Ю.І.Ковальчик , О.І.Говда
Львівський національний агарний університет, м. Львів

МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ У ФІЗИЧНИХ СИСТЕМАХ ІЗ ДИСКРЕТНИМИ СТАНАМИ ПРИ УПРАВЛІННІ ПРОЕКТАМИ

Обґрунтовано доцільність та методологію застосування випадкових марківських процесів для фізичних систем із дискретними станами при управлінні проектами. Розглянуто модельний приклад.

Ключові слова*: марківський процес, управління проектами, стохастична модель.*

Вступ. Застосування математичних методів та моделей в управлінні проектами та/або процесами в агропромисловому комплексі для підвищення їх ефективності є актуальною науково-практичною проблемою. Проаналізовано останні дослідження та публікації з цього питання. Зокрема, розглянуто моделі розрахунку показників продуктивності збиральної техніки [1,2]. Подібні моделі не враховують ймовірнісного характеру факторів, які впливають на виробничий процес, що знижує точність розрахунків.

Відтак, авторами обґрунтовано доцільність та методологію застосування випадкових марківських процесів для фізичних систем із дискретними станами при управлінні проектами.

Постановка задачі. Вдосконалення методу визначення продуктивності збиральної техніки на підставі застосування випадкових марківських процесів для визначення ймовірності відмов збиральної техніки.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо ймовірність відмов збиральної техніки. Оскільки ми маємо справу з невизначеними факторами відмов, які є випадковими величинами, у нашому випадку ймовірнісні характеристики цих величин можуть бути отримані з практики або відомі заздалегідь. Тоді для побудови математичних моделей застосовні так звані марківські випадкові процеси [3]. Тобто розглядатимемо такі випадкові процеси, для яких в будь-якоий момент часу t_0 ймовірнісні характеристики процесу в майбутньому залежать лише від його стану в даний момент часу t_0 і не залежать від того, коли і як система прийшла до цього стану [3].

При цьому ми розглядатимемо процес із дискретними станами і неперервним часом. Тобто, вважаємо, що система, яка описує працездатність певної кількості одиниць збиральної техніки, може бути в різних можливих станах $S_0, S_1, S_2, S_3,\ \dots,\ S_n$, які можна заздалегідь перерахувати і які характеризуються відмовою внаслідок поломок і позапланових ремонтів певної кількості одиниць цієї техніки. Вважаємо, що перехід зі стану працездатності в стан поломки відбувається раптово, стрибкоподібно, практично моментально, тобто стани дискретні. Оскільки моменти переходів зі стану в стан не є керованими, а невизначені, випадкові, то такі переходи можливі в будь-який момент часу. Таким чином ми будемо розглядати лише процеси з дискретними станами й неперервним часом.

При аналізі таких випадкових процесів для наочності використовують графи станів [3]. Водночас, при побудові стохастичних моделей використовують поняття потоку подій, тобто, послідовність подій, які відбуваються послідовно у випадкові моменти часу. Однією з найважливіших характеристик потоку подій є його інтенсивність – середнє число подій, які відбуваються за одиничний час або час, який вважаємо таким. Ймовірність того, що система не відмовить у певний момент часу, залежить в нашому випадку від справності збиральної техніки, тобто від того, скільки часу пропрацювала одиниця збиральної техніки та коли був останній ремонт. Якщо обидва ці параметри включити в теперішній стан системи, то процес можна вважати марківським.

Для прикладу розглянемо систему із трьох одиниць збиральної техніки. Запишемо можливі дискретні стани цієї системи: S_1– усі три одиниці справні; S_2– перша одиниця ремонтується, друга і третя є справними; S_3– друга одиниця ремонтується, а перша та третя є справними; S_4– третя одиниця ремонтується, а перша і друга є справними; S_5– перша та друга одиниці ремонтуються, а третя є справною; S_6 – перша і третя одиниці ремонтуються, а друга є справною;

S_7 – друга та третя одиниці ремонтуються, а перша є справною; S_8 – усі три одиниці ремонтується. Припускаємо, що середній час ремонту одиниці збиральної техніки не залежить від того, чи ремонтується одна одиниця, чи кілька відразу. Також вважаємо, що, наприклад, перехід системи зі стану S_1 у стан S_5 можливий лише через стани S_2, S_3 та S_4. Тобто вважаємо, що всі одиниці виходять із ладу незалежно одна від одної, ймовірністю одночасного виходу їх із ладу нехтуємо.

Нехай система знаходиться в стані S_1. Очевидно, що у стан S_2 її переводить потік подій, що сприяє відмові першої одиниці збиральної техніки. Його інтенсивність λ_1 рівна одиниці, що ділиться на середній час безвідмовної роботи першої одиниці техніки. У зворотньому напрямку зі стану S_2 у стан S_1 систему переводить потік "закінчення ремонту" першої одиниці збиральної техніки. Його інтенсивність μ_1 рівна одиниці, що ділиться на середній час ремонту першої одиниці. Аналогічно обчислюються інтенсивності потоків подій, що переводять систему із стану в стан. Переходи системи у різні стани зобразимо відповідним графом станів (рис.1).

