

УДК 624.075: 539.3

Т. Ушак

Конструкторське бюро ТзОВ "Ю.Ді.Сі.Холдинг"

МЕТОД ДИСКРЕТИЗАЦІЇ В ЗАДАЧІ ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ОБОЛОНКИ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

В даній статті запропонований новий наближений метод розв'язку задач про вільні коливання циліндричних оболонок змінної жорсткості. Задача знаходження частот вільних коливань таких оболонок зводиться до розв'язування диференціального рівняння з змінними коефіцієнтами. В основу методу покладено апроксимацію коефіцієнтів відповідних диференціальних рівнянь узагальненими функціями. Стаття містить порівняльні результати та демонструє ефективність методу при розв'язуванні задач динаміки. Отримані нові результати, які є невідомі в спеціалізованій літературі та побудовані форми коливань оболонок змінної товщини.

В інженерній практиці часто зустрічаються задачі, де кругова циліндрична оболонка перебуває під дією сил, які розподілені симетрично відносно осі циліндра. Розподіл напружень в циліндричних котлах, під тиском пари, напруження в циліндричних резервуарах з вертикальною віссю, під дією внутрішнього тиску рідини, напруження в циліндричних силосах під дією тиску сипучих речовин, напруження в круглих трубах під рівномірним внутрішнім тиском - приклади таких задач. В даній статті розглядається проблема визначення частот власних коливань циліндричних оболонок зі змінною товщиною стінки при осесиметричному статичному навантаженні. При сталій товщині стінки задачу можна розв'язати, як аналітичними [1,2] так і наближеними методами [3]. Широко розповсюдженим є метод початкових елементів в матричній формі [4], де для розв'язання цієї задачі необхідно побудувати матриці фундаментальних функцій оболонки. Фундаментальні функції визначаються аналітичними або наближеними методами. Проте, при змінній товщині стінки кругового циліндра, інтегрування диференціальних рівнянь класичними підходами пов'язане з значними труднощами, або з появою складних фундаментальних функцій. У даній роботі для розв'язування задач на вільні коливання тонкостінної циліндричної оболонки змінної циліндричної жорсткості застосовується метод дискретизації, який ґрунтується на концепції квазіпохідних для квазидиференціальних рівнянь (КДР) з узагальненими коефіцієнтами та апроксимації розв'язків відповідних їм систем лінійних диференціальних рівнянь із мірами [5].

1. Постановка задачі. Розглянемо задачі про вільні коливання циліндричної оболонки рис.1. Для запису рівнянь використаємо циліндричні координати. Квадрат довжини довільного елемента, який лежить в серединній поверхні буде $ds^2 = d\alpha^2 + R d\beta^2 + d\gamma$, де R - радіус циліндра. Якщо тонка кругова циліндрична оболонка змінної товщини стінки $H(x)$ навантажена нормальним навантаженням, то напружено-деформований стан оболонки буде осесиметричним. При цьому $v \equiv 0$, а переміщення u , w та всі зусилля і моменти будуть залежати від осевої координати α . Таким чином мембранні сили зсуву $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} = 0$, а сили N_β сталі по колу. Поперечні сили, за винятком Q_α дорівнюють нулю. Крутні моменти $M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha} = 0$, а згинаючі моменти M_φ сталі по колу. В цьому випадку співвідношення пружності для оболонки сталої товщини h будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} N_\alpha &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha d\gamma = \bar{E}H \left[\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{w}{R} \right]; N_\beta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\beta d\gamma = \bar{E}H \left[\frac{w}{R} + \mu \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right]; \\ M_\alpha &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha \gamma d\gamma = -D \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}; M_\beta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\beta \gamma d\gamma = -D\mu \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

де $D = \frac{EH^3}{12(1-\mu^2)}$ - жорсткість оболонки при згині; $\bar{E} = E/(1-\mu^2)$; μ - коефіцієнт Пуасона.

