

УДК 539.3

А. О. Сяський, Н. В. Шинкарчук

Рівненський державний гуманітарний університет

КУСКОВО-ОДНОРІДНА ОРТОТРОПНА ПЛАСТИНКА З ЕЛІПТИЧНИМ РОЗРІЗОМ ЗА УМОВИ КОНТАКТУВАННЯ ЙОГО БЕРЕГІВ

Досліджено напружено-деформований стан на контурі еліптичного отвору ортотропної пластинки, який частково спаяний з абсолютно жорстким диском, за умови контактування берегів розрізу. Система сингулярних інтегральних рівнянь задачі розв'язується методом механічних квадратур і колокації. Розглянуто випадок повного змикання берегів розрізу.

Ключові слова: ортотропна пластинка, напружений стан, контактні зусилля, жорсткий диск, сингулярні рівняння.

Вступ. Кусково-однорідні пластинки, як тонкостінні елементи конструкцій, широко використовуються в інженерній практиці. Їх міцність великою мірою залежить від наявності на лінії розділу матеріалів дефектів типу тріщин (розрізів), що виникли в процесі виготовлення або експлуатації пластинчастої конструкції. З'ясування питання, чи береги дефекту при дії зовнішнього навантаження розходяться, чи контактують, має важливе значення з погляду забезпечення непроникності або герметичності конструкції.

Дослідження контактної взаємодії берегів розрізів по дузі кола в кусково-однорідних ізотропних і ортотропних пластинках, які перебувають в умовах узагальненого плоского напруженого стану, зведенням до задачі лінійного спряження проведено в роботах [1-3].

Подаючи компоненти вектора зміщення контурних точок інтегральними залежностями від компонентів тензора напружень з логарифмічними ядрами, в [4] побудовано систему сингулярних інтегральних рівнянь для кусково-однорідної ізотропної пластинки з криволінійним розрізом на лінії розмежування матеріалів за умови контактування його берегів при її силовому навантаженні в центрі диска. Аналогічна задача для ортотропної пластинки розглянута в [5].

Пропонується новий підхід до розрахунку напруженого стану в кусково-однорідній ортотропній пластинці з еліптичним розрізом, береги якого перебувають у частковому або повному гладкому контакті, при її навантаженні на нескінченності.

Постановка задачі. Розглядається пластинчаста конструкція, що містить нескінченну ортотропну пластинку товщиною $2h$ з еліптичним отвором, в який без зазору і натягу вставлено абсолютно жорсткий диск. Середня площина пластинки віднесена до системи прямокутних (x, y) і полярних (r, δ) координат з полюсом в центрі отвору (рис. 1). Вважається, що головні осі ортотропії матеріалу пластинки співпадають з координатними осями і осями еліпса.

На ділянці $\Gamma_3 = [\pi + \alpha_1^*, \pi + \beta_1^*]$ контуру отвору Γ диск спаяний з пластинкою. Розглянута конструкція перебуває в умовах однорідного напруженого стану на нескінченності, створеного рівномірно розподіленими зусиллями p і q , які діють в напрямках координатних осей. Зовнішнє навантаження на диск відсутнє.

Внаслідок дії зовнішнього навантаження контур пластинки на ділянці $\Gamma_1 = [\alpha_0^*, \beta_0^*]$ вступає в контакт з контуром диска. На ділянках $\Gamma_2 = [\beta_0^*, \pi + \alpha_1^*] \cup [\pi + \beta_1^*, 2\pi + \alpha_0^*]$ контакт між пластинкою і диском відсутній. Тут $\alpha_0^*, \beta_0^*, \pi + \alpha_1^*, \pi + \beta_1^*$ – полярні кути початку та кінця ділянок контакту та спаю.