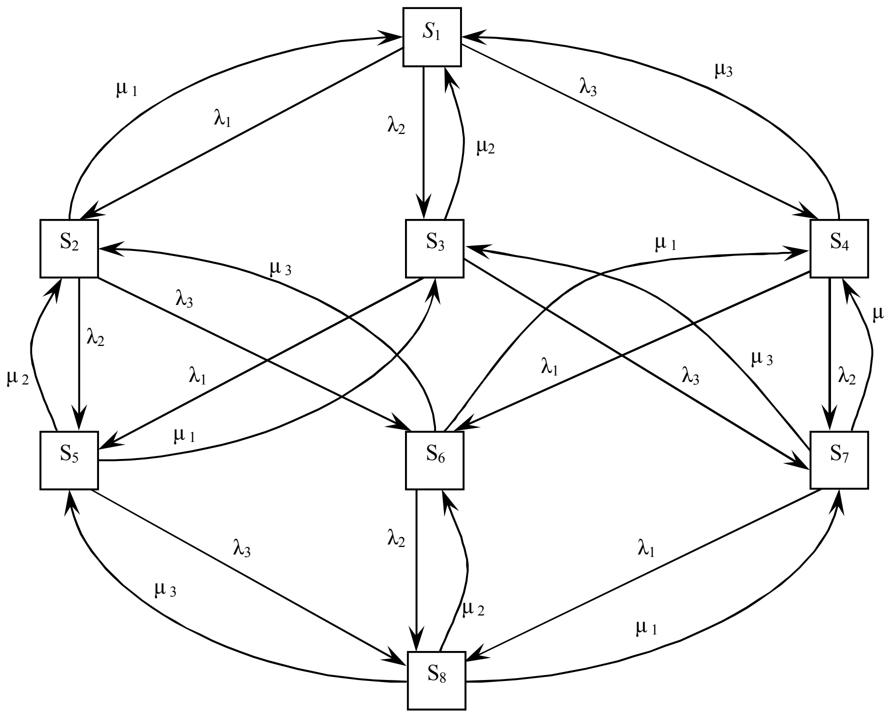

Рис.1. Розмічений граф станів системи

тут λ_1 - інтенсивність потоку подій, що сприяє відмові першої одиниці збиральної техніки;

λ_2 - інтенсивність потоку подій, що сприяє відмові другої одиниці збиральної техніки;

λ_3 - інтенсивність потоку подій, що сприяє відмові третьої одиниці збиральної техніки;

μ_1 - інтенсивність потоку подій "закінчення ремонту" першої одиниці збиральної техніки;

μ_2 - інтенсивність потоку подій "закінчення ремонту" другої одиниці збиральної техніки;

μ_3 - інтенсивність потоку подій "закінчення ремонту" третьої одиниці збиральної техніки.

Очевидно, що, наприклад, в залежності від різних марок комбайнів, часу їх виготовлення та інших параметрів, ці величини будуть різними для різних одиниць збиральної техніки.

Використаємо розмічений граф станів системи (рис.1), побудуємо математичну модель цього процесу.

У даному випадку розглядається система S, яка має вісім можливих станів S_1, S_2, ..., S_8. Назвемо ймовірністю i-го стану ймовірність $p_i(t)$ того, що в момент t система буде знаходитись у стані S_i. Для будь-якого моменту часу сума всіх ймовірностей станів є рівною одиниці:

$$\sum_{i=1}^{8} p_i(t) = 1.$$

Використовуючи розмічений граф станів (рис.1), можна знайти всі ймовірності станів $p_i(t)$ як функції часу. Для цього складемо рівняння Колмогорова – особливі диференціальні рівняння, в яких невідомими функціями є ймовірності станів.

Складемо перше рівняння. Розглянемо одну із ймовірностей станів, наприклад $p_1(t)$. Це – ймовірність того, що в момент t система буде у стані S_1, тобто всі три одиниці техніки будуть справними. Надамо t малого приросту Δt і знайдемо $p_1(t+\Delta t)$ – ймовірність того, що в момент $t+\Delta t$ система перебуватиме у стані S_1. Очевидно, це може трапитися за таких обставин:

1) в момент t система уже була в стані S_1 і за час Δt не вийшла з нього;
2) в момент t система була в стані S_2, а за час Δt перейшла у стан S_1;
3) в момент t система була в стані S_3, а за час Δt перейшла у стан S_1;
4) в момент t система була в стані S_4, а за час Δt перейшла у стан S_1.

