

УДК 539.375

М.М.Николишин¹, А.В.Маткова², В.І.Шваб'юк², Ю.П.Фещук²¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача²Луцький національний технічний університет

ВПЛИВ ЗВАРНИХ НАПРУЖЕНЬ НА ГРАНИЧНУ РІВНОВАГУ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ТРІЩИНОЮ

Досліджено вплив зварних напружень на граничну рівновагу циліндричної оболонки з тріщиною. Запропоновано алгоритм числового розв'язування отриманої системи, який ґрунтується на методі механічних квадратур. Для пластини, що знаходиться в аналогічних умовах, отримано замкнутий розв'язок.

Ключові слова: оболонка з тріщиною, зварні напруження, інтегральні рівняння, розкриття тріщини.

1. Постановка задачі. Нехай замкнута циліндрична оболонка, серединна поверхня якої віднесена до ліній кривини α, β , зварена із двох частин поперечним швом шириною $l_1 (|\alpha| < \alpha_1 = l_1 / R)$. Будемо вважати, що основний матеріал оболонки і метал шва мають однакові пружні характеристики (E, ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуасона), але різні границі текучості, відповідно σ_{T2}, σ_{T1} (рис. 1). В околі зварного шва оболонка ослаблена поздовжньою ненаскрізною тріщиною ($|\alpha| < \alpha_0, \beta = 0, h - 2d \leq \gamma \leq h (\alpha_0 = l_3 / R); 2l_3, 2d$ – довжина і глибина тріщини; $2h$ та R – товщина оболонки та радіус її серединної поверхні; γ – нормальна до серединної поверхні координата). Оболонка знаходиться під дією симетричних відносно лінії тріщини зусиль та моментів. Поведінка матеріалу, величина зовнішнього навантаження та розміри тріщини вважаються такими, що пластичні деформації розвиваються вузькою смугою по всій товщині оболонки в деякому околі тріщини. Згідно з аналогом δ_c -моделі Леонова-Панасюка-Дагдейла пластичну зону замінимо поверхнею розриву пружних зміщень, а реакцію матеріалу пружної зони на пластичну замінимо відповідними напруженнями. Тобто вважатимемо, що на продовженні тріщини в глибину при $|\alpha| < \alpha_0, -h \leq \gamma \leq (h - 2d)$ мембранні напруження постійні і рівні границі текучості σ_{T1} , коли $|\alpha| \leq \alpha_1$ та σ_{T2} , коли $\alpha_1 \leq |\alpha| \leq \alpha_0$, а перед реальною тріщиною при $\alpha_0 < |\alpha| < \alpha_2$ ($\alpha_2 = l_5 / R, l_5 = l_3 + \rho, \rho$ – довжина пластичної зони перед тріщиною) діють нормальне зусилля N і згинний момент M , які задовольняють одну з умов пластичності тонких оболонок. Таким чином поверхнева тріщина в полі залишкових напружень замінена фіктивною наскрізною тріщиною невідомої довжини, на берегах якої виконуються умови

$$N_2(\alpha, 0) = \begin{cases} 2\sigma_{T1}(h-d) - N_2^0 - N_2^*, & |\alpha| < \alpha_1 \\ 2\sigma_{T2}(h-d) - N_2^0 - N_2^*, & \alpha_1 < |\alpha| < \alpha_0 \\ N - N_2^0 - N_2^*, & \alpha_0 < |\alpha| < \alpha_2, \end{cases} \quad (1)$$

$$M_2(\alpha, 0) = \begin{cases} 2\sigma_{T1}(h-d) - M_2^0 - M_2^*, & |\alpha| < \alpha_1 \\ 2\sigma_{T2}(h-d) - M_2^0 - M_2^*, & \alpha_1 < |\alpha| < \alpha_0 \\ M - M_2^0 - M_2^*, & \alpha_0 < |\alpha| < \alpha_2. \end{cases}$$

Тут N_2^0, M_2^0 – зусилля і момент в оболонці без тріщини, викликані зовнішнім навантаженням, N_2^*, M_2^* – залишкові зусилля і момент, викликані наявністю зварного шва.