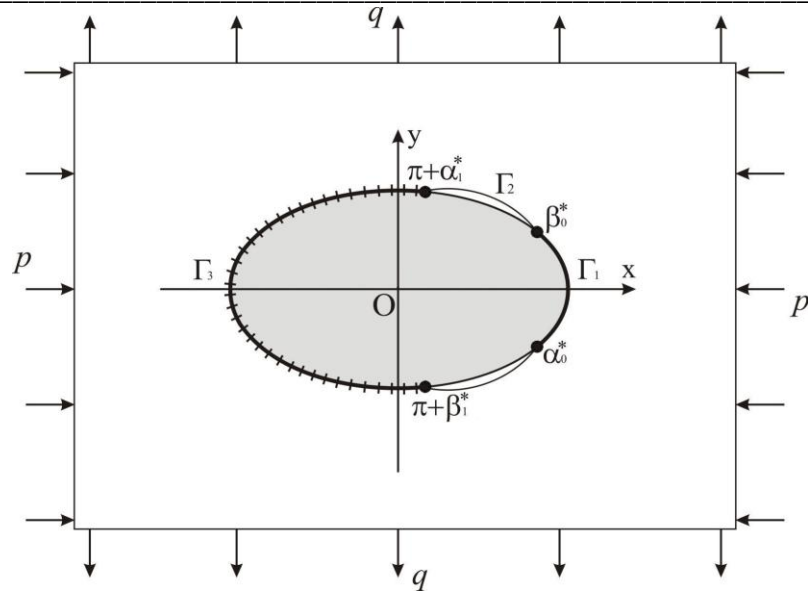


Рис. 1. Розрахункова схема задачі

Розв'язок задачі полягає у визначенні компонентів напружено-деформованого стану на контурі отвору пластинки а також встановленні умов, що накладаються на зовнішнє навантаження та величину і положення зони спаю, при виконанні яких контакт між пластинкою і диском буде суцільним.

Інтегральні рівняння задачі. Співвідношення для компонентів вектора зміщення контурних точок пластинки (u, v) та жорсткого диска (u^0, v^0) при заданому навантаженні запишемо наступним чином [6]

$$\begin{aligned}
 2E_x h u &= (\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt - \cos \lambda [(\beta_1 + \beta_2) b p + a p + \beta_1 \beta_2 a q] + \\
 &+ \frac{\beta_1 + \beta_2}{\pi} \left[\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \int_{\pi + \alpha_1}^{\pi + \beta_1} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt \right] + c_1; \\
 2E_x h v &= (\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt + \beta_1 \beta_2 \sin \lambda [(\beta_1 + \beta_2) a q + b p + \beta_1 \beta_2 b q] - \\
 &- \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \left[\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \int_{\pi + \alpha_1}^{\pi + \beta_1} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt \right] + c_2, \quad \lambda \in \gamma; \\
 (u^0 + i v^0) &= U_0 + i V_0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

де E_x, ν_x – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини в напрямку осі Ox ; β_1, β_2 – корені характеристичного рівняння [7]; c_1, c_2 – сталі;

$$\begin{aligned}
 f_1 + i f_2 &= i \int_{\alpha_0}^{\lambda} (T_\rho^* + i S_{\rho\lambda}^*) e^{it} dt; \quad T_\rho^* + i S_{\rho\lambda}^* = (T_\rho + i S_{\rho\lambda}) \omega'(\sigma); \quad \sigma = e^{i\lambda}; \\
 z = \omega(\xi) &= R_0 \left(\xi + \frac{\varepsilon}{\xi} \right) -
 \end{aligned} \tag{2}$$

функція [7], яка здійснює конформне відображення зовнішності одиничного кола $\gamma (\rho_0 = 1)$ в площині $\xi = \rho e^{i\lambda}$ на область, яку займає пластинка в площині $z = x + iy$; $R_0 = \frac{a+b}{2} = 1$;

$\varepsilon = \frac{a-b}{a+b}$; $a = 1 + \varepsilon, b = 1 - \varepsilon$ – півосі еліпса; ε – ексцентриситет еліпса; (ρ, λ) – полярна

система координат в площині ξ ; $i = \sqrt{-1}$; $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ – образи кутів $\alpha_0^*, \beta_0^*, \alpha_1^*, \beta_1^*$ при відображенні (2); $T_\rho, S_{\rho\lambda}$ – нормальні та дотичні зусилля на контурі Γ ; U_0, V_0 – компоненти жорсткого зміщення диска.

