch \frac{\mu_n l}{\lambda} \right)} \right) D_0 + \frac{2\pi}{l J_0(\mu_n)} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m k_1 \lambda}{\mu_n sh \frac{\mu_n l}{\lambda} + k_1 \lambda ch \frac{\mu_n l}{\lambda}} - 1 \right] t_{n,m} \times \\
& \times m I_1 \left(\frac{m\pi}{l} \lambda \right) D_m \Big] = 0
\end{aligned} \tag{22}$$

Ввівши позначення: $A_0 R = \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} C_0^{(1)} T_0$, $A_k = \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} T_0 C_k^1$, $A_0^{(1)} R = C_0^{(1)} T_0$, $A_k^{(1)} = \frac{\lambda_z^1}{\lambda} T_0 C_k^{(1)}$,
 $D_0 R^2 = C_0^{(2)} T_0$, $k I_1 \left(\frac{k\pi}{l} \lambda \right) D_k = C_k^{(2)} \left(k = \overline{1, \infty} \right)$, $h_0^1 = \frac{h_0 R}{\lambda_z}$. \tag{23}

безмежні системи лінійних рівнянь (13) і (21),(22) приймуть вигляд:

$$\begin{aligned}
\alpha_{0,0}^{(1)} C_0^{(1)} + \alpha_{0,0}^{(2)} C_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{0,k}^{(2)} C_k^{(2)} &= 1 \\
\alpha_{n,n}^{(1)} C_n^{(1)} + \alpha_{n,0}^{(2)} C_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{n,k}^{(2)} C_k^{(2)} &= 0
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{0,0}^{(1)} C_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{0,k}^{(1)} C_k^{(1)} + \beta_{0,0}^{(2)} C_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{0,k}^{(2)} C_k^{(2)} &= 1 \\
\beta_{n,0}^{(1)} C_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{n,k}^{(1)} C_k^{(1)} + \beta_{n,n}^{(2)} C_n^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{n,k}^{(2)} C_k^{(2)} &= 0
\end{aligned}$$

де $\alpha_{0,0}^{(1)} = \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \left(\frac{1}{h_0^1} + \frac{1}{k_1} + l \right) + l_1 + \frac{1}{k_1}$; $\alpha_{0,0}^{(2)} = \frac{1}{2} \lambda^2 - 2l^2 - \frac{4l}{k_1}$; $\alpha_{0,k}^{(2)} = \frac{2l}{\pi \lambda} [(-1)^k - 1] \frac{1}{k^2}$;

$$\alpha_{n,n}^{(1)} = \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \left(\frac{\mu_n}{h_0^1} - \frac{\mu_n ch \frac{\mu_n l}{\lambda} - k_1 \lambda sh \frac{\mu_n l}{\lambda}}{\mu_n sh \frac{\mu_n l}{\lambda} + k_1 \lambda ch \frac{\mu_n l}{\lambda}} \right) + \frac{\mu_n ch \frac{\mu_n l}{\lambda} + k_1 \lambda^1 sh \frac{\mu_n l}{\lambda}}{\mu_n sh \frac{\mu_n l}{\lambda} + k_1 \lambda^1 ch \frac{\mu_n l}{\lambda}}; \tag{25}$$

$$\alpha_{n,0}^{(2)} = \frac{4\lambda^2}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)} \left[\frac{k_1 \lambda}{\mu_n sh \frac{\mu_n l}{\lambda} + k_1 \lambda ch \frac{\mu_n l}{\lambda}} - 1 \right],$$

$$\alpha_{n,k}^{(2)} = \frac{2\pi}{l J_0(\mu_n)} \left[\frac{(-1)^k}{\mu_n sh \frac{\mu_n l}{\lambda} + k_1 \lambda ch \frac{\mu_n l}{\lambda}} - 1 \right] t_{n,k},$$

