УДК 515.2С.І.
С.І.Пустюльга, В.Р.Самостян, Ю.В.Клак, А.Хомич
Луцький національний технічний університет

ДИСКРЕТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАМКНУТИХ ТРАЄКТОРІЙ ЧИСЛОВИМИ ПОСЛІДОВНОСТЯМИ

В роботі розглядаються процеси формування за заданими вихідними умовами зрівноважених дискретних моделей замкнутих гладких траєкторій числовими послідовностями. Досліджено вплив розподілу складових навантаження у вузлах моделі на параметри їх гладкості. Запропоновані алгоритми переходу від дискретних моделей замкнутих кривих до їх неперервних аналогів.

Постановка проблеми. В умовах високоточного виробництва, як правило, всі контури деталей визначаються у вигляді кривих, складених із кусків гладких лекальних ліній. Різні технологічні умови можуть вимагати від кривої наявності тих або інших геометричних характеристик. Так, наприклад, до конструйованих обводів у точках стикування можуть ставитися ряд вимог відносно їх гладкості із забезпеченням або спільної дотичної у точці, або рівних радіусів кривини кривих, що стикуються, і так далі. Таким чином, для успішної роботи, інженер повинен добре знати різні геометричні характеристики кривих, уміти їх інтерпретувати і використовувати [1] .

У багатьох траєкторних задачах шкідливими є різкі зміни кривини або стрибки кривини на контурі. До таких задач можна віднести проектування трубопроводів, корпусів автотранспортних засобів, космічних апаратів і та ін. Однією із основних вимог при цьому є мінімізація турбулентних завихрень, які істотно залежать від форми профілю проектованого контуру і, зокрема, від стрибків (або різких перепадів) кривини на множині його точок. Аналогічна ситуація виникає при розробці профілів кулачкових механізмів (різкі зміни кривини викликають удари і поштовхи), стикуванні рейок і розв'язанні подібних практичних задач механіки і гідро -аеродинаміки. Для вирішення такого роду завдань потрібні не просто гладкі замкнуті лінії, а криві з плавною зміною кривини або з іншими подібними властивостями. Однак використання кривих з неперервною кривиною не завжди представляється можливим через технологічні та алгоритмічні особливості, а застосування кусків кривих з кусково-неперервною кривиною - не завжди досягає очікуваного ефективного результату. Вищеназвані проблеми можуть, у ряді випадків, зняти дискретні методи моделювання замкнутих одновимірних образів з певними геометричними властивостями. При цьому важливими характеристиками створюваних моделей залишаються: дискретний аналог гладкості утворених точкових множин, наявність особливих точок, орієнтація моделі кривої, значення дискретних аналогів кривини у вузлах, площа замкнутої області, довжина дискретної моделі ділянки кривої і т. д.

Аналіз останніх досліджень. Найбільш досліджений статико-геометричний метод формування дискретно представлених образів із рівновагою у вузлах моделі [2], маючи низку суттєвих переваг над іншими дискретними методами завдяки практично необмеженій кількості вільних параметрів для врахування вихідних умов, практично не використовувався для моделювання дискретних аналогів замкнутих кривих, які можна було б ефективно використовувати для побудови гладких замкнутих траєкторій у машинобудуванні.

Математичний апарат числових послідовностей, адекватний системам рівнянь статико-геометричного методу, був запропонований у роботі [3]. Однак використання числових послідовностей для дискретного моделювання замкнутих кривих із певними геометричними характеристиками в даній роботі теж не розглядалося. Відтак, розробка підходів та алгоритмів дискретного моделювання кривих такого класу за допомогою апарату числових послідовностей може суттєво спростити розв'язання цілої низки практичних задач.

Формування цілей роботи. Метою даної роботи є розробка способів та алгоритмів дискретного моделювання зрівноважених замкнутих кривих з визначеними геометричними характеристиками за допомогою математичного апарату числових послідовностей.