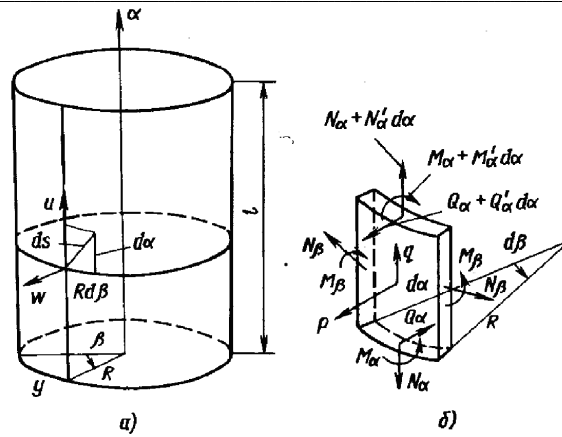


рис.1

Рівняння руху циліндричної оболонки в даних умовах будуть:

$$\begin{cases} D \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + \frac{EH}{R} \left[\frac{w}{R} + \mu \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right] + \rho H \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Виключивши з першого рівняння $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$ отримаємо рівняння для визначення частот вільних коливань циліндричної оболонки з змінною товщиною стінки [6,7]:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^2} \left(D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) \right) + \frac{EH(\alpha)}{R^2} w + \rho H(\alpha) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \quad (3)$$

Застосувавши до рівняння (3) метод Фур'є отримаємо

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} \left(D \frac{d^2 w}{d\alpha^2} \right) + \left(\frac{E}{R^2} - \rho \omega^2 \right) H(\alpha) w = 0 - \quad (4)$$

-рівняння, що описує вільні коливання оболонки змінної товщини.

2. Апроксимація коефіцієнтів та елементи лінійної теорії узагальнених квазідиференціальних рівнянь 4-го порядку [8]. На відкритому інтервалі E дійсної осі розглядаємо таке рівняння:

$$(a_0(x)y''') + a_1(x)y = 0, \quad (5)$$

де $a_0^{-1}(x)$ - локально обмежена і вимірна на I функція, I - відкритий інтервал дійсної осі;

$a_1(x) = b_1'(x)$; $b_0(x); b_1(x)$ - функції локально обмеженої на I варіації (клас $BV_{loc}^+(I)$ [8]), $b_1'(x)$ - узагальнена похідна (міра на I) [8]. Для розв'язування рівняння (5) введемо квазіпохідні наступним чином:

$$\begin{aligned} y^{[0]}(x) &\stackrel{def}{=} y(x); \quad y^{[1]} = y'(x); \quad y^{[2]} = a_0 y''(x); \\ y^{[3]}(x) &= (a_0 y''(x))'. \end{aligned} \quad (6)$$

Вихідне КДР (5) зводиться до системи рівнянь першого порядку

$$\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{C}'(x)\mathbf{Y}(x); \quad (7)$$

де

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \\ y^{[3]} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0^{-1}(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_1(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Система (7) коректна [8], оскільки виконується необхідна й достатня умова коректності:

$$(\Delta C(x))^2 = 0, \quad \forall x \in I, \quad (9)$$

$$\text{де, } \Delta C(x) = C(x) - C(x-0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta b_1(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

- матриця стрибків цієї системи .

Нехай $B(x, s)$ -фундаментальна матриця системи (7), структура якої добре вивчена в [8, 9], з такими властивостями:

1. $B(s, s) = E$, де E – одинична матриця;
2. $B(x, s) = (E + \Delta C(x)) \cdot B(x-0, s)$; (11)
3. $\forall x_1, x_2, x_3 \in I \quad B(x_3, x_2) \cdot B(x_2, x_1) = B(x_3, x_1)$.

З допомогою цієї матриці для довільного початкового вектора $Y_0 = Y(x_0)$, $x_0 \in I$, розв’язок системи (7) записується у вигляді

$$Y(x) = B(x, x_0)Y_0. \quad (12)$$

Апроксимуємо змінні коефіцієнти рівняння (5) наступним чином. Розіб’ємо стрижень довжиною l на n рівних ділянок. Нехай початкова точка $x_0 = 0$, кінцева $x_n = l$, крок розбиття $h = x_{k+1} - x_k$, де $k = 0, \dots, n$.

Апроксимуємо коефіцієнт $a_0(x)$ наступним чином (l – апроксимація [5]). На кожному з проміжків $[x_k; x_{k+1})$ величина $a_0(x)$ є стала: $a_0(x) \approx \frac{b_0(x_{k+1}) - b_0(x_k)}{h} = a_k$, $x \in [x_k, x_{k+1})$,

$$\text{де } b_0(x) = \int_0^x a_0(t) dt. \quad (13)$$

Апроксимуємо відповідним чином [10] коефіцієнт $a_1(x) = b_1'(x)$ (d – апроксимація) на проміжку $[x_k; x_{k+1})$:

$$a_1(x) \approx b_1(x_k) \overset{\text{def}}{\delta}(x - x_k) = d_k \delta(x - x_k), \quad (14)$$

Тут $\delta(x - x_k)$ - δ - функція Дірака з носієм у точці $x = x_k$.