Знайдемо ймовірність першого варіанту. Ймовірність того, що в момент t система знаходиться у стані S_1, дорівнює $p_1(t)$. Цю ймовірність потрібно помножити на ймовірність того, що за час Δt жодна з одиниць збиральної техніки не вийде з ладу (система не перейде ні у стан S_2, ні у стан S_3, ні у стан S_4). Інтенсивність потоку подій, що виводить систему із стану S_1 рівна

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3.$$

Отже, ймовірність того, що за час Δt система вийде зі стану S_1, є рівною

$$(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\Delta t,$$

а тому ймовірність того, що за час Δt система не вийде зі стану S_1:

$$1-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\Delta t.$$

Таким чином, ймовірність першого варіанту рівна

$$p_1(t)[1-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\Delta t].$$

Знайдемо ймовірність другого варіанту. Вона є рівною ймовірності того, що в момент t система була в стані S_2, а за час Δt перейшла у стан S_1, тобто вона рівна

$$p_2(t)\mu_1\Delta t.$$

Аналогічно ймовірностями третього і четвертого варіантів є відповідно ймовірності:

$$p_3(t)\mu_2\Delta t \text{ і } p_4(t)\lambda_6\Delta t.$$

Додаючи всі ці ймовірності, отримаємо:

$$p_1(t+\Delta t) = p_1(t)[1-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\Delta t] + p_2(t)\mu_1\Delta t + p_3(t)\mu_2\Delta t + p_4(t)\mu_3\Delta t. \quad (1)$$

Після нескладних перетворень в (1) отримаємо диференціальне рівняння для $p_1(t)$:

$$\frac{dp_1}{dt} = \mu_1 p_2 + \mu_2 p_3 + \mu_3 p_4 - (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)p_1. \quad (2)$$

Аналогічно напишемо ще сім диференціальних рівнянь для всіх інших станів. Отримаємо систему диференціальних рівнянь для ймовірностей станів:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp_1}{dt} &= \mu_1 p_2 + \mu_2 p_3 + \mu_3 p_4 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) p_1, \\
\frac{dp_2}{dt} &= \lambda_1 p_1 + \mu_2 p_5 + \mu_3 p_6 - (\lambda_2 + \lambda_3 + \mu_1) p_2, \\
\frac{dp_3}{dt} &= \lambda_2 p_1 + \mu_1 p_5 + \mu_3 p_7 - (\lambda_1 + \lambda_3 + \mu_2) p_3, \\
\frac{dp_4}{dt} &= \lambda_3 p_1 + \mu_1 p_6 + \mu_2 p_7 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_3) p_4, \\
\frac{dp_5}{dt} &= \lambda_1 p_3 + \lambda_2 p_2 + \mu_3 p_8 - (\lambda_3 + \mu_1 + \mu_2) p_5, \\
\frac{dp_6}{dt} &= \lambda_1 p_4 + \lambda_3 p_2 + \mu_2 p_8 - (\lambda_2 + \mu_1 + \mu_3) p_6, \\
\frac{dp_7}{dt} &= \lambda_2 p_4 + \lambda_3 p_3 + \mu_1 p_8 - (\lambda_1 + \mu_2 + \mu_3) p_7, \\
\frac{dp_8}{dt} &= \lambda_1 p_7 + \lambda_2 p_6 + \lambda_3 p_5 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) p_8.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Це – система восьми лінійних диференціальних рівнянь (рівнянь Колмогорова), що мають вісім невідомих функцій $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4, p_5, p_6, p_7, p_8$. Одне з рівнянь можна відкинути, оскільки

$$\sum_{i=1}^{8} p_i(t) = 1.$$

При заданні початкових умов і визначенні фінальних ймовірностей [3], а також при заданій величині інтенсивностей потоків подій та, в результаті розв’язування системи (3) отримуються шукані ймовірності. Для знаходження розв’язків для подібних порівняно складних систем будуть ефективними числові методи.

Висновки.

1. Модельні розв’язки можуть бути застосовані для конкретних умов збирання сільської продукції, прогнозування технологічної продуктивності збиральної техніки, оптимізації кількості її одиниць для конкретних умов збирання сільськогосподарської продукції, визначення показників продуктивності, розрахунку економічної ефективності тощо.

2. Продуктивність збиральної техніки під час виконання операцій проектів збирання сільськогосподарської продукції має ймовірнісний характер. Тому доцільно застосовувати стохастичні задачі із використанням випадкових марківських процесів у моделях визначення продуктивності збиральної техніки, оптимізації її кількості для конкретних проектів та розрахунку економічної ефективності.

1. О.Сидорчук, В.Тимочко, Є.Ціп. Імітаційна модель роботи зернозбирального комбайна впродовж сезону //Вісник ЛДАУ: Агроінженерні дослідження.- 2001. - №5. – 17-26.
2. В.Тимочко Відображення моделлю проекту збирання врожаю зернових культур у сільськогосподарському підприємстві //Вісник ЛНАУ: Агроінженерні дослідження.- 2009. - №13. – 43-51.
3. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М. Высшая школа, 2001.–208с.
4. Ю.І. Ковальчик, С.Й. Ковалишин, В.О. Тимочко. Використання випадкових харківських процесів в управлінні проектами збирання сільськогосподарської продукції //Східно-Європейський журнал передових технологій.- 2011.- №1.- 57-59.