$$\beta_{0,0}^{(1)} = \frac{1}{2} l \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z}; \quad \beta_{0,k}^{(1)} = \frac{\lambda}{l} \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \frac{J_0(\mu_k)}{\mu_k} U_{k,0}; \quad \beta_{0,k}^{(2)} = \frac{2l}{\pi \lambda} \frac{(-1)^k}{k^2} + \frac{2\pi}{l^2} k_1 (-1)^k \sum_{m=1}^{\infty} e(\mu_m) t_{m,k};$$

$$\beta_{n,0}^{(1)} = \frac{l^2}{\pi^2 n^2} [(-1)^n - 1] \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z}; \quad \beta_{n,k}^{(1)} = \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \mu_k U_{k,n} J_0(\mu_k) t_{k,n};$$

$$\beta_{n,0}^{(2)} = e_{n,0}, \quad \beta_{n,n}^{(2)} = \frac{\pi}{2k_2} \lambda + \frac{1}{2} \frac{l I_0\left(\frac{\pi n}{l} \lambda\right)}{n I_1\left(\frac{\pi n}{l} \lambda\right)}; \quad \beta_{n,k}^{(2)} = -\frac{2\pi}{l} (-1)^{n+k} k_1 \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m^2 e(\mu_m) t_{m,n} t_{m,k}.$$

Формули для знаходження температури в циліндрах згідно позначень (23), матимуть вигляд:

а)

$$T(\rho, \zeta) = T_0 \left\{ 1 + \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \left(\zeta - \frac{1}{k_1} - l \right) C_0^{(1)} + \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\mu_k \rho) \frac{\mu_k ch \frac{\mu_k}{\lambda} (\zeta - l) + k_1 \lambda sh \frac{\mu_k}{\lambda} (\zeta - l)}{\mu_k sh \frac{\mu_k l}{\lambda} + k_1 \lambda ch \frac{\mu_k l}{\lambda}} C_k^{(1)} + \right.$$

$$\left. + \left[\lambda^2 \rho^2 - 2\zeta^2 - \frac{1}{2} \lambda^2 + 2l^2 + \frac{4l}{k_1} - 4k_1 \lambda^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k \rho) ch \frac{\mu_k}{\lambda} \zeta}{\mu_k^2 J_0(\mu_k)} \frac{1}{\left(\mu_k sh \frac{\mu_k l}{\lambda} + k_1 \lambda ch \frac{\mu_k l}{\lambda} \right)} \right] C_0^{(2)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{I_0\left(\frac{k\pi}{l} \lambda \rho\right) \cos \frac{k\pi}{l} \zeta}{k I_1\left(\frac{k\pi}{l} \lambda\right)} - \frac{2l}{\pi \lambda} \frac{(-1)^k}{k^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2\pi(-1)^k}{l} k_1 \lambda^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_m \rho) ch \frac{\mu_m \zeta}{\lambda} t_{m,k}}{J_0(\mu_m) \left(\mu_m sh \frac{\mu_m l}{\lambda} + k_1 \lambda ch \frac{\mu_m l}{\lambda} \right)} \right] C_k^{(2)} \} \quad (\rho < 1) \quad (26)$$

$$T^1(\rho, \zeta) = T_0 \left\{ \left(\zeta + l_1 + \frac{1}{k_1^1} \right) C_0^{(1)} + \frac{\lambda}{\lambda^1} \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\mu_k \rho) \frac{\mu_k ch \frac{\mu_k}{\lambda^1} (l_1 + \zeta) + k_1^1 \lambda^1 sh \frac{\mu_k}{\lambda^1} (l_1 + \zeta)}{\mu_k sh \frac{\mu_k l_1}{\lambda^1} + k_1^1 \lambda^1 ch \frac{\mu_k l_1}{\lambda^1}} C_k^{(1)} \right\} \quad (\rho < 1) \quad (27)$$

Якщо покласти $\lambda = \lambda^1 = 1$, то одержимо розв'язок задачі для ізотропних матеріалів [5]. Розв'язування температурної задачі зводиться до визначення постійних $C_k^{(1)}$ і $C_k^{(2)}$ ($k = 1, 2, \dots$) із двох взаємозв'язаних нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь (24), через які знаходяться температурні поля (26, 27) в будь-якій точці циліндрів. Дана система рівнянь є квазірегулярною при будь-яких співвідношеннях теплофізичних характеристик тіл. Враховуючи це, розв'язок і знаходимо методом редукції із урізаних систем. Для числових підрахунків розв'язувались системи 30 – 40 порядку, що забезпечувало точність до 5%.