Після апроксимації КДР (5) буде мати вигляд:

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \theta_k y_n'' \right)'' + \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} d_k \delta(x - x_k) \right\} y_n = 0 \quad (15)$$

що є частковим (конкретизованим) випадком КДР (5),

де θ_k – характеристична функція проміжку $[x_k; x_{k+1})$: $\theta_k = \begin{cases} 1, & x \in [x_k, x_{k+1}[\\ 0, & x \notin [x_k, x_{k+1}[\end{cases}$.

Відомо [5] що, при $n \rightarrow \infty$ усі розв’язки цього рівняння (15) разом із своїми квазіпохідними $y^{[1]}$, $y^{[2]}$ і $y^{[3]}$ рівномірно прямують до відповідних розв’язків і квазіпохідних рівняння (5):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n^{[i]}(x) - y(x)^{[i]}| = 0, \quad i = \overline{0,3}. \quad (16)$$

Матриця стрибків (10) у нашого випадку є

$$\Delta C(x_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d_k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

При такому визначенні коефіцієнтів a_0, a_1 , фундаментальна матриця $B(x_{k+1}, x_k)$ квазидиференціального рівняння $(a_0 y'')'' = 0$ має вигляд [9]:

$$B(x_{k+1}, x_k) = \begin{pmatrix} 1 & h & \frac{h^2}{2!a_k} & \frac{h^3}{3!a_k} \\ 0 & 1 & \frac{h}{a_k} & \frac{h^2}{2!a_k} \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Фундаментальну матрицю диференціальної системи (7), враховуючи властивості (11) можна знайти за формулою [9]:

$$B(x_n, x_0) = B(l, 0) = \prod_{k=0}^{n-1} (E + \Delta C(x_k)) B(x_{k+1}, x_k). \quad (19)$$

Матрицю $B(l, 0)$ можна побудувати й іншим шляхом [11].

3. Реалізація методу дискретизації в задачах про коливання оболонок змінної жорсткості.

Розглянемо вільні коливання циліндричної оболонки з стінкою змінної товщини [7] рис.2.

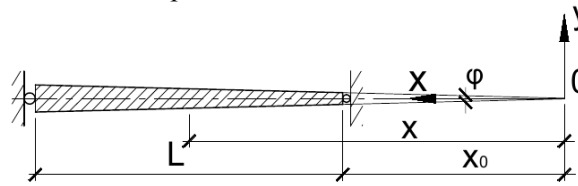


рис.2

Взявши початок координат, як показано на рис.2, товщина та циліндрична жорсткість запишеться у вигляді:

$$H(x) = \varphi x,$$

$$D(x) = \frac{E\varphi^3 x^3}{12(1-\mu^2)}, \text{ де } \varphi - \text{параметр.}$$

Вихідні дані задачі: матеріал стінки резервуара - залізобетон; $E = 3,06 \cdot 10^5 \text{ кгс/см}^2$; $\mu = 0,2$; $\rho = 2500 \text{ кгс/м}^3$; $\varphi = 0,03$; $L = 6 \text{ м}$; $x_0 = 1 \text{ м}$; $R = 2,5 \text{ м}$.

При таких вихідних даних рівняння (4) прийме вигляд:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{E\varphi^3 x^3}{12(1-\mu^2)} \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \left(\frac{E}{R^2} - \rho\omega^2 \right) \varphi x w = 0 \quad (20)$$

Задача про вільні коливання циліндричної оболонки з шарнірним опиранням країв зводиться до розв'язання узагальненого квазидиференціального рівняння 4-го порядку (УКДР) (20) з такими крайовими умовами:

$$y(1) = y''(1) = y(6) = y''(6) = 0. \quad (21)$$

Квазіпохідні для розв'язку рівняння (20) позначимо наступним чином:

$$y^{[0]}(x) \stackrel{\text{def}}{=} y(x); \quad y^{[1]}(x) = y'(x); \quad y^{[2]}(x) = y''(x);$$

$$y^{[3]}(x) = \left(\frac{E\varphi^3 x^3}{12(1-\mu^2)} y''(x) \right)', \quad (22)$$

Вихідне КДР (20) зводиться до системи рівнянь першого порядку

$$\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{C}'(x)\mathbf{Y}(x), \quad (23)$$

$$\text{де } \mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \\ y^{[3]} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad a_0 = \frac{E\varphi^3 x^3}{12(1-\mu^2)}; \quad a_1 = \left(\frac{E}{R^2} - \rho\omega^2 \right) \varphi x.$$

За допомогою фундаментальної матриці $B(x, x_0)$ для довільного початкового вектора $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}(x_0)$, $x_0 \in I$, розв'язок системи (23) запишеться у вигляді (12).