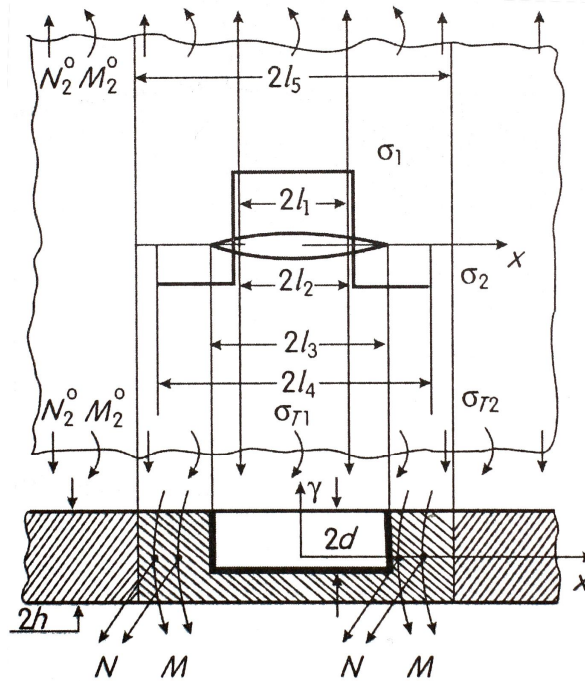


Рис. 1. Схема пластини з тріщиною, що знаходиться в полі зварних напружень

2. Зведення задачі до системи сингулярних інтегральних рівнянь. Задача визначення збуреного напруженого стану циліндричної оболонки з наскрізною тріщиною завдовжки $2l_5$ за допомогою методики, викладеної у [1] зводиться до системи сингулярних інтегральних рівнянь

$$\sum_{j=1,2-\alpha_1}^{\alpha_1} F_j(\xi) K_{ij}(\xi - \alpha) d\xi = f_i^*(\alpha), |\alpha| < \alpha_1, i = 1, 2 \quad (2)$$

де

$$F_1(\xi) = \frac{1}{R} [v'(\xi)], F_2(\xi) = -C [\theta_2'(\xi)],$$

$$f_1^*(\alpha) = \frac{2\pi}{Eh} N_2(\alpha, 0), \quad (3)$$

$$f_2^*(\alpha) = \frac{2\pi}{EhRc} M_2(\alpha, 0).$$

Ядра системи (2) мають вигляд

$$K_{11}(z) = \frac{1}{2} a_{11} cth \frac{z}{2} + K_{11}^0(z), K_{12}(z) = K_{21}(z) = \frac{1}{2} a_{12} cth \frac{z}{2} + K_{12}^0(z), \quad (4)$$

$$K_{22}(z) = \frac{1}{2} a_{22} cth \frac{z}{2} + K_{22}^0(z),$$

де K_{ij}^0 – неперервні для всієї множини дійсних значень α та ξ функції [1].

Перетворимо систему (2) до системи інтегральних рівнянь із ядрами Коші. Для цього введемо нові змінні $u = \xi / \alpha_1$, $S = \alpha / \alpha_1$ і після деяких перетворень цю систему запишемо

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Omega_m(\alpha_1 u)}{u - s} du = G_m(s), |s| < 1, m = 1, 2, \quad (5)$$

де

$$G_m = b_m f_m(\alpha_1 s) - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 \Omega_j(\alpha_1 u) \psi_{mj}^0 [\alpha_1(u - s)] du,$$

$$b_1 = 1, b_2 = \frac{1}{Rc}, \Omega_j = Eh(a_{j1} F_1(\alpha_1 u) + a_{j2} F_2(\alpha_1 u)),$$

$$\begin{aligned}\psi_{11}^0(z) &= \alpha_1 \left[\frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{z}{2} - \frac{1}{z} + \psi_{11}(z) \right], \quad \psi_{12}^0(z) = \alpha_1 \psi_{12}(z), \\ \psi_{22}^0(z) &= \alpha_1 \left[\frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{z}{2} - \frac{1}{z} + \psi_{22}(z) \right], \quad \psi_{21}^0(z) = \alpha_1 \psi_{21}(z), \\ \psi_{11}(z) &= \frac{1}{\Delta} \left[a_{22} K_{11}^0(z) - a_{21} K_{12}^0(z) \right], \quad \Delta = a_{11} a_{22} - a_{13}^2, \\ \psi_{12}(z) &= \frac{1}{\Delta} \left[a_{11} K_{12}^0(z) - a_{12} K_{11}^0(z) \right], \\ \psi_{21}(z) &= \frac{1}{\Delta} \left[a_{22} K_{21}^0(z) - a_{21} K_{22}^0(z) \right], \\ \psi_{22}(z) &= \frac{1}{\Delta} \left[a_{11} K_{22}^0(z) - a_{12} K_{21}^0(z) \right].\end{aligned}$$