Граничні умови задачі в зоні контакту при відсутності сил тертя запишуться у вигляді [8]

$$a(\lambda)u + b(\lambda)v = a(\lambda)U_0 + b(\lambda)V_0; \quad S_{\rho\lambda} = 0, \quad \lambda \in \gamma_1, \quad (3)$$

а в зоні спаю запишуться так

$$u = U_0; \quad v = V_0, \quad \lambda \in \gamma_3. \quad (4)$$

Тут γ_1, γ_3 – образи ділянок Γ_1, Γ_3 при відображенні (2);

$$a(\lambda) + ib(\lambda) = (\alpha + i\beta)e^{i\lambda}; \quad \alpha + i\beta = \omega'(\sigma); \quad \alpha = 1 - \varepsilon \cos 2\lambda; \quad \beta = \varepsilon \sin 2\lambda.$$

Підставляючи (1) в граничні умови (3), (4), одержимо систему чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами для визначення функцій f_1', f_2'

$$\begin{aligned} a(\lambda) \left[(\beta_1\beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\pi} \left[\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt \right] - \right. \\ \left. - \cos \lambda [(\beta_1 + \beta_2)bp + ap + \beta_1\beta_2aq] \right] + b(\lambda) \left[(\beta_1\beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt + \beta_1\beta_2 \sin \lambda \times \right. \\ \left. \times [(\beta_1 + \beta_2)aq + bp + \beta_1\beta_2bq] - \frac{(\beta_1 + \beta_2)\beta_1\beta_2}{\pi} \left[\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt \right] \right] = a(\lambda)\tilde{c}_1 + b(\lambda)\tilde{c}_2, \quad f_1'(\lambda)a(\lambda) + f_2'(\lambda)b(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \gamma_1; \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\beta_1\beta_2 - \nu_x) \left[\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) dt + \int_{\pi+\alpha_1}^{\lambda} f_1'(t) dt \right] + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\pi} \left[\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \right. \\ \left. + \int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt \right] = \tilde{c}_1 + \cos \lambda [(\beta_1 + \beta_2)bp + ap + \beta_1\beta_2aq]; \\ (\beta_1\beta_2 - \nu_x) \left[\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) dt + \int_{\pi+\alpha_1}^{\lambda} f_2'(t) dt \right] - \frac{\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \left[\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \right. \\ \left. + \int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt \right] = \tilde{c}_2 - \beta_1\beta_2 \sin \lambda [(\beta_1 + \beta_2)aq + bp + \beta_1\beta_2bq], \quad \lambda \in \gamma_3, \quad (6) \end{aligned}$$

де $\tilde{c}_1 = 2E_x h U_0 - c_1$, $\tilde{c}_2 = 2E_x h V_0 - c_2$.

Умови силової рівноваги диска [9], які служать для визначення сталих \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 , можна перетворити до вигляду

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) dt + \int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} f_2'(t) dt = 0; \quad \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) dt + \int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} f_1'(t) dt = 0. \quad (7)$$

Контактні зусилля на контурі отвору пластинки, через функції $f_1'(\lambda), f_2'(\lambda)$ визначаються за формулою [5]

$$T_\rho + iS_{\rho\lambda} = \frac{(f_2'(\lambda) - if_1'(\lambda))(a(\lambda) - ib(\lambda))}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \lambda \in \gamma, \quad (8)$$