Основна частина. При дискретному геометричному моделюванні одновимірних образів числовими послідовностями основним формоутворюючим фактором є вектор зовнішнього формоутворюючого навантаження, прикладений до вузла моделі. Навантаження або його координатні складові у багатьох випадках дають можливість прогнозувати динаміку зміни геометрії моделі, виражати геометричні характеристики формованого образу через параметри складових навантаження, змінювати значення навантаження на вузли образу у процесі можливих ітерацій. При цьому графік функції навантаження в розрахованих точках моделі однозначно характеризує дискретний аналог гладкості на множині вузлів формованого образу. Якщо функція розподілу навантаження є дискретним аналогом неперервної функції то, відповідно до цього, буде забезпечуватись і гладкість моделі. При наявності особливих точок на графіку навантаження втрачається гладкість між сформованими вузлами модельованої кривої, а при наявності стрибків навантаження у точках формованої моделі з'являться точки розривів. Вектори навантаження слугують крім того вільними параметрами для врахування практично необмеженої кількості вихідних даних та умов при дискретному моделюванні одновимірних образів. Процес дискретного моделювання зрівноважених замкнутих кривих числовими послідовностями відповідно до роботи [3] можна описати у параметричному вигляді наступними рівняннями:

$$\begin{aligned} x_n &= (1-\frac{n}{N})x_1 + \frac{n}{N}x_N + \frac{n}{N}\sum_{v=1}^{N-1}\sum_{s=1}^{v} kP_s^x - \sum_{v=1}^{n-1}\sum_{s=1}^{v} kP_s^x, \\ y_n &= (1-\frac{n}{N})y_1 + \frac{n}{N}y_N + \frac{n}{N}\sum_{v=1}^{N-1}\sum_{s=1}^{v} kP_s^y - \sum_{v=1}^{n-1}\sum_{s=1}^{v} kP_s^y, \end{aligned} \tag{1}$$

де x_1, x_N, y_1, y_N - крайові умови,

N - порядковий номер вузла замикання,

kP_s^x, kP_s^y - складові функціонально розподіленого навантаження у вузлах моделі.

Система числових послідовностей (1) буде у тому випадку представляти замкнуту траєкторію, якщо знайдеться такий період μ, на якому при фіксованому значенні n одночасно виконуються умови:

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n+\mu} \\ y_n &= y_{n+\mu} \end{aligned}. \tag{2}$$

Якщо елементи двох числових послідовностей x_n та y_n представляють собою числові ряди, фіксована множина елементів яких повторюється із певною періодичністю μ, то відповідні числові послідовності називаються періодичними і графічно інтерпретують замкнуті дискретно представлені криві на відповідному проміжку. При цьому для будь-яких n у числових послідовностях (1) необхідне виконання умови (2).

Числові послідовності (1), певна множина елементів яких на границях циклу повторюються із періодом μ будемо називати послідовностями, множина граничних елементів яких повторюється з визначеною циклічністю. Умовою для таких послідовностей з фіксованими значеннями n та μ є, наприклад:

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n+\mu},\ x_{n-1} = x_{n-1+\mu},\ x_{n+1} = x_{n+1+\mu} \ldots. \\ y_n &= y_{n+\mu},\ y_{n-1} = y_{n-1+\mu},\ y_{n+1} = y_{n+1+\mu} \ldots. \end{aligned} \tag{3}$$

Для кола практичних задач, де моделями є дискретно представлені замкнуті криві, однією із найважливіших характеристик є дискретний аналог гладкості супровідної ламаної. Зупинимося детальніше на даній характеристиці.

Для моделювання дискретних аналогів замкнутих і гладких кривих слід використовувати властивості центральних різниць для визначення "ступеня гладкості" супровідних ламаних, побудованих на отриманих числових рядах. Центральні різниці між членами (з точністю до множника) є дискретним аналогом похідних у визначеній точці.