Функції $\psi_{mj}^0(z)$ – неперервні для всієї множини дійсних значень s та u , через те, що неперервними є функції K_{mj}^0 . Із зображення (5) бачимо, що ядра отриманої системи інтегральних рівнянь складаються із сингулярного ядра Коші та регулярної частини. Сингулярні інтеграли приймаються, як головне значення за Коші

$$\int_{-1}^1 \frac{\Omega_m(u)}{u-s} du = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-1}^{s-\varepsilon} \frac{\Omega_m(u)}{u-s} du + \int_{s+\varepsilon}^1 \frac{\Omega_m(u)}{u-s} du \right], \quad s \in [-1, 1]. \quad (6)$$

Розв'язки систем сингулярних інтегральних рівнянь (2) повинні задовольняти умови

$$\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} F_m(\xi) d\xi = 0 \quad (m = \overline{1, 2}), \quad (7)$$

які забезпечують неперервність переміщень та кутів повороту у вершинах тріщин.

3. Розв'язування системи сингулярних інтегральних рівнянь. Відповідно до моделі в одержаній системі інтегральних рівнянь (2), невідомі границі інтегрування α_1 , а також величини зусиль та моментів N, M , що відповідають реакції пластичної зони на пружну і задовольняють відповідну умову пластичності. На випадок симетричного навантаження за умову пластичності для ідеально пружнопластичного матеріалу оболонки приймемо умову пластичності Треска у вигляді умови пластичності поверхневого шару

$$\frac{N}{2h\sigma_T} + \frac{3|M|}{2h^2\sigma_T} = 1, \quad (8)$$

або умову пластичного шарніру [2]

$$\left(\frac{N}{2h\sigma_T} \right)^2 + \frac{|M|}{h^2\sigma_T} = 1, \quad (9)$$

де σ_T – межа текучості.

Умова пластичності (8) або (9) використовується для визначення довжини пластичної зони, тобто півдовжини фіктивної тріщини α_1 . Для знаходження невідомих величин зусиль і моментів N, M , використаємо умови скінченності зусиль та моментів біля вершини фіктивної тріщини. Для цього достатньо, щоб відповідні коефіцієнти інтенсивності напружень були рівні нулю, тобто у випадку симетричного відносно тріщини навантаження

$$K_1 = K_2 = 0. \quad (10)$$

При побудові розв'язку системи сингулярних інтегральних рівнянь з розривними функціями в правих частинах використаємо метод, запропонований в роботі [3] для одного рівняння аналогічного типу. З цією метою шукані функції Ω_m запишемо у вигляді суми

$$\Omega_m(S) = h_m(S) + \psi_m(S), \quad (i = 1, 2). \quad (11)$$

Тут $h_m(S)$ – розв'язок системи рівнянь

$$\sum_{j=1}^2 a_{ij} \int_{-1}^1 \frac{h_j(t)}{t-s} dt = f_i(S), |s| \leq 1 (i=1,2), \quad (12)$$

який задовольняє умови

$$\int_{-1}^1 h_i(t) dt = 0. \quad (13)$$

Підставляючи (12) в (6) і враховуючи (13), для визначення $\psi_m(S)$ отримаємо систему інтегральних рівнянь

$$\sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 \psi_j(t) \left\{ \frac{a_{ij}}{t-s} + \alpha_1 \psi_{ij}^0 [\alpha_1(t-s)] \right\} dt = g_i(S), |s| < 1; i=1,2, \quad (14)$$

з умовами

$$\int_{-1}^1 \psi_i(u) du = 0, (i=1,2). \quad (15)$$

де

$$g_i(S) = -\alpha_1 \int_{-1}^1 \sum_{j=1}^2 h_j(t) \psi_{ij}^0 [\alpha_1(t-s)] dt. \quad (16)$$

Отже розв'язання системи (5) звелось до розв'язання канонічних сингулярних рівнянь типу (12) і системи сингулярних інтегральних рівнянь (14) з неперервною правою частиною.