а кільцеві зусилля T_λ знаходимо із співвідношення [5]

$$T_\lambda = -T_\rho - \frac{(1+\beta_1)(1+\beta_2)}{4\Delta_1\Delta_2} [((a+b)l_4 \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda + l_1 l_2)R_1 + ((a+b)l_1 - l_2 l_4)R_2 \sin \lambda \cos \lambda] - \frac{(1-\beta_1)(1-\beta_2)}{4\Delta_1\Delta_2} [l_4(b-a) \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda - l_1 l_3] \tilde{R}_3 + (l_4 l_3 + (b-a)l_1) \tilde{R}_4 \sin \lambda \cos \lambda + T_\lambda^0. \quad (9)$$

Тут введено позначення

$$T_\lambda^0 = \frac{a^2 \sin^2 \lambda + b^2 \cos^2 \lambda}{\Delta_1 \Delta_2} [q\beta_1 \beta_2 (l_4 \cos^2 \lambda - l_1) - p(l_1 + l_4 \sin^2 \lambda)];$$

$$l_1 = a^2 \sin^2 \lambda - b^2 \beta_1 \beta_2 \cos^2 \lambda; \quad l_2 = a \sin^2 \lambda - b \cos^2 \lambda; \quad l_3 = a \sin^2 \lambda + b \cos^2 \lambda;$$

$$l_4 = ab(\beta_1 + \beta_2); \quad \Delta_j = a^2 \sin^2 \lambda + b^2 \beta_j^2 \cos^2 \lambda, \quad (j=1,2);$$

$$R_1 = -2T_\rho^* + \frac{1}{\pi} \int_\gamma [T_\rho^*(t) - S_{\rho i}^*(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2}] dt;$$

$$R_2 = -2S_{\rho i}^* + \frac{1}{\pi} \int_\gamma [S_{\rho i}^*(t) + T_\rho^*(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2}] dt;$$

$$R_3 = -4T_\rho^* - R_1; \quad R_4 = 4S_{\rho i}^* + R_2;$$

$$\tilde{R}_3 = R_3 \cos 2\lambda + R_4 \sin 2\lambda; \quad \tilde{R}_4 = R_4 \cos 2\lambda - R_3 \sin 2\lambda.$$

Співвідношення (5)-(9) визначають математичну модель поставленої задачі. Розглянемо її часткові випадки:

- якщо в (5)-(9) покласти $\beta_1 = \beta_2 = 1$, то одержимо розв'язок задачі для ізотропної пластинки з еліптичним отвором [5];
- приймаючи в (5)-(9) $\varepsilon = 0$, знаходимо відповідну систему співвідношень для ортотропної пластинки з круговим отвором.

Вибором величини і положення зони спаю та зовнішнього навантаження можна добитися, щоб береги розрізу змикалися повністю ($\pi + \alpha_1 = \beta_0; \beta_1 = \pi + \alpha_0$) або зона контакту між пластинкою і диском була відсутня ($\alpha_0 = \beta_0$). За умов $\beta_0 > \pi + \alpha_1, \beta_1 > \pi + \alpha_0$ зона контакту буде налягати на зону спаю. В цьому випадку нормальні зусилля на контурі Γ будуть неперервними.

Наближений розв'язок задачі. Знаходження точного розв'язку системи (5)-(6) за умов силової рівноваги (7) пов'язано із значними математичними труднощами.

Для наближеного розв'язання задачі перейдемо в системі (5)-(7) до проміжку інтегрування $[-1;1]$. Це можна зробити наступною заміною

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2} x + \frac{b_0 + a_0}{2}; \quad \operatorname{tg} \frac{\tilde{\lambda}}{2} = \frac{\tilde{b}_0 - \tilde{a}_0}{2} \tilde{x} + \frac{\tilde{b}_0 + \tilde{a}_0}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2} s + \frac{b_0 + a_0}{2}; \quad \operatorname{tg} \frac{\tilde{t}}{2} = \frac{\tilde{b}_0 - \tilde{a}_0}{2} \tilde{s} + \frac{\tilde{b}_0 + \tilde{a}_0}{2};$$

$$a_0 = \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2}; \quad b_0 = \operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2}; \quad \tilde{a}_0 = \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}; \quad \tilde{b}_0 = \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2};$$

$$\lambda, t \in [\alpha_0; \beta_0]; \quad \tilde{\lambda}, \tilde{t} \in [\alpha_1; \beta_1]; \quad x, s, \tilde{x}, \tilde{s} \in [-1;1].$$