При моделюванні дискретних аналогів зрівноважених замкнутих кривих у параметричному вигляді (1) суттєву роль відіграють складові зовнішнього формоутворюючого навантаження. Якщо складові значень навантаження у вузлах на визначених граничних умовах мають функціональний розподіл – дискретну модель кривої будемо вважати гладкою у точці замикання, якщо складові навантаження мають кусково функціональний розподіл – дискретна модель буде включати особливу точку. Тому для забезпечення гладкості у точці замикання необхідною умовою є функціональний розподіл складових значень навантаження не тільки між граничними вузлами, але й у самих граничних вузлах.

Відповідно до наведених міркувань, при дискретному моделюванні гладкої у точці замикання зрівноваженої замкнутої кривої із n внутрішніми вузлами на проміжку $\left[1, n+2\right]$ повинна формуватися система числових послідовностей, де поряд із врахуванням набору вихідних даних обов'язково виконуються умови виду:

$$(1-\frac{n+2}{N})x_1+\frac{n+2}{N}x_N+\frac{n+2}{N}\sum_{v=1}^{N-1}\sum_{s=1}^{v}kP_s^x-\sum_{v=1}^{n+1}\sum_{s=1}^{v}kP_s^x=(1-\frac{1}{N})x_1+\frac{1}{N}x_N+\frac{1}{N}\sum_{v=1}^{N-1}\sum_{s=1}^{v}kP_s^x-\sum_{v=1}^{1-1}\sum_{s=1}^{v}kP_s^x,$$

$$(1-\frac{n+2}{N})y_1+\frac{n+2}{N}y_N+\frac{n+2}{N}\sum_{v=1}^{N-1}\sum_{s=1}^{v}kP_s^y-\sum_{v=1}^{n+1}\sum_{s=1}^{v}kP_s^y=(1-\frac{1}{N})y_1+\frac{1}{N}y_N+\frac{1}{N}\sum_{v=1}^{N-1}\sum_{s=1}^{v}kP_s^y-\sum_{v=1}^{1-1}\sum_{s=1}^{v}kP_s^y,$$

$$(1-\frac{n+1}{N})y_1+\frac{n+1}{N}y_N+\frac{n+1}{N}\sum_{v=1}^{N-1}\sum_{s=1}^{v}kP_s^y-\sum_{v=1}^{n}\sum_{s=1}^{v}kP_s^y=(1-\frac{0}{N})x_1+\frac{0}{N}x_N+\frac{0}{N}\sum_{v=1}^{N-1}\sum_{s=1}^{v}kP_s^x-\sum_{v=1}^{0-1}\sum_{s=1}^{v}kP_s^x,$$

$$(1-\frac{n+1}{N})y_1+\frac{n+1}{N}y_N+\frac{n+1}{N}\sum_{v=1}^{N-1}\sum_{s=1}^{v}kP_s^y-\sum_{v=1}^{n-1}\sum_{s=1}^{v}kP_s^y=(1-\frac{0}{N})y_1+\frac{0}{N}y_N+\frac{0}{N}\sum_{v=1}^{N-1}\sum_{s=1}^{v}kP_s^y-\sum_{v=1}^{0-1}\sum_{s=1}^{v}kP_s^y,$$

$$(1-\frac{n+3}{N})y_1+\frac{n+3}{N}y_N+\frac{n+3}{N}\sum_{v=1}^{N-1}\sum_{s=1}^{v}kP_s^y-\sum_{v=1}^{n+2}\sum_{s=1}^{v}kP_s^y=(1-\frac{2}{N})x_1+\frac{2}{N}x_N+\frac{2}{N}\sum_{v=1}^{N-1}\sum_{s=1}^{v}kP_s^x-\sum_{v=1}^{2-1}\sum_{s=1}^{v}kP_s^x,$$

$$(1-\frac{n+3}{N})y_1+\frac{n+3}{N}y_N+\frac{n+3}{N}\sum_{v=1}^{N-1}\sum_{s=1}^{v}kP_s^y-\sum_{v=1}^{n+2}\sum_{s=1}^{v}kP_s^y=(1-\frac{2}{N})y_1+\frac{2}{N}y_N+\frac{2}{N}\sum_{v=1}^{N-1}\sum_{s=1}^{v}kP_s^y-\sum_{v=1}^{2-1}\sum_{s=1}^{v}kP_s^y,$$