Функції $h_i(t)$, як розв'язок рівнянь (12) з умовами (13), не є обмеженими на кінцях відрізка $[-1,1]$. Отже, використавши формулу обернення інтегралів типу Коші отримаємо

$$\sum_{j=1}^2 a_{ij} h_j(t) = -\frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-t^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} f_i(\tau)}{\tau-t} d\tau. \quad (17)$$

Після інтегрування та деяких перетворень маємо

$$h_i(t) = \frac{1}{\Delta \pi^2 \sqrt{1-t^2}} [\pi D_i^0 t - D_i z(t)], i=1,2, \quad (18)$$

де

$$\begin{aligned} D_i^0 &= F_R^i(N_2^0, M_2^0), D_i = F_R^i(N, M) \\ F_R^i(X, Y) &= b_{1i} \frac{X}{2h\sigma_T} + b_{2i} \frac{k^*}{h^2\sigma_T} Y, i=1,2, \\ b_{11} &= a_{22}, b_{12} = -a_{21}, b_{22} = a_{11}, \\ z(t) &= 2\mathcal{G}^* t + \sqrt{1-t^2} L_1(t), \mathcal{G}^* = \arccos \tau_0, \\ L_1(t) &= \ln \left| \frac{\tau_0 \sqrt{1-t^2} - t \sqrt{1-\tau_0^2}}{\tau_0 \sqrt{1-t^2} + t \sqrt{1-\tau_0^2}} \right|, k^* = \frac{h}{2Rc}. \end{aligned}$$

Підставляючи (18) в (16) для правої частини системи (14) отримаємо

$$g_i(S) = g_i^0(S) + \sum_{p=1}^2 G_p g_i^{(p)}(S), i=1,2. \quad (19)$$

Тут

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{N}{2h}, G_2 = \frac{k^* M}{h^2}, \\ g_i^0(S) &= k_s \pi \sum_{j=1}^2 D_j^0 l_{ij}^0(S), g_i^{(p)}(S) = k_s \sum_{j=1}^2 b_{pj} l_{ij}^*(S), \\ l_{ij}^0(S) &= \int_0^\pi \psi_{ij} [\alpha_1(\cos \vartheta - s)] \cos \vartheta d\vartheta, \end{aligned}$$

$$l_{ij}^*(S) = \int_0^\pi \psi_{ij} [\alpha_1 (\cos \vartheta - s)] z(\cos \vartheta) d\vartheta, \\ k_s = \alpha_1 / (\Delta \pi^2).$$

У відповідності до (19) функції $\psi_i(t)$ будемо шукати у вигляді лінійної комбінації

$$\psi_i(t) = \psi_i^0(t) + \sum_{p=1}^2 G_p \psi_i^{(p)}(t). \quad (20)$$

Кожна пара $\psi_i^{(p)} (i=1,2)$ є розв'язком системи інтегральних рівнянь (14) з правою частиною $g_i^{(p)}$ і задовольняє умови

$$\int_{-1}^1 \psi_i^{(p)}(t) dt = 0, \quad p = 0, 1, 2. \quad (21)$$

Розв'язок $\psi_i^{(p)}(t)$, $i=1,2$, $p=0,1,2$, будемо за допомогою методу механічних квадратур. Зобразимо $\psi_i^{(p)}(t)$ у вигляді

$$\psi_i^{(p)}(t) = \frac{\varphi_i^{(p)}(t) + C_i^{(p)}}{\sqrt{1-t^2}}, \quad (22)$$

де $\varphi_i^{(p)}(t)$ – регулярні функції на відрізку $[-1,1]$.