Враховуючи, що контактні зусилля на кінцях зони контакту дорівнюють нулю, а на кінцях зони спаю мають кореневу особливість з локальною осциляцією, наближений розв'язок задачі (5)-

(9) на підставі [5,9] можна вибрати у вигляді $f'_j(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad f'_j(\tilde{x}) = \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{x}^2}}, \quad (j=1,2)$ і

реалізувати методом механічних квадратур та колокації.

Для ортотропної пластинки досліджено вплив на контурні контактні $T_\rho, S_{\rho i}$ і кільцеві

T_λ зусилля та величину зони контакту ортотропії матеріалу а також зовнішнього навантаження.

Результати числового розрахунку зусиль при $\varepsilon = \pm 0.2$; $\alpha_1 = -\frac{2\pi}{3}$, $\beta_1 = \frac{2\pi}{3}$; $p = 1, q = 0$

ілюструються на рис. 2-4. Характеристики досліджуваних матеріалів і лінії, які відповідають їм на рисунках, наведено в таблиці 1. В таблиці 2 наведено значення граничних полярних кутів, що визначають зону контакту. В цій же таблиці подано результати розрахунку величини зони спаю ($\alpha_1^*; \beta_1^*$), для якої при заданому навантаженні береги розрізу змикаються повністю.

Таблиця 1

Характеристики досліджуваних ортотропних матеріалів і лінії, які їм відповідають на рисунках

матеріал пластинки					В ид Л інії
ізотропний (ІМ)			.300		—
скло-епоксид (СЕ)	.271	.762	.250		-----
графіт-епоксид (ГЕ)	.999	.714	.250	5	-----
епоксид-скло (ЕС)	.440	.310	.083	/3	-----
епоксид-графіт (ЕГ)	.143	.401	.010	/25	---

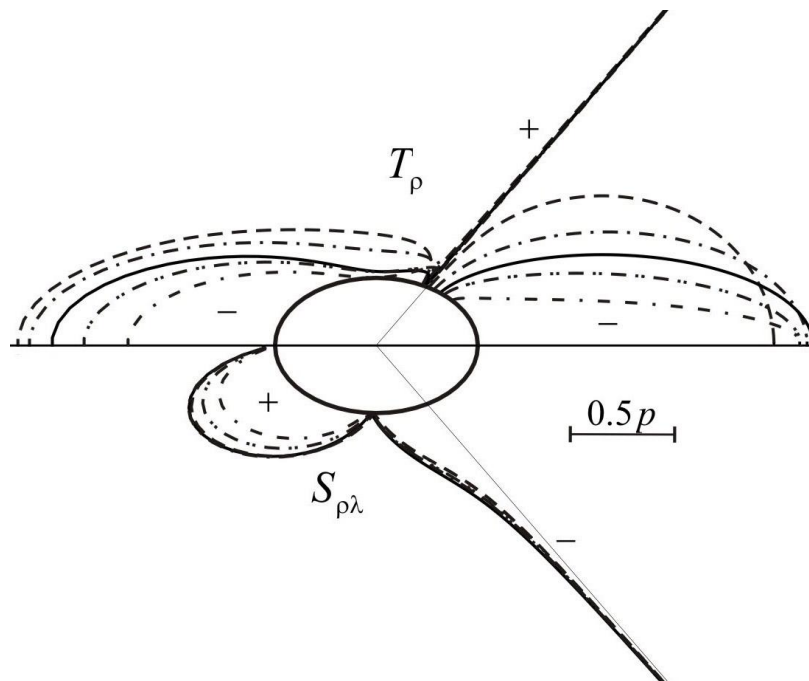


Рис. 2. Епюри розподілу зусиль T_p, S_{ρ_l} на контурі отвору при $\varepsilon = 0.2$