$$x_n=(1-\frac{n}{N})x_1+\frac{n}{N}x_N+\frac{n}{N}\sum_{v=1}^{N-1}\sum_{s=1}^{v}kP_s^x-\sum_{v=1}^{n-1}\sum_{s=1}^{v}kP_s^x,$$

$$y_n=(1-\frac{n}{N})y_1+\frac{n}{N}y_N+\frac{n}{N}\sum_{v=1}^{N-1}\sum_{s=1}^{v}kP_s^y-\sum_{v=1}^{n-1}\sum_{s=1}^{v}kP_s^y.$$

Параметричний аналіз на сумісність такої системи дає можливість ефективно підібрати функції розподілу навантаження у вузлах моделі для кожної із координатних складових, управляючи якими можна динамічно змінювати геометричні характеристики формованих образів (рис.1). При дискретному моделюванні замкнутих траєкторій числовими послідовностями слід відмітити, що розміри системи рівнянь не пов'язані із кількістю внутрішніх вузлів для формування образу. Представлена модель не втрачає переваги векторного представлення навантаження у вузлах для динамічного коригування геометрії дискретної моделі, ефективного врахування значень площ формованих областей, а крім того дозволяє швидко проводити згущення вузлів, знаходити неперервні їх аналоги, тощо. Приклад побудови дискретних моделей гладких у точках замикання замкнутих кривих наведено на рис. 2.

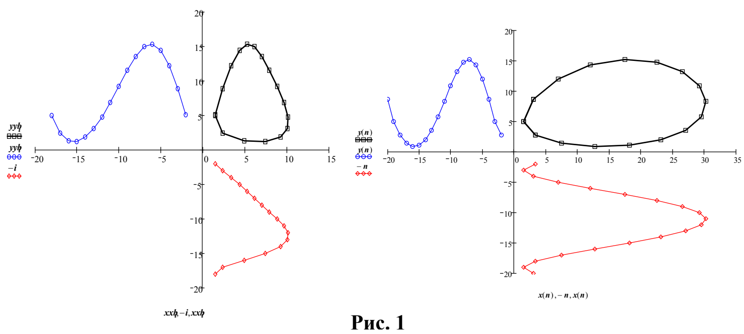

Рис. 1

Висновки. В роботі запропоновані способи та алгоритми формування за заданими вихідними умовами зрівноважених дискретних моделей замкнутих гладких траєкторій числовими послідовностями. Досліджено вплив розподілу складових навантаження у вузлах моделі на параметри їх гладкості. Запропоновано алгоритми переходу від дискретних моделей замкнутих кривих до їх неперервних аналогів.

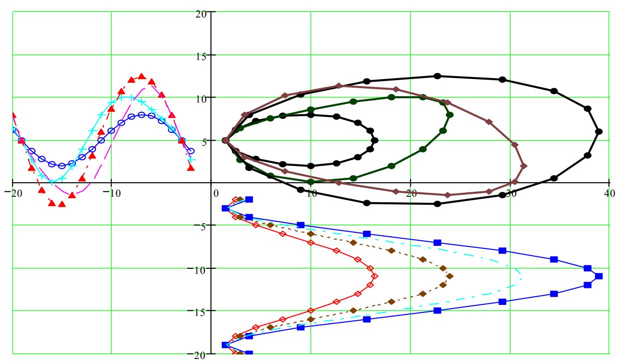

Рис. 2

1. Лигун А., Шумейко А. Асимптотические методы восстановления кривых./Институт математики/.-К., 1997, -357с.
2. Ковалёв С.Н. Формиравание дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций. Дис….докт. техн. наук. 05.01.01/ М.: МАИ, 1986.-348с.
3. Пустюльга С.І. Дискретне визначення геометричних об'єктів числовими послідовностями. Дис. д-ра. техн. наук, 05.01.01 / К.: КНУБА, 2006.