Для шуканих функцій $\varphi_i^{(p)}(t)$ будемо інтерполяційні поліноми Лагранжа по чебишевських вузлах

$$\tau_l = \cos \vartheta_l, \quad \vartheta_l = \frac{2l-1}{2n_c} \pi, \quad (23)$$

які можна записати у вигляді

$$L_{nc}[\varphi_i^{(p)}, t] = \sum_{v=0}^{n_c-1} A_{iv}^{(p)} T_v(\tau). \quad (24)$$

Тут

$$A_{iv}^{(p)} = \frac{\lambda_v}{n_c} \sum_{l=1}^{n_c} \varphi_i^{(p)}(\tau_l) \cos v\vartheta_l, \quad \lambda = \begin{cases} 1, & v=0 \\ 2, & v>0 \end{cases}$$

T_v – многочлени Чебишева першого роду, n_c – число вузлів Чебишева (парне). Замінивши тепер в (14) сингулярний інтеграл квадратурною формулою та застосувавши формулу Гауса до інтеграла від регулярної частини ядра, отримаємо систему $6n_c$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $6n_c$ наближених значень шуканих функцій $\varphi_i^{(p)}(\tau_l)$ у вузлових точках і шести постійних $C_l^{(p)}$.

Приєднуючи до отриманої системи 6 рівнянь умови (21) та враховуючи (22), (23), отримаємо повну систему $6(n_c + 1)$ алгебраїчних лінійних рівнянь для $6(n_c + 1)$ невідомих.

4. Приклад. Для випадку, коли оболонка і береги тріщин завантажені симетрично відносно лінії $\alpha = 0$ (дія внутрішнього тиску), шукані функції будуть непарні і тому розв'язок системи сингулярних інтегральних рівнянь (15) можна звести до розв'язання системи $3n_c$ алгебраїчних рівнянь

$$\varphi_i^{(p)}(t) = \sum_{v=1}^{n_c/2} A_{i,2v-1}^{(p)} T_{2v-1}(t), \quad (25)$$

$$A_{i,2v-1}^{(p)} = \frac{4}{n_c} \sum_{l=1}^{n_c/2} \varphi_{iv}^{(p)} \cos[(2x-1)\vartheta_l],$$

$$\varphi_{iv}^{(p)} = \varphi_i^{(p)}(\cos \vartheta_v), \quad i=1,2, \quad p=0,1,2, \quad l = \overline{1, n_c/2},$$

$\varphi_{iv}^{(p)}$ – значення шуканих функцій у вузлових точках, визначаються із системи

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{v=1}^2 (\alpha_{lv}^{ij} \varphi_{jv}^{(p)}) = g_{il}^{(p)} \quad (26)$$

$$i = 1, 2, p = 0, 1, 2, l = \overline{1, n_c / 2}.$$

Тут

$$g_{il}^{(p)} = g_i^{(p)} (\cos \vartheta_l),$$

$$\alpha_{lv}^{ij} = \frac{\pi}{n_c} \left[a_{ij} \psi_{lv} + \alpha_1 \left(K_{ij}^0(z_{lv}^{(1)}) - K_{ij}^0(z_{lv}^{(2)}) \right) \right],$$

$$z_{lv}^{(1)} = \alpha_1 (\cos \vartheta_v - \cos \vartheta_l), z_{lv}^{(2)} = \alpha_1 (\cos \vartheta_v + \cos \vartheta_l),$$

$$\psi_{lv} = \frac{1}{\sin \vartheta_l} \left[ctg \frac{\vartheta_l \mp \vartheta_v}{2} + tg \frac{\vartheta_l \mp \vartheta_v}{2} \right].$$

В останній формулі верхній знак береться, коли число $|l - v|$ непарне, а нижній – коли воно парне.

Розглянемо випадок, коли береги тріщини вільні від навантажень, тобто $N_2^1 = M_2^1 = 0$. Визначивши при цій умові коефіцієнти інтенсивності згідно з [1] і задовольнивши умови (10) (добившись тим самим скінченності зусилля N_2 та моменту M_2 у вершині тріщини), отримуємо необхідні два рівняння для невідомих N і M

$$\pi \frac{N_2^0}{2h\sigma_T} - 2\vartheta^* \frac{N}{2h\sigma_T} + \pi^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{v=1}^{n_c/2} \alpha_{1j} A_{j,2v-1} = 0, \quad (27)$$

$$\pi k^* \frac{M_2^0}{h^2\sigma_T} - 2\vartheta^* \frac{M}{h^2\sigma_T} + \pi^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{v=1}^{n_c/2} \alpha_{1j} A_{j,2v-1} = 0,$$