Приведемо результати числового аналізу температури в зоні контакту в залежності від різних значень контактної провідності $h_0^{(1)}$ і коефіцієнтів теплопровідності λ , λ^1 в припущенні що : $\lambda_z = \lambda_z^1 = 2$; $l = 1$; $l_1 = 1$; $k_1 = \infty$; $k_1^1 = \infty$, $k_2 = \infty$.

На рис.1. наведені графіки розподілу температури $\alpha_1 = \frac{T(p)}{T_0}$ вздовж безрозмірної

координати ρ у випадку ідеального теплового контакту при різних значеннях параметрів $\lambda = \lambda^1$ в зоні контакту двох тіл. Криві 1,2,3, побудовані по результатах обчислень температури у верхньому циліндрі в залежності від параметрів $\lambda = \lambda^1$.

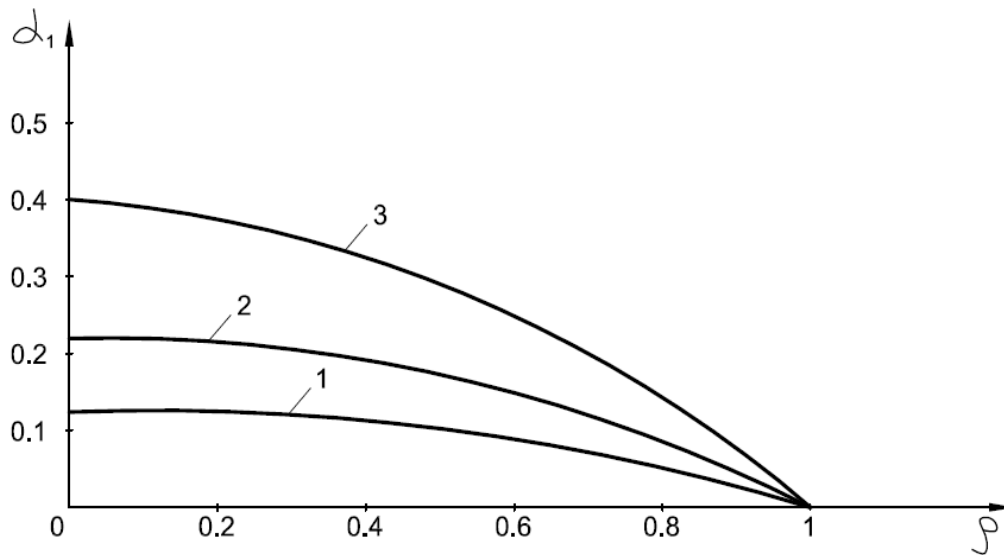


Рис.1. Графік розподілу температури $\alpha_1 = \frac{T(p)}{T_0}$ у зоні контакту, криві 1 – $\lambda = 0,1$;
2 – $\lambda = 0,5$; 3 – $\lambda = 1$.

