

УДК 539.3

В.В.Божидарнік, О.В.Максимович

Луцький національний технічний університет

### РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ КОМПОЗИТНИХ ПЛАСТИНОК ІЗ ТРІЩИНАМИ НА ОСНОВІ ЕНЕРГЕТИЧНОГО КРИТЕРІЮ РУЙНУВАННЯ

Запропоновано методика розрахунку на міцність композитних пластинок, послаблених тріщинами на основі енергетичного критерію руйнування. Визначено граничні навантаження для композитних пластинок з тріщинами на основі енергетичного та силового критеріїв руйнування.

Розглядається задача про розробку розрахункової методики на міцність композитних пластинок, послаблених тріщинами.

Використано феноменологічний підхід, в якому композит розглядають як однорідний матеріал, що має анізотропні механічні та міцнісні властивості. Механічні (модулі пружності та коефіцієнти Пуассона) та міцнісні властивості в цьому підході розглядаються як усереднені (інтегральні), що визначаються на основі експериментальних випробовувань зразків [1, 2]. За його використання визначення напружень (усереднених) у композитах зводиться до розв'язування відповідної задачі теорії пружності для анізотропного тіла [3]. На основі такого підходу в роботі побудовано енергетичний критерій руйнування. Визначено граничні навантаження для пластинок з тріщинами на основі енергетичного та силового критеріїв руйнування

**Потік енергії у вершину тріщини.** Будемо виходити із потоку енергії у вершину тріщини, який рівний інтенсивності пружної енергії, що вивільнюється при зростанні довжини тріщини на величину  $\delta$ . Позначимо роботу внутрішніх сил при просуванні тріщини через  $Q$ . Тоді за Ірвіним потік енергії у вершину тріщини буде  $G = -\lim_{\delta \rightarrow 0} Q / \delta$ . Критерій руйнування записують на основі порівняння розрахованого потоку енергії із критичним, який для анізотропних матеріалів є залежним від напрямку.

Розглянемо тріщину, дотична до якої у її вершині  $A$  нахилена під кутом  $\varphi$  до осі  $Ox$ . Введемо полярну систему координат  $(r, \theta)$  з центром у вершині тріщини так, щоби кутова координата  $\theta=0$  збігалась з дотичною до тріщини у її вершині (рис.1).

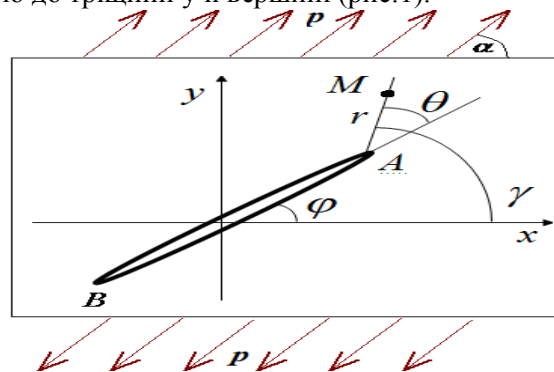


Рис. 1. Схема навантаження анізотропної пластини з тріщиною

Вважатимемо відомими (коефіцієнти інтенсивності напружень) КІН для цієї вершини, які позначимо через  $K_I, K_{II}$ . При поширенні тріщини на утвореному розрізі його береги віддаляються один від одного. Визначимо роботу, яку здійснять внутрішні сили при рості вершини  $A$  під кутом  $\theta$  відносно тріщини до точки  $M$ , яка розміщена на відстані  $\delta$ . Робота сил буде дорівнювати  $Q = -Q_1 - Q_2$ , де

$$Q_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\delta} \sigma_{\theta}(r, \theta) [u_n(r_1, \theta)] dr, \quad Q_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\delta} \tau_{r\theta}(r, \theta) [u_{\tau}(r_1, \theta)] dr, \quad (1)$$

$\sigma_{\theta}(r, \theta)$  – напруження на нахиленій під кутом  $\theta$  площинці біля вершини тріщини  $A$ ,  $r$  – радіальна координата, яка відлічується від вершини  $A$ ;  $[u_n(r_1, \theta)]$ ,  $[u_{\tau}(r_1, \theta)]$  – стрибки проєкцій

вектора переміщень берегів тріщини на нормаль і дотичну до неї в околі нової вершини  $M$ ;  $r_1$  – радіальна координата, яка відлічується від вершини  $M$ , причому  $r_1 = \delta - r$ .

Для напружень в околі вершини тріщини маємо асимптотичні співвідношення [4]

$$\sigma_\theta(r, \theta) = \frac{K_{I\theta}(\theta, \varphi)}{\sqrt{2\pi r}}, \quad \tau_{r\theta}(r, \theta) = \frac{K_{II\theta}(\theta, \varphi)}{\sqrt{2\pi r}}, \quad (2)$$

де

$$K_{I\theta}(\theta) = K_I f_1(\theta + \varphi, \varphi) + K_{II} f_2(\theta + \varphi, \varphi), \quad K_{II\theta}(\theta) = K_I f_3(\theta + \varphi, \varphi) + K_{II} f_4(\theta + \varphi, \varphi), \quad (3)$$

$$f_1(\gamma, \varphi) = \operatorname{Re} \left[ \left( g_1 \delta_2(\gamma) \sqrt{\delta_2(\gamma) / d_2} - g_2 \delta_1(\gamma) \sqrt{\delta_1(\gamma) / d_1} \right) / (s_2 - s_1) \right],$$

$$f_2(\gamma, \varphi) = -\operatorname{Re} \left[ \left( d_1 \delta_2(\gamma) \sqrt{\delta_2(\gamma) / d_2} - d_2 \delta_1(\gamma) \sqrt{\delta_1(\gamma) / d_1} \right) / (s_2 - s_1) \right],$$

$$f_3(\gamma, \varphi) = \operatorname{Re} \left[ \left( g_1 \gamma_2(\gamma) \sqrt{\delta_2(\gamma) / d_2} - g_2 \gamma_1(\gamma) \sqrt{\delta_1(\gamma) / d_1} \right) / (s_2 - s_1) \right],$$

$$f_4(\gamma, \varphi) = -\operatorname{Re} \left[ \left( d_1 \gamma_2(\gamma) \sqrt{\delta_2(\gamma) / d_2} - d_2 \gamma_1(\gamma) \sqrt{\delta_1(\gamma) / d_1} \right) / (s_2 - s_1) \right].$$

$\delta_j = \delta_j(\gamma) = \cos \gamma + s_j \sin \gamma$ ,  $\gamma_j = \gamma_j(\gamma) = \sin \gamma - s_j \cos \gamma$ ,  $g_j = g_j(\varphi)$ ,  $d_j = d_j(\varphi)$ ,  $\gamma = \varphi + \theta$ ,  $s_{1,2}$  – корені характеристичного рівняння [4].