де

$$A_{j,v} = A_{j,v}^0 + \sum_{p=1}^2 G_p A_{j,v}^{(p)}.$$

Система рівнянь (26), (27) та (8) або (9) – повна. Алгоритм її розв'язання такий: вибираємо деяке початкове наближене значення α_1 , визначаємо $g_{i,v}^{(p)} (i = 1, 2; p = 0, 1, 2; v = \overline{1, n_c / 2})$ і записуємо систему (26) на невідомі $\varphi_{i,v}^{(p)}$; розв'язавши отриману систему за формулами (26) визначимо $A_{j,v}^{(p)}$, а після цього з рівнянь (27) визначимо N та M , які підставляємо в умови (8) чи (9); якщо вибрана умова пластичності задовольняється з наперед заданою точністю, то задача розв'язана, якщо ні – змінюємо певним чином α_1 і процедуру повторюємо.

Інтегруючи отриманий розв'язок, розкриття тріщини $\delta(\alpha, \gamma)$ в довільній її точці визначимо за формулою

$$\delta(\alpha, \gamma) = [v(\alpha / \alpha_1)] + \gamma [\theta(\alpha / \alpha_1)], |\alpha| < \alpha_1, |\gamma| < h. \quad (28)$$

Тут

$$[v(t)] = \frac{4}{k_E} l_1 \mu_1(t); [\theta_2(t)] = -\frac{4}{k_E} \frac{l_1}{R_c} \mu_2(t); |t| \leq 1,$$

$$\mu_i(t) = \frac{1}{\pi^2 \Delta} \left\{ \pi D_i^0 R_1(t) - D_i (2\vartheta^* R_1(t) + W(t)) \right\} + \sum_{v=1}^{n_c/2} A_{i,2v-1} R_{2v-1}(t)$$

$$i = 1, 2$$

$$R_m(t) = -\frac{1}{m} \sin(m \arccos t), m = 1, 2, \dots,$$

$$W(t) = \begin{cases} tL_1(t) - \tau_0 L_2(t) & t \neq \tau_0 \\ -2\tau_0 \ln \tau_0 & t = \tau_0 \end{cases},$$

$$L_2(t) = \ln \left| \frac{\sqrt{1-t^2} - \sqrt{1-\tau_0^2}}{\sqrt{1-t^2} + \sqrt{1-\tau_0^2}} \right|$$

Прирівнявши праву частину (28) до величини критичного розкриття тріщини δ_c , яке при заданих умовах навоколишнього середовища та швидкості деформації є константою матеріалу [4], прийдемо до критеріального співвідношення, яке встановлює зв'язок між зовнішнім навантаженням, довжиною тріщини, геометричними та фізико-механічними параметрами оболонки в умовах гранично рівноважного стану.

5. Зварена встик пластина з тріщиною в полі зварних напружень. У випадку, коли ненаскрізна поверхнева тріщина знаходиться у пластині, на яку діють постійні розтягуючі зусилля N_2^0 , згинний момент M_2^0 , та залишкові напруження, розподіл яких апроксимований прямокутною епюрою система СІР виду (13) (з врахуванням (1)) має замкнутий розв'язок. Це дозволяє з врахуванням умов пластичності (9) та умов обмеженості напружень в околі тріщини ($K_1 = K_2 = 0$) отримати відносно прості формули для

визначення довжини пластичної зони, невідомих зусилля та моменту, що діють в ній, та величини розкриття тріщини