Дискретизацію проведемо наступним чином. Відрізок $[1, 6]$ точками $x_0 = 1, x_1, x_2, \dots, x_n = 6$ розіб'ємо на n рівних частин, довжина кожної з яких дорівнює $\frac{L}{n} = h$ (крок розбиття).

Апроксимація коефіцієнта $a_0(x) = \frac{E\varphi^3 x^3}{12(1-\mu^2)} = b'_0(x)$ кусково-сталими коефіцієнтами на кожному проміжку проводиться по формулі (13).

Коефіцієнт a_k на проміжку $[x_k, x_{k+1})$ буде:

$$a_k = \frac{E\varphi^3}{48(1-\mu^2)h} (x_{k+1}^4 - x_k^4) \quad (24)$$

Апроксимуємо згідно формули (14) коефіцієнт

$$a_1(x) = \left(\frac{E}{R^2} - \rho\omega^2 \right) \varphi x = b'_1(x). \quad (25)$$

Знаходимо d_k на проміжку $[x_k, x_{k+1})$

$$d_k = b_1(\alpha_k) = \left(\frac{E - R^2 \rho \omega^2}{2R^2} \right) \varphi (x_{k+1}^2 - x_k^2). \quad (26)$$

Після апроксимації КДР (20) буде мати вигляд (15)

Фундаментальну матрицю системи диференціальних рівнянь (23) можна знайти за формулою (19).

Врахуємо граничні умови закріплення і сформуємо характеристичне рівняння.

Враховуючи умови закріплення в точці $x = 1$ початкова матриця \mathbf{Y}_0 , має вигляд: $\mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Позначимо:

$$B_n(x_n, x_0) \mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

У випадку шарнірного опираювання в кінцевій точці ($x = 6$) характеристичне рівняння буде мати вигляд

$$|A(\omega^2)| = \det \begin{pmatrix} a_{12}(\omega^2) & a_{14}(\omega^2) \\ a_{32}(\omega^2) & a_{34}(\omega^2) \end{pmatrix} = 0. \quad (28)$$

Задаючи значення ω^2 з визначеним кроком, з допомогою комп'ютера отримуємо з рівняння (28) частоти вільних коливань ω_i^2 .

У порівняльній табл. 1 подано величини перших трьох значень частот коливань шарнірно закріпленої циліндричної оболонки при сталій та змінній жорсткості. Частоти коливань оболонки сталої жорсткості з шарнірно закріпленими краями можна знайти аналітично по формулі [1]:

$$\omega_i^2 = \frac{EH^2 n^4 \pi^4}{12(1-\nu^2)l^4 \rho} + \frac{E}{\rho R^2}. \quad (29)$$

При обчисленнях з кроком розбиття 10^{-3} і 10^{-4} значення частот коливань на четвертому знаку після коми не змінювалось, тому зменшення кроку розбиття немає сенсу.

Табл.1.

Порівняльна таблиця частот коливань при шарнірних закріпленнях країв циліндричної оболонки

Метод	ω_1^2	ω_2^2	ω_3^2
Стала жорсткість			
Аналітичний метод	196376,53	204424,47	239210,81
Авторський метод	196376,53	204424,47	239210,81
Змінна жорсткість			
Аналітичний метод	-	-	-
Авторський метод	207075,62	230755,57	280239,85

Прочерки в таблиці означають відсутність результатів в літературі.

Розглянемо також вільні коливання циліндричної оболонки змінної жорсткості при різних закріпленнях країв в точках $x = 1 м$ та $x = 6 м$.

Розглянемо такі умови закріплення країв оболонки: 1) шарнірне: $y = 0$ і $y^{[2]} = 0$; 2) жорстке: $y = 0$, $y' = 0$; 3) вільний край: $y^{[2]} = 0$ і $y^{[3]} = 0$.

Цим трьома умовами закріплення