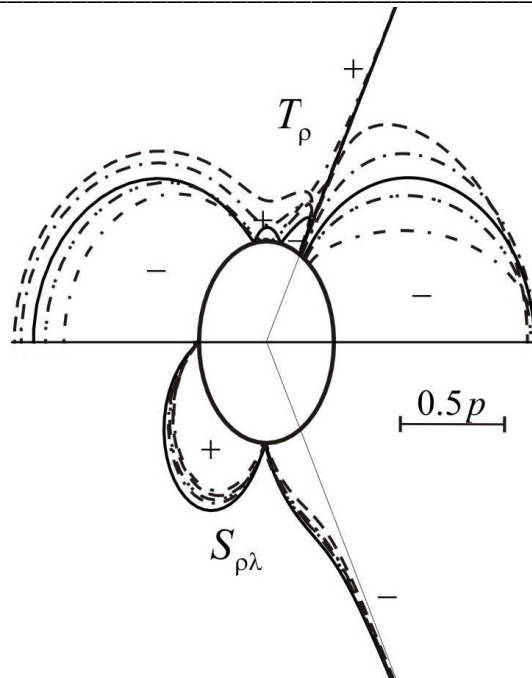


Рис. 3. Епюри розподілу зусиль $T_\rho, S_{\rho\lambda}$ на контурі отвору при $\varepsilon = -0.2$