$$\begin{aligned} N &= \left[4\sigma_{T2}(h-d)\omega_3 - \pi(N_2^0 + 2A_4\omega_4 + 2A_2\omega_2 + 2A_1\omega_1) \right] / B_2, \\ M &= - \left[4\sigma_{T2}d(h-d)\omega_3 - \pi(M_2^0 + 2B_1\omega_1) \right] / B_2, \quad B_2 = 2\omega_3 - \pi, \\ l_3/l_5 &= \sin \left\{ \frac{\pi h^2}{2d^2} \left[1 + B_1(M_2^0 - hN_2^0) + 4B_3(h^2 - d^2)(\sigma_{T2} - \sigma_{T1}) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \omega_1 / \pi - 4h^2B_3(\sigma_2\omega_4 + c_2\omega_2) \right] \right\}, \quad B_3 = 1 / (2h^2\sigma_{T2}), \\ \delta(x, \gamma) &= 2\pi \sum_{i=1}^4 \left[(x-l_1)\Gamma_i^+ - (x+l_1)\Gamma_i^- \right] C_i / E, \\ C_1 &= a_1(\sigma_{T1} - \sigma_{T2}), \quad C_2 = \sigma_1 - \sigma_2, \quad C_4 = \sigma_2, \\ C_3 &= \left[N - M\gamma / (h^2a_2) \right] / (2h) - a_1\sigma_{T2}, \quad a_2 = (3+\nu) / (3(1+\nu)), \\ a_1 &= \left[1 - d\gamma / (h^2a_2) \right] (h-d) / h, \quad \omega_i = \arcsin(l_i/l_5), \\ A_1 &= -2(h-d)(\sigma_{T1} - \sigma_{T2}) / \pi, \quad A_2 = 2hC_2 / \pi, \quad A_4 = 2h\sigma_2 / \pi, \\ \Gamma_i^+ &= \Gamma(l_5, x, l_i), \quad \Gamma_i^- = \Gamma(l_5, x, -l_i). \end{aligned} \quad (29)$$

Функції $\Gamma(a, x, \zeta)$ наведені в [5], x – координата вздовж лінії тріщини. На випадок наскрізної тріщини ($d = h$) формули (30) співпадають з наведеними в [6].

Прямокутна епюра розподілу залишкових напружень σ_{yy} вибрана так, щоб площа і розміщення зон розтягу та стиску мало відрізнялись від площі і розміщення цих зон в криволінійній епюрі, отриманій в [7] при дослідженні задачі про зварювання напівбезмежних пластин. Відзначимо, що результати обчислення довжини пластичних зон та розкриття ненаскрізної тріщини отримані при використанні обох епюр, мало відрізняються. Зауважимо, що у випадку криволінійної епюри залишкових напружень система СІР розв'язувалась числово за методикою приведеною в першому розділі.

Прирівнявши вираз (29) до критичного значення розкриття вершини тріщини, отримаємо критеріальне співвідношення, яке зв'язує зовнішнє навантаження, рівень і розподіл залишкових напружень, довжину і глибину тріщини та фізико-механічні параметри пластини в умовах граничної рівноваги.

Висновок. Система сингулярних інтегральних рівнянь з невідомими границями інтегрування та розривними функціями в правих частинах разом з умовами пластичності (8) або (9) та умовами обмеженості напружень (10) створюють повну систему для розв'язання поставленої задачі.

Розглянуто приклад зварної встик пластини в полі зварних напружень. Визначено довжину пластичної зони, величину розкриття тріщини, невідомі зусилля та моменти, що діють в пластичній зоні.

1. Кушнір Р.М. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами / Кушнір Р.М., Николишин М.М., Осадчук В.А. – Львів: Національна академія наук України, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача. Вид-во "Сполом". – 2003. – 320 с.
2. Кир'ян В.І. Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій / Кир'ян В.І., Осадчук В.А., Николишин М.М. – Львів: СПОЛОМ. – 2007. – 320 с.
3. Loakimidis N.I. The numerical solution of problems in plane elasticity in the case of loading discontinuities / Loakimidis N.I. // Eng. Fract. Mech. 1980. – 13, №4. – P. 709 – 716.
4. Черных К.Ф. Связь между дислокациями и сосредоточенными воздействиями в теории оболочек / Черных К.Ф. // Прикл. математика и механика. – 1959. – 23, №2. – С. 249 – 257.
5. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения / Черепанов Г.П. / М.: Наука, 1974. – 640 с.
6. Довбня К.М. До питання дослідження концентрації напружень у ортотропній оболонці з отвором довільної конфігурації / Довбня К.М. // Доп. НАН України. Сер. А. – 2001. – №8. – С. 33 – 36.
7. Kushnir R.M. Stressed state of thin piecewise-homogeneous shells with cracks / Kushnir R.M., Olijnyk S.Ya. // Fracture Mechanics: Successes and Problems. Collection of Abstracts of 8th Intern. Conf. on Fracture (June 8-14. 1993. Kyiv). – Part 1. – P. 127, 128.