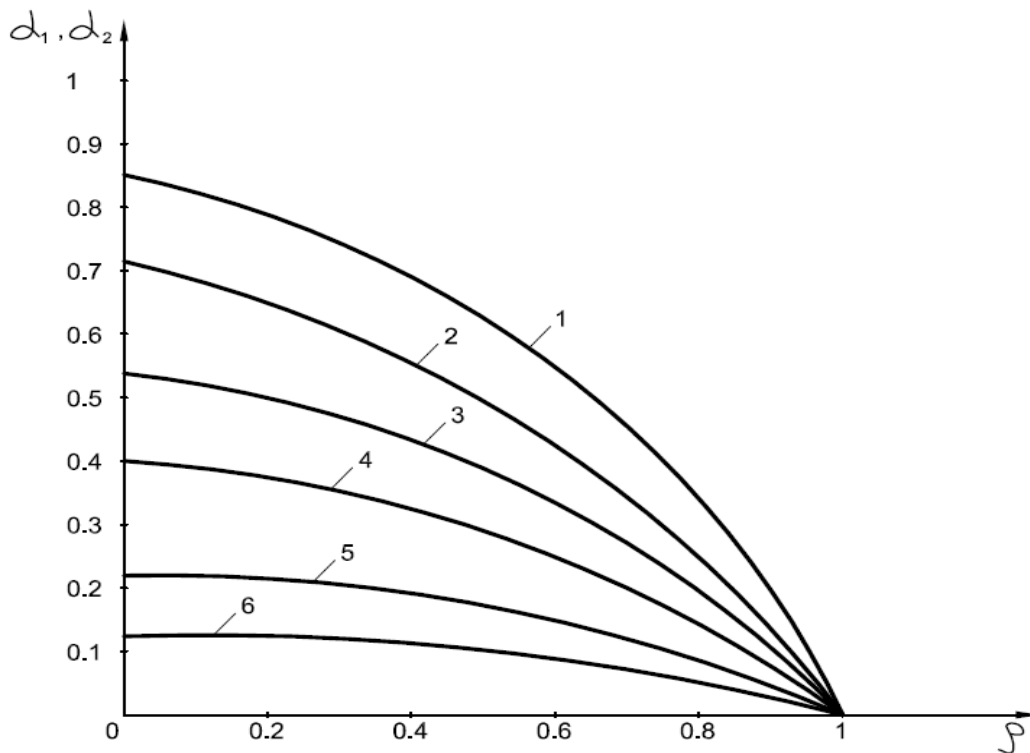


Рис.2. Графіки розподілу температури $\alpha_1 = \frac{T}{T_0}$, $\alpha_2 = \frac{T^1}{T_0}$ у зоні контакту $\lambda = \lambda^1 = 1$,
криві 1 – $h_0^1 = 0,1$; 2 – $h_0^1 = 1$; 3 – $h_0^1 = 10$; 4 – $h_0^1 = \infty$; 5 – $h_0^1 = 1$; 6 – $h_0^1 = 0,1$.