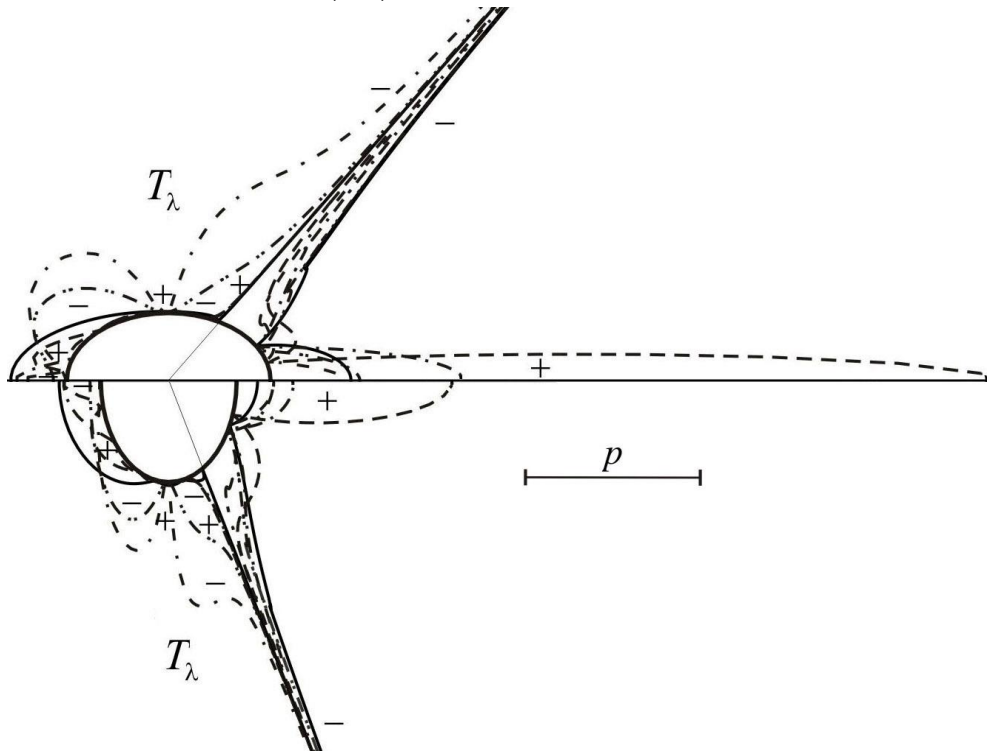


Рис. 4. Епюри розподілу зусиль T_λ на контурі отвору при $\varepsilon = \pm 0.2$

Таблиця 2

Значення граничних полярних кутів, що визначають зону контакту і зону спаю

матеріал пластинки	$\beta_0^* = -\alpha_0^*$ (град)		$\beta_1^* = -\alpha_1^*$ (град)	
	$\varepsilon =$	$\varepsilon =$	$\varepsilon =$	$\varepsilon =$
ІМ	66.	39.	152	1

	02	66	.0	61.8
СЕ	64. 85	36. 95	155 .7	1 65.3
ГЕ	61. 18	30. 77	160 .0	1 68.3
ЕС	68. 00	44. 27	144 .0	1 56.9
ЕГ	68. 83	47. 99	123 .1	1 42.5

Аналіз одержаних результатів приводить до **висновків**:

- ✓ форма отвору пластинки суттєво впливає на величину зони контакту. При цьому максимальні нормальні зусилля на ділянці контакту виникають в точках контуру з найбільшою кривиною;
- ✓ ортотропія матеріалу вносить значний вплив на розподіл нормальних і кільцевих зусиль в зоні контакту;
- ✓ вплив ортотропії на розподіл нормальних і кільцевих зусиль в зоні спаю проявляється в меншій мірі;
- ✓ в крайніх точках зони спаю нормальні, дотичні і кільцеві зусилля необмежені, за межами цієї зони необмежені тільки кільцеві зусилля;
- ✓ величина зони контакту для всіх форм отвору зменшується із збільшенням $\frac{E_1}{E_2}$.

Запропонований метод може бути використаний при розв'язуванні аналогічної задачі за наявності двох зон контакту.

Література

1. Грилицький Д.В. Напряженное состояние анизотропной пластинки с впаянным изотропным ядром при наличии разрезом на спае / Грилицький Д.В., Луцишин Р.М. // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1962. – № 2. – С. 159-165.
2. Грилицький Д.В. Напруження в пластинках з коловою лінією розмежування граничних умов / Д.В. Грилицький, Р.М. Луцишин. – Львів: Видавництво "Вища школа" при ЛДУ, 1975. – 111 с.
3. Сяський В.А. Мішана контактна задача для нескінченної пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска / В.А. Сяський, А.О. Сяський // Волинський математичний вісник. – 1998. – Вип. 5. – С. 139–146.
4. Сяський А.О. Мішана контактна задача для пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска / А.О. Сяський, Н.В. Шинкарчук // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 7 (16) – Рівне : РДГУ, 2010. – С. 199–209.
5. Сяський А. Мішана контактна задача для ортотропної пластинки з еліптичним отвором і жорсткого диска / А. Сяський, Н. Шинкарчук // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – Тернопіль, 2010. – Т.15, № 4. – С. 7-13.
6. Комбель С. Посадка жорсткого диска в еліптичний отвір нескінченної ортотропної пластинки / С. Комбель // машинознавство. – 2003. – № 8. – С. 25-31.
7. Лехницький С.Г. Анизотропные пластинки / Лехницький С.Г. – М. : Гостехиздат, 1957. – 464 с.
8. Сяський А.О. Граничні умови контактних задач для нескінченної пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска / А.О. Сяський, С.М. Комбель // Волинський математичний вісник. – 2002. – Вип. 9. – С. 93–97.
9. Трохимчук О. Тиск системи двох штампів з кутовими точками на частково підсилений контур еліптичного отвору ортотропної пластинки / О. Трохимчук, А. Сяський // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – Тернопіль, 2010. – Т.15, № 1. – С. 14-20.