Зазначимо, що  $K_{I\theta}(0, \varphi) = K_I$ ,  $K_{II\theta}(0, \varphi) = K_{II}$ .

Наведемо також необхідні в подальших викладках співвідношення для стрибків переміщень в околі вершини тріщини. На основі [4] можна показати, що вони можуть бути записані у вигляді

$$[u_n] = 4a_{11} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}} (u_{11}(\varphi) K_I + u_{12}(\varphi) K_{II}), \quad [u_t] = 4a_{11} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}} (u_{21}(\varphi) K_I + u_{22}(\varphi) K_{II}), \quad (4)$$

де

$$u_{11}(\varphi) = -\operatorname{Re} \left[ i (s_1 - \bar{s}_2) \gamma_2(\varphi) \overline{\gamma_1(\varphi)} \right], \quad u_{12}(\varphi) = \operatorname{Re} \left[ i (s_1 - \bar{s}_2) \delta_2(\varphi) \overline{\gamma_1(\varphi)} \right],$$

$$u_{21}(\varphi) = \operatorname{Re} \left[ i (s_1 - \bar{s}_2) \gamma_2(\varphi) \overline{\delta_1(\varphi)} \right], \quad u_{22}(\varphi) = -\operatorname{Re} \left[ i (s_1 - \bar{s}_2) \delta_2(\varphi) \overline{\delta_1(\varphi)} \right],$$

$u_t, u_n$  – проекції вектора переміщень на дотичну і нормаль до тріщини,  $a_{ij}$  – пружні сталі.

Із наведених співвідношень випливають відомі формули для ізотропних матеріалів.

Приймемо відомими КІН для випадку, коли вершина тріщини зміститься (підросте) із точки  $A$  в точку  $M$ , які позначимо через  $K_I^{(1)}, K_{II}^{(1)}$ . Тоді стрибки переміщень на основі (4) визначаються за формулами

$$[u_n] = 4a_{11} \frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{2\pi}} (u_{11}(\gamma) K_I^{(1)} + u_{12}(\gamma) K_{II}^{(1)}), \quad [u_t] = 4a_{11} \frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{2\pi}} (u_{21}(\gamma) K_I^{(1)} + u_{22}(\gamma) K_{II}^{(1)}), \quad (5)$$

Підставляючи формули (4) і (2) в (1) знаходимо

$$Q_1 = \frac{a_{11}}{\pi} (u_{11}(\gamma) K_I^{(1)} + u_{12}(\gamma) K_{II}^{(1)}) K_{I\theta}(\theta, \varphi) \int_0^\delta \frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r}} dr.$$

Звідси

$$Q_1 = \frac{a_{11}}{2} \delta (u_{11}(\gamma) K_I^{(1)}(\theta, \varphi) + u_{12}(\gamma) K_{II}^{(1)}(\theta, \varphi)) K_{I\theta}(\theta, \varphi).$$

Аналогічно знаходимо

$$Q_2 = \frac{a_{11}}{2} \delta (u_{21}(\gamma) K_I^{(1)}(\theta, \varphi) + u_{22}(\gamma) K_{II}^{(1)}(\theta, \varphi)) K_{II\theta}(\theta, \varphi).$$

Потік енергії у вершину тріщини у даному випадку знаходиться за формулою  $G = -Q / \delta$ . Таким чином отримуємо

$$G(\gamma, \varphi) = \frac{a_{11}}{2} [(u_{11}(\gamma) K_I^{(1)}(\theta, \varphi) + u_{12}(\gamma) K_{II}^{(1)}(\theta, \varphi)) K_{I\theta}(\theta, \varphi) +$$

$$+(u_{21}(\gamma)K_I^{(1)}(\theta, \varphi) + u_{22}(\gamma)K_{II}^{(1)}(\theta, \varphi))K_{II\theta}(\theta, \varphi)]. \quad (6)$$

Прийmemo, що відоме критичне значення потоку енергії, яке позначимо  $G_C(\gamma)$ . Тоді отримуємо критеріальну умову  $G(\gamma, \varphi) = G_C(\gamma)$ .

Безпосередньо використовувати наведені співвідношення достатньо складно, оскільки вони базуються на КІН для ламаної тріщини. При відносно невеликих кутах зміни напрямків можна покласти

$$K_I^{(1)} \approx K_{I\theta}(\theta, \varphi), K_{II}^{(1)} \approx K_{II\theta}(\theta, \varphi). \quad (7)$$

Достатню для практики точність цих співвідношень буде доведено нижче. Звідси отримуємо

$$G(\gamma, \varphi) = \frac{a_{11}}{2} [u_{11}(\gamma)K_{I\theta}^2(\theta, \varphi) + 2u_{12}(\gamma)K_{I\theta}(\theta, \varphi)K_{II\theta}(\theta, \varphi) + u_{22}(\gamma)K_{II\theta}^2(\theta, \varphi)].$$

Тут враховано, що  $u_{12} = u_{21} \rightarrow$  та  $\gamma = \varphi + \theta$ .

Тоді маємо критеріальну умову

$$\frac{a_{11}}{2} [u_{11}(\gamma)K_{I\theta}^2(\theta, \varphi) + 2u_{12}(\gamma)K_{I\theta}(\theta, \varphi)K_{II\theta}(\theta, \varphi) + u_{22}(\gamma)K_{II\theta}^2(\theta, \varphi)] = G_C(\gamma). \quad (8)$$

Безпосередньо критичне значення потоку енергії  $G_C(\gamma)$  визначати експериментально є складною задачею. Тому розглянемо випадок, коли відома в'язкість руйнування  $K_{IC}(\varphi)$ , яку визначають на основі поперечного розтягу (відносно тріщини) пластинки з прямолінійною тріщиною, що нахилена під кутом  $\varphi$  до осі  $Ox$ . У цьому випадку для тріщини перед руйнуванням маємо  $K_I = K_{IC}(\varphi)$ ,  $K_{II} = 0$ . Поклавши в (8)  $\theta = 0$  та врахувавши, що при цьому  $K_{I\theta}(0, \varphi) = K_I$ ,  $K_{II\theta}(0, \varphi) = K_{II} = 0$ ,  $\gamma = \varphi$  отримаємо вираз для критичного значення потоку енергії

$$G_C(\gamma) = \frac{a_{11}}{2} u_{11}(\gamma) K_{IC}^2(\gamma).$$

Умова (8) дозволяє дослідити гранично-рівноважний стан анізотропної пластини з тріщиною при відомих КІН. Розглянемо детальніше випадок, коли КІН пропорційні параметру навантаження  $p$  і зображені у вигляді  $K_{I,II} = p\sqrt{\pi a}F_{I,II}$ , де  $a$  – характерний розмір тріщини,  $F_{I,II}$  – безрозмірні відомі функції. Тоді критеріальна умова (8) запишеться

$$p^2 F(\gamma, \varphi) = \frac{1}{\pi a F_I^2}, \quad (9)$$

де

$$F(\gamma, \varphi) = F_1^2(\gamma, \varphi) + w_1(\gamma)F_2^2(\gamma, \varphi) + w_2(\gamma)F_1(\gamma, \varphi)F_2(\gamma, \varphi),$$

$$F_1(\gamma, \varphi) = \frac{f_1(\gamma, \varphi) + \eta f_1(\gamma, \varphi)}{K_{IC}(\gamma)}, F_2(\gamma, \varphi) = \frac{f_3(\gamma, \varphi) + \eta f_4(\gamma, \varphi)}{K_{IC}(\gamma)},$$

$$w_1(\gamma) = u_{22}(\gamma) / u_{11}(\gamma), w_2(\gamma) = 2u_{12}(\gamma) / u_{11}(\gamma), \eta = F_{II} / F_I.$$

Позначимо через  $\gamma = \gamma_*$  значення аргументу, при якому досягається максимальне значення функції  $F(\gamma, \varphi)$  при зафіксованому куті  $\varphi$ .

Тоді тріщина підростатиме під кутом  $\theta_* = \gamma_* - \varphi$  та граничне значення параметра навантаження визначається за формулою

$$p_* = \frac{1}{\sqrt{\pi a} F_I \sqrt{F(\gamma_*, \varphi)}}. \quad (10)$$

Зазначимо, що  $\theta_* = \theta_*(\eta, \varphi)$ ,  $F(\gamma_*, \varphi) = F_* = F_*(\eta, \varphi)$ , причому в загальному випадку ці величини доцільно визначати числовими методами на основі безпосередньої мінімізації функції  $F(\gamma, \varphi)$  при зафіксованому значенні кута  $\varphi$  (оскільки функція  $F(\gamma, \varphi)$  є громіздкою).

**Обґрунтування критерію руйнування.** Наведені вище співвідношення справедливі за виконання умов (7). Для їх доведення виконано розрахунки КІН для ламаної тріщини, яка

©В.В.Божидарнік, О.В.Максимович

складається із двох ланок. Перша - довжини  $2a$  лежить на осі  $Ox$ , а друга довжини  $d$  розміщена справа під кутом  $\theta$ . Прийнято, що пластинка розтягується під кутом  $\alpha$  до осі  $Ox$ . Розраховані відносні КІН для правої вершини тріщини  $F_{I,II} = K_{I,II} / (p\sqrt{\pi c})$  при  $d/(2a)=0,1$  і  $\theta = -\pi/6$  для ізотропної пластинки зображено на рис.2.а – криві  $K_I, K_{II}$ . Тут  $c$  – піввідстань між вершинами. Кривими, позначеними  $K_{In}, K_{IIn}$  зображено на цьому рисунку, віднесені до значень  $p\sqrt{\pi a}$  величини  $K_{I\theta}(\theta, \varphi), K_{II\theta}(\theta, \varphi)$ , які розраховані для прямолінійної тріщини на площинці нахилений під кутом  $\theta = -\pi/6$ . Зазначимо, що розрахунки виконано на основі алгоритму [4]. Аналогічні результати розрахунків при  $\theta = 0$  для пластинки із матеріалу ЕФ 32-301 подано на рис. 2.б

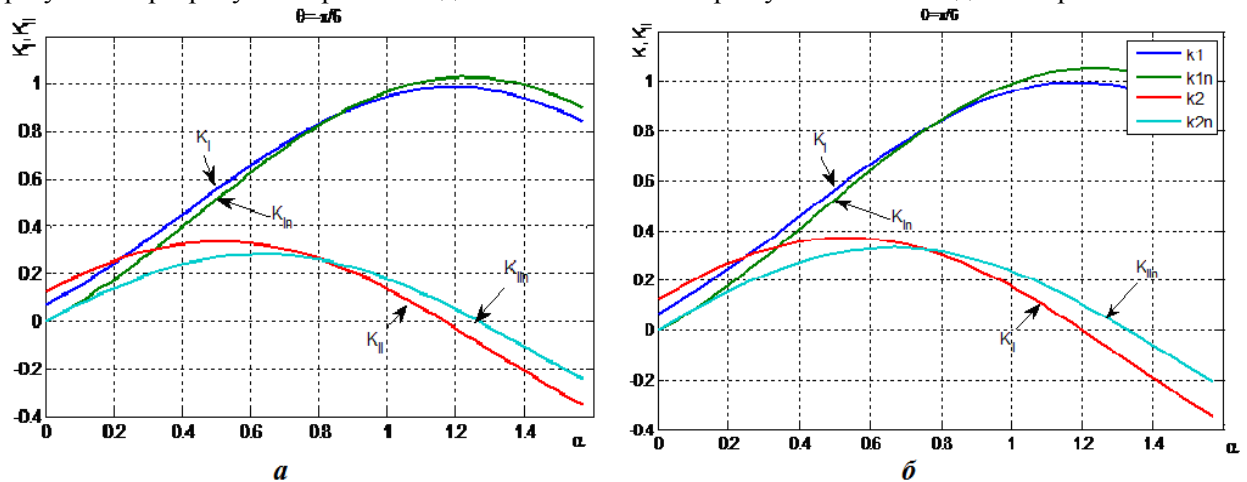


Рис. 2. Відносні КІН для ізотропної пластинки та з матеріалу ЕФ 32-301 при  $d/(2a)=0,1$

На рис. 3 наведено результати розрахунків для матеріалу ЕФ 32-301 при  $d/(2a)=0,001$ . Рисунку зліва відповідає кут  $\theta = 0$ , посередині  $\theta = \pi/4$  і справа – при  $\theta = \pi/2$ . Аналогічні результати для матеріалу з істотною мірою анізотропії ЛУ-1 подано на рис. 4.

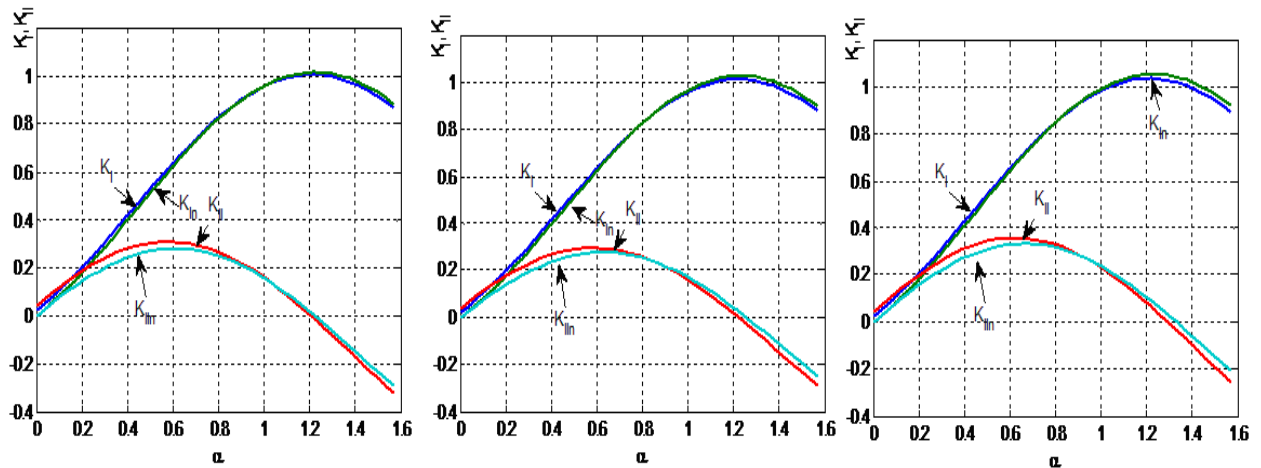


Рис. 3. Відносні КІН для пластинки із матеріалу ЕФ 32-301 при  $d/(2a)=0,001$

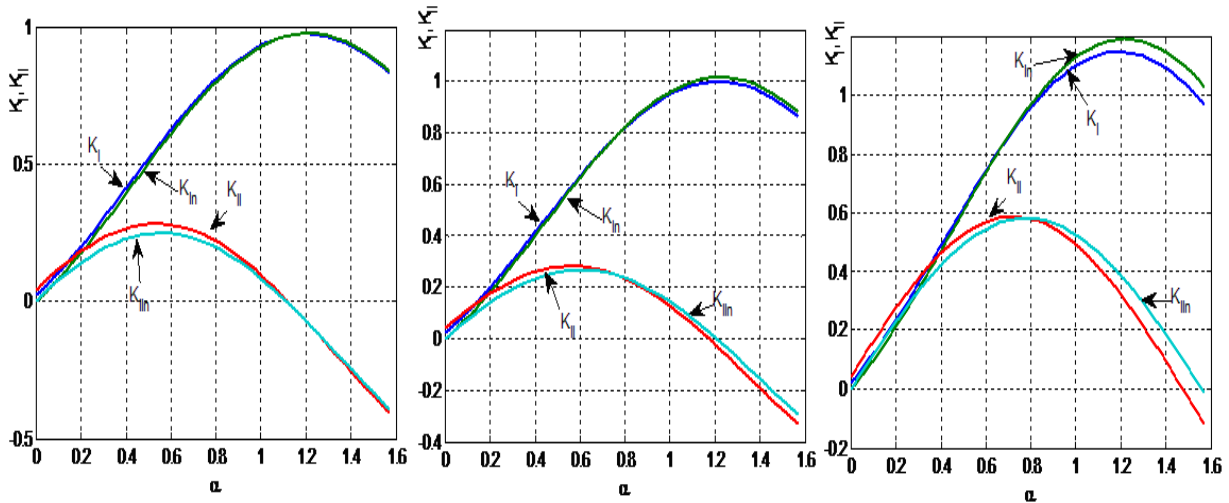


Рис. 4. Відносні КІН для пластинки із матеріалу ЛУ-1 при  $d / (2a) = 0,001$

Із наведених графіків видно, що для ламаних тріщин стосовно до розглянутих матеріалів КІН можуть бути наближено знайдені на основі формул  $K_{I,II}^{(1)} = K_{I,II}(\theta, \varphi)$ , в яких величини справа знаходяться на основі початкової (неламаної) тріщини, причому при зменшенні довжин тріщин похибка цих формул зменшується. Видно, що найбільша різниця має місце для істотно анізотропних матеріалів, коли тріщина паралельна напрямку з мінімальним опором матеріалу. Таким чином, наведені на рис. 2-4 результати обґрунтовують можливість використання формул (7), на основі яких записано енергетичний критерій.

Для ізотропних матеріалів достатньо висока точність формул (7) може бути доведена у загальнішому випадку. Прийемо, що відомі КІН для вершини  $A$  початкової тріщини, які позначимо  $\overline{K}_I, \overline{K}_{II}$ . Нехай далі тріщина підростає вздовж відрізка  $AA_1$  під кутом  $\theta$ , причому довжина відрізка є малою. КІН у вершині  $A_1$  визначаються за наведеними в [5] формулами тріщина

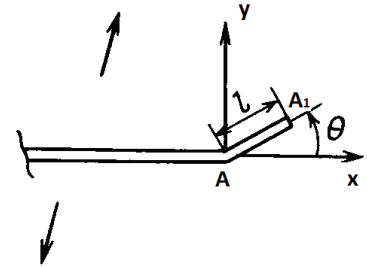


Рис. 5. Початкова тріщина та її приріст

$$K_I = C_{11}(\theta)\overline{K}_I + C_{12}(\theta)\overline{K}_{II}, K_{II} = C_{21}(\theta)\overline{K}_I + C_{22}(\theta)\overline{K}_{II}.$$

На рис. 6.а наведено розраховані значення величин  $K_{I0}, K_{II0}$  за формулами (3) (суцільні лінії) та знайдені КІН для ламаної тріщини за формулами (11) (штрихові лінії) залежно від кута  $\theta$  при  $\overline{K}_I = 1, \overline{K}_{II} = 0$ . Аналогічні результати при  $\overline{K}_I = 0, \overline{K}_{II} = 1$  зображені на рис.6 справа.

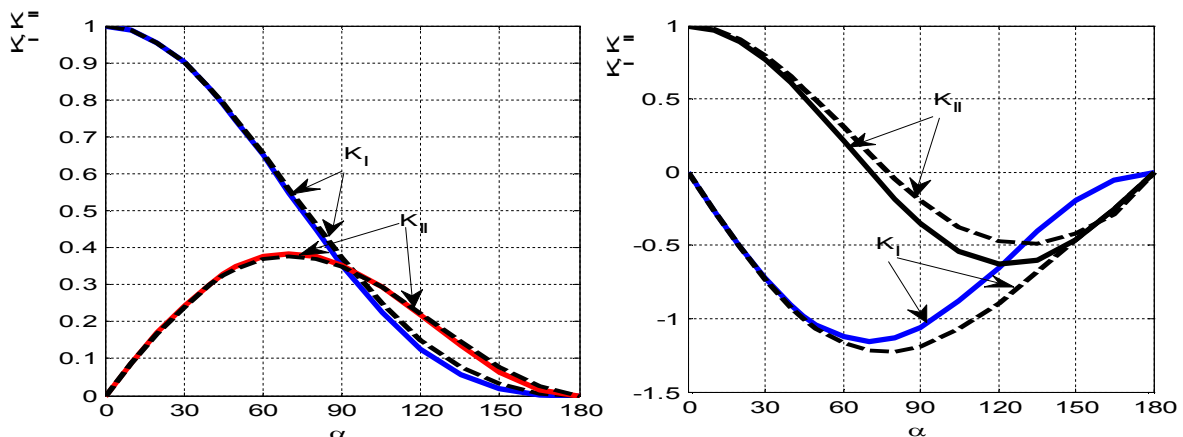


Рис. 6. Значення КІН та величин  $K_{I0}, K_{II0}$ .

**Узагальнений  $\sigma_\theta$  – критерій.** Для матеріалів з малою мірою анізотропії використовують силовий критерій руйнування, який знаходить особливо широке застосування в розрахунках на міцність ізотропних матеріалів із тріщинами. Тоді згідно  $\sigma_\theta$  – критерію тріщина підростатиме в напрямку, що розміщений під кутом  $\theta$  відносно дотичної у вершині тріщини, якщо виконується умова  $K_{I\theta}(\theta) = K_{IC}(\theta + \varphi)$  [6]. Напрямок можливого початку руйнувань знаходимо із умови, що функція  $I(\theta) = K_{I\theta}(\theta) / K_{IC}(\theta + \varphi)$  є максимальною [6]. Тут прийнято, що напрямок мінімального опору матеріалу паралельний осі  $Ox$ .

Величина  $I$  може бути записана у вигляді

$$I = [K_I f_1(\gamma, \varphi) + K_{II} f_2(\gamma, \varphi)] / K_{IC}(\gamma), \quad \gamma = \varphi + \theta. \quad (11)$$

Позначимо знайдене значення кута із екстремальної задачі через  $\theta_s$ , яке доцільно знаходити числовими методами. Критичне значення навантаження  $p = p_s$  знаходимо за формулою

$$p_s = \frac{K_{IC}(\gamma_s)}{[F_I f_1(\gamma_s, \varphi) + F_{II} f_2(\gamma_s, \varphi)] \sqrt{\pi a}}, \quad \gamma_s = \varphi + \theta_s.$$

**Результати розрахунків на міцність.** Розглянемо окремо випадок, коли відоме відношення КІН  $\eta = K_{II} / K_I$  і необхідно знайти граничне значення КІН  $K_I$ , яке позначимо через  $K_{ID}$ . Легко бачити, що ця величина визначається за формулою  $K_{ID} = 1 / \sqrt{F_*}$ .

Розглянемо склопластик ЕФ 32-301, який виготовлений із склотканини АСТТ і склопластик ЕТФ, виготовленого на основі тканини кордного типу [6]. Для запису функцій  $K_{IC}(\gamma)$  використаємо експериментальні дані для граничного значення КІН залежно від кута між прямолінійною тріщиною і головною віссю анізотропії, який відповідає максимальний модуль пружності [6] (таблиця 1).

Таблиця 1

Значення величин  $K_{IC}$  залежно від кута  $\gamma$   
(кут між тріщиною і напрямком із максимальною жорсткістю матеріалу)

	$\gamma$ , рад	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$5\pi/16$	$\pi/2$
ЕФ 32-301	$K_{IC}$ , Н/мм <sup>3/2</sup> (МПа·м <sup>1/2</sup> )	411,0 (13,00)	531,0 (16,79)	590,0 (18,66)	719,0 (22,74)	808,0 (25,55)
ЕТФ	$K_{IC}$ , Н/мм <sup>3/2</sup> (МПа·м <sup>1/2</sup> )	476,0 (15,05)	553,0 (17,49)	774,0 (24,48)	929,0 (29,38)	1096,0 (34,66)

Функцію  $F_c$  на основі цих даних будемо описувати для цих матеріалів при  $-\pi \leq \gamma \leq \pi$  у вигляді [6]

$$F_c(\gamma) = K_{IC}(0) [1 + c\gamma^2(\pi^2 - \gamma^2)^3], \quad (12)$$

де  $c = 0,0009652$  – для матеріалу ЕФ 32-301 та  $c = 0,0013$  – для ЕТФ.

На рис.6 зліва зображено залежність розрахованих граничних значень відносних КІН на основі енергетичного критерію (8)  $K_{ID} / K_{IC}^{cep}$  залежно від відношення  $K_{II} / K_I$  для пластинки із матеріалу ЕФ 32-301 при кутах  $\varphi$  рівних  $0,15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ , які наведено біля відповідних кривих. Тут  $K_{IC}^{cep} = [K_{IC}(0) + K_{IC}(\pi/2)] / 2$ ,  $K_{ID}$  – граничне значення КІН  $K_I$  при заданому відношенню  $K_{II} / K_I$ . Справа зображено залежність розрахованих кутів  $\theta_*$  (під якими буде підростати тріщина) від відношення КІН.

При розрахунках на міцність при заданих (знайдених) значеннях КІН  $K_I$  і  $K_{II}$  обчислюємо відношення  $K_{II} / K_I$  та  $K_I / K_{IC}^{cep}$ . Якщо точка з координатами  $(K_{II} / K_I, K_I / K_{IC}^{cep})$  лежить нижче відповідних кривих, нанесених на рис.7, то руйнування не проходитиме.

Аналогічні результати, які отримані на основі спрощеного енергетичного критерію, коли наближено покласти  $w_1 = 1, w_2 = 0$  (8) практично збігаються із наведеними даними на цьому рисунку, тому їх не наводимо.

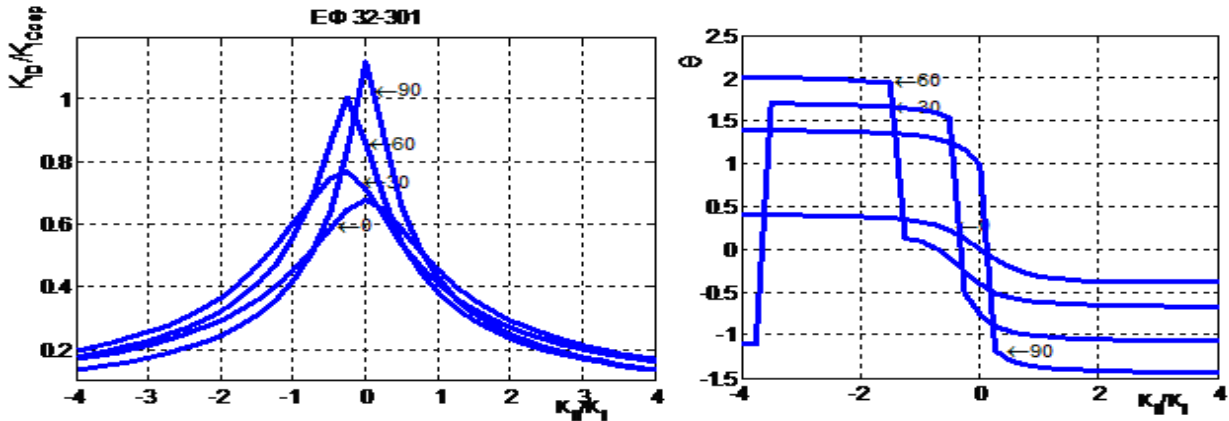


Рис.7. Відносні граничні значення КІН  $K_I$  та напрямки росту тріщин для матеріалу ЕФ 32-301 за енергетичного критерію (8)

На основі порівняння даних, що зображені на рис.7 впливає, що граничні значення зусиль на основі загального та спрощеного енергетичних критеріїв є близькими між собою. Дещо відрізняються між собою ці дані тільки при великих значеннях КІН  $K_{II}$ , причому у всіх розглянутих випадках знайдені граничні навантаження за спрощеним критерієм є меншими за величиною. Тому при інженерних розрахунках для цих матеріалів можуть використовуватись спрощені співвідношення, причому ці граничні зусилля будуть знайдені з деяким запасом міцності. За використання силового критерію розраховані граничні зусилля виявились завжди більшими за величиною, ніж за обох варіантів енергетичного критерію. Тобто, за силового критерію руйнування можуть бути знайдені завищені значення граничних навантажень.

На основі вибраних критеріїв руйнування можуть бути безпосередньо визначені граничні значення зусиль для окремих класів задач. Розглянемо пластинку з прямолінійною тріщиною півдовжини  $a$ , нахиленою під кутом  $\varphi$  до напрямку з максимальною жорсткістю матеріалів (осі  $Ox$ ) за розтягу зусиллями  $p$  під кутом  $\alpha$  відносно прямої, на якій лежить тріщина. Значення КІН при цьому будуть  $K_I = p\sqrt{\pi a} \sin^2 \alpha, K_{II} = p\sqrt{\pi a} \cos \alpha \sin \alpha$ . Розраховані за енергетичним критерієм (8) значення відносних граничних зусиль  $P_{max} = p_*(\alpha)\sqrt{l} / K_{IC}^{sep}$  для значень кутів  $\varphi = 30^\circ j$  при  $j = 0, \dots, 3$  наведено для матеріалу ЕТФ 32-301 на рис. 8 зліва. Тут  $l = 2a, K_{IC}^{sep} = [K_{IC}(0) + K_{IC}(\pi / 2)] / 2$ , значення кутів  $\alpha$  наведено біля кривих. Розраховані залежності напрямку підростання тріщин відносно дотичної у вершині для цього матеріалу наведено на рис.8 справа.

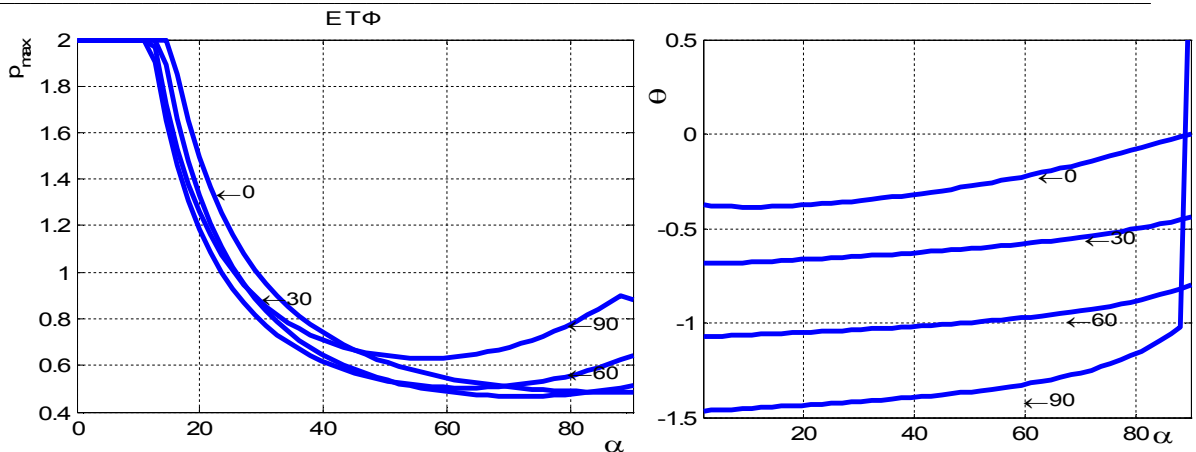


Рис.8. Граничні зусилля (зліва) та кути підростання тріщин залежно від напрямку дії зусиль для матеріалу ЕТФ (енергетичний критерій (8))

Такі ж результати, що отримані на основі спрощеного критерію не наводяться, оскільки вони практично збігаються із даними цього рисунку. Розраховані за силовим критерієм результати при значеннях кутів  $\varphi = 0^\circ$  і  $\varphi = 90^\circ$  близькі до відповідних даних, що отримані для цього випадку в [6].

Наведені на цих рисунках криві при значеннях кутів  $\varphi = 0^\circ$  і  $\varphi = 90^\circ$  близькі до відповідних даних, що отримані для цього випадку в [6]. Розраховані значення граничних навантажень на основі енергетичного критерію виявились меншими або рівними за величиною за знайдені за силовим критерієм.

**Розрахунок на міцність композитних пластинок з ламаними тріщинами.** Розглянемо ламану тріщину, яка складається з двох прямолінійних ланок довжиною  $2a$ ,  $d$ , що перетинаються під кутом  $\pi - \beta$ , з координатами вершин  $A(-a, 0)$ ,  $B(a + d \cos \beta, d \sin \beta)$  та точкою перетину  $(a, 0)$ . Розрахунки виконано для пластинки із матеріалу ЕФ 32-301 при  $d = 0,2a$  за односторонньому розтягу під кутом  $\alpha$  відносно осі  $Ox$ . На рисунку 9 зліва наведено розраховані значення критичних значень безрозмірних зусиль  $P_{\max} = p_*(\alpha)\sqrt{l} / K_{IC}^{cep}$  (за яких одна із вершин почне рости) для лівої вершини  $A$  (крива 1) і правої  $B$  (крива 2) залежно від напрямку розтягу пластинки при  $\beta = -\pi/6$  на основі силового критерію руйнування. Тут  $l$  – відстань між вершинами тріщини. Аналогічні результати, які отримані за допомогою енергетичного критерію зображені на цих рисунках кривими 3 і 4. Аналогічні результати при  $\beta = -\pi/3$  зображено на цьому ж рисунку справа.

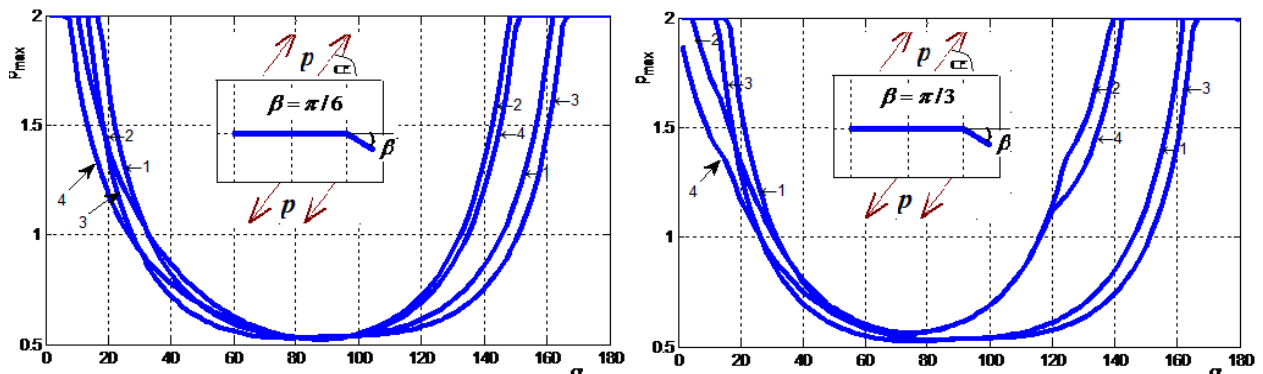


Рис.9. Допустимі навантаження для лівої вершини  $A$  (криві 1, 3) і правої  $B$  (криві 2, 4) залежно від напрямку розтягу пластинки при  $\beta = -\pi/6$  і  $\beta = -\pi/3$ ,  $d=0,2a$

Із наведених рисунків видно, що знайдені граничні навантаження на основі енергетичного і силового критеріїв виявились близькими між собою за розтягу під кутом більшим за  $60^\circ$ . При менших кутах граничні навантаження для енергетичного критерію виявились дещо меншими за величиною.



Виконані розрахунки показали, що довжина другої ланки неістотно впливає на значення граничних навантажень.

**Розрахунок на міцність пластинок з отворами і тріщинами.** Виконаємо дослідження впливу отвору на залишкову міцність композитної пластинки з тріщиною. З цією метою розглянемо пластинку з еліптичним отвором, півосі якого рівні  $a$  і  $b$  та прямолінійною тріщиною довжиною  $L$  з центром у точці  $(x_c, 0)$ , нахиленої під кутом  $\varphi$  до осі  $Ox$  за розтягу зусиллями  $p$  під кутом  $\alpha$  до осі  $Ox$ . Розраховані на основі енергетичного критерію значення величини  $P_{\max} = p_*(\alpha)\sqrt{L} / K_{IC}^{cep}$  залежно від напрямку розтягу пластинки  $\alpha$  при  $x_c = 1,2a$ ,  $L = 0,1a$  та кутах нахилу тріщини  $\varphi = 0^\circ, 45^\circ$  наведено на рис.10.а,б.

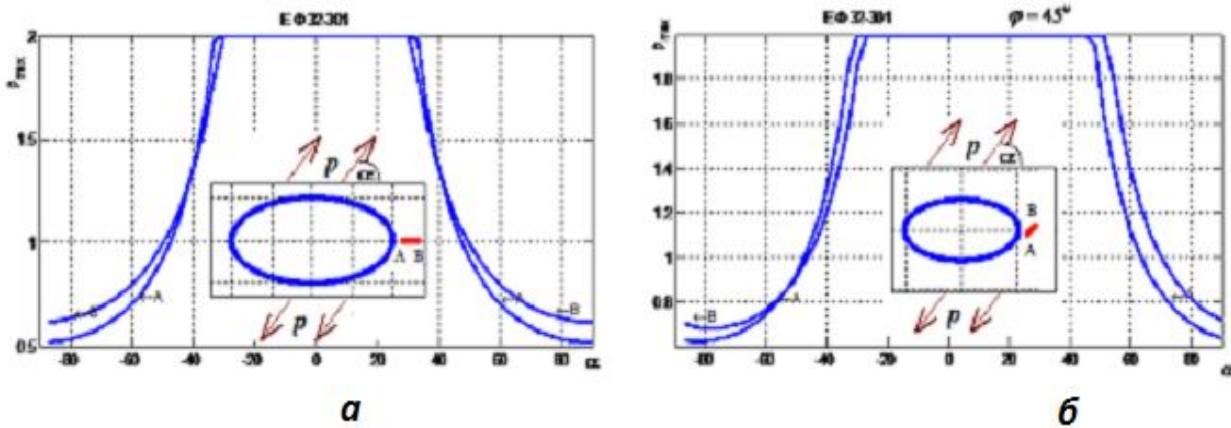


Рис.10. Допустимі навантаження для лівої вершини А і правої В залежно від напрямку розтягу пластинки, тріщина нахилена під кутом  $0^\circ$  (а) і  $45^\circ$  (б)

Вище наведено граничні навантаження для кожної з вершин окремо. За граничні навантаження приймаємо менше із цих даних при вибраному значенні кута  $\alpha$ . Зазначимо, що розраховані граничні значення зусиль на основі силового критерію виявились близькими до наведених на рисунках.

**Розрахунок на міцність композитних пластинок з крайовими тріщинами.** Розглянемо пластинку з еліптичним отвором із півосями  $a$  і  $b$ , які лежать на координатних осях, Прийmemo, що пластинка послаблена прямолінійною крайовою перпендикулярною до межі тріщиною довжиною  $l$  та розтягується зусиллями  $p$  під кутом  $\alpha$ . Визначимо граничне навантаження для різного розміщення тріщин залежно від напрямку дії зусиль. Розрахунки виконано для пластинки з матеріалу ЕФ з круговим отвором  $R$  при нахилах тріщини  $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ ,  $l = 0,1R$ . Результати розрахунків граничних навантажень  $p$  наведено на рис. 11 за використання енергетичного критерію, де позначено  $P_{\max} = p_*(\alpha)\sqrt{2l} / K_{IC}^{cep}$ .

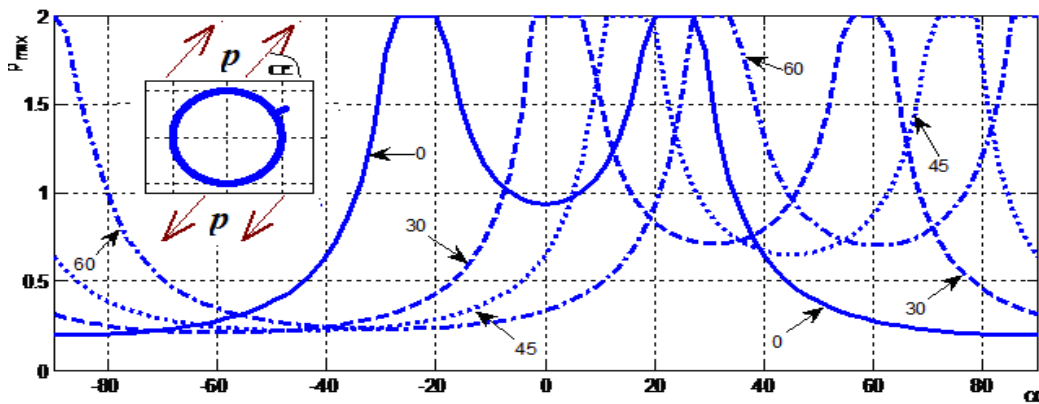


Рис.11. Граничні навантаження для крайової тріщини (енергетичний критерій) залежно від напрямку розтягу пластинки

Виконаємо розрахунок граничних навантажень для випадку еліптичного включення з півосями  $a$  і  $b$  із матеріалу ЕФ 32-301, послабленого симетрично розміщеною тріщиною на осі  $Ox$

©В.В.Божидарнік, О.В.Максимович

залежно від її довжини  $l$ . Розраховані за допомогою енергетичного критерію безрозмірні граничні зусилля  $P_{\max} = p_*(l)\sqrt{l} / K_{IC}^{cep}$  за поперечного розтягу зусиллями  $p$  для випадку ізотропної матриці при  $E=15$  ГПа,  $\nu = 0,3$  наведено на рис. 12 при  $b/a = 0,25; 0,5; 1$ , причому біля кривих вказано відношення півосей та позначено  $\alpha = 0,5l/a$ .

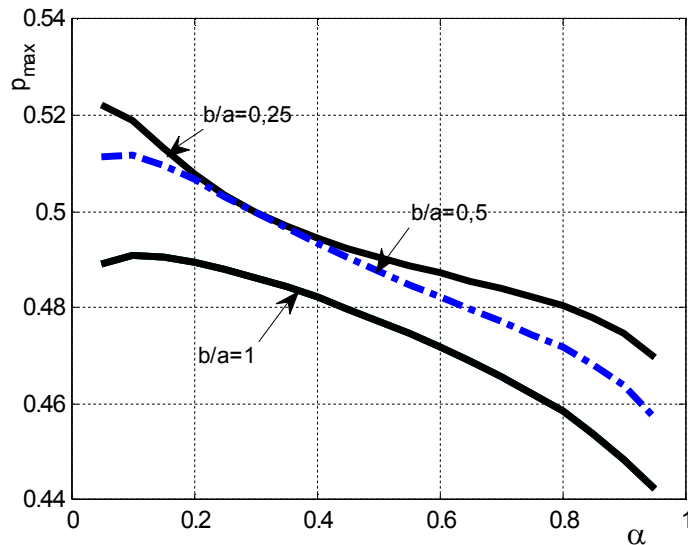


Рис. 12. Залежність граничного навантаження від довжини тріщини

Видно, що найнижчими виявились граничні навантаження для кругового включення. При зменшенні відношення півосей граничні значення зусиль зростають. Граничні значення зусиль при відношенні  $b/a = 0,5$  та при  $b/a = 0,25$  виявились близькими за величиною.

**Висновки.** Розроблено енергетичний критерій руйнування для анізотропних пластинок із тріщинами. Виконано розрахунки граничних навантажень для пластинок, послаблених прямолінійними або ламаними тріщинами в суцільних пластинках та пластинках із отворами і включеннями. Встановлено, що застосування силового критерію руйнування в розрахунках на міцність може привести до істотного завищення граничних навантажень.

1. Кристенсен Р.М. Введение в механику композитов / Р.М. Кристенсен // М.: Мир, 1982. – С. 334.
2. Тарнопольский Ю.М. Пространственно-армированные композиционные материалы / Ю.М. Тарнопольский, И.Г. Жигун, В.А. Поляков // М.: Машиностроение, 1987. – С. 224.
3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий // М.: Наука, 1977. – С. 416.
4. Божидарнік В.В. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами / В.В. Божидарнік, О.В. Максимович // Монографія. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – С. 226.
5. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. В 2-х томах / Под ред. Ю. Мураками // М.: Мир, 1990. – Т. 1. – С. 448.
6. Божидарнік В.В. Механіка руйнування, міцність і довговічність неперервно армованих композитів / В.В. Божидарнік, О.С. Андрейків, Г.Т. Сулим // Том 1. Основи механіки руйнування неперервно армованих матеріалів. – Луцьк: Надстир'я, 2007. – С. 400.