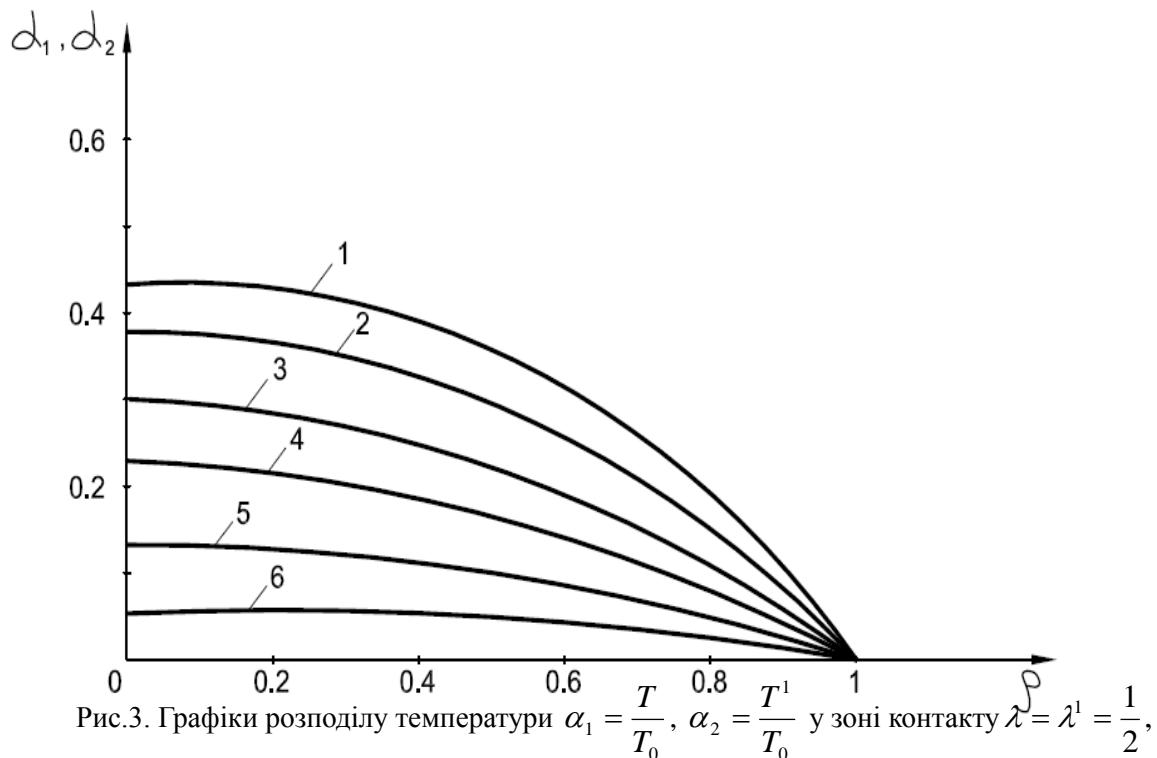


Рис.3. Графіки розподілу температури $\alpha_1 = \frac{T}{T_0}$, $\alpha_2 = \frac{T^1}{T_0}$ у зоні контакту $\lambda = \lambda^1 = \frac{1}{2}$,

криві 1 – $h_0^1 = 0,1$; 2 – $h_0^1 = 1$; 3 – $h_0^1 = 10$; 4 – $h_0^1 = \infty$; 5 – $h_0^1 = 1$; 6 – $h_0^1 = 0,1$.

На рис.2. і рис.3. наведені графіки розподілу температури вздовж безрозмірної координати ρ при $\lambda = \lambda^1 = 1$, $\lambda = \lambda^1 = \frac{1}{2}$ і різних значеннях контактної провідності h_0^1 в зоні контакту двох тіл. Криві 1,2,3 побудовані по результатам обчислень температури у верхньому циліндрі; а криві 4,5,6 – у нижньому циліндрі в залежності від контактної провідності h_0^1 .

Висновок. Застосувавши метод Фур'є для рівняння Лапласа (7), розв'язок температурної задачі зведено до визначення деяких постійних із двох взаємозв'язаних нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, через які знаходяться температурні поля в будь-якій точці циліндрів. Числовий приклад показує, що контактна провідність $h_0^{(1)}$ і анізотропія матеріалів значно впливають на розподіл температури в зоні контакту системи двох циліндрів.

1.Грилицкий Д.В.Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости /Д.В.Грилицкий, Я.М.Кизыма – Львов: Изд-во при Львов.ун.-те, 1981,-135с.

2.Коваленко А.Д. Основы термоупругости /- К:Наук. Думка, 1970,-304с.

3.Кизыма Я.М. Осесимметричная температурная задача для систем тел цилиндр-полупространство / Ярослав Кизыма, Богдан Окрепкий // Прикладная механика.- 1975.- Т.11, вып.12.-С.37-44.

4.Окрепкий Б.С. Осесимметрична температурна задача для системи тіл циліндр-півпростір при неідеальному тепловому контакті / Богдан Окрепкий, Марія Шелестовська// Вісник Тернопільського державного технічного університету.-2005.-№3.-С.23-27.

5.Окрепкий Б.С., Новосад І.Я. Осиметрична температурна задача для систем двох контактуючих кругових циліндрів // Міжвузівський збірник за напрямком «Інженерна механіка» «Наукові нотатки», ЛНТУ, Вип.№28.-Луцьк,2010.-С.367-373.

6.Singh A. Axisymmetrical thermal stressrs in transversely isotropic bodies / Arch., mech. Stosowanej.-1960/-vol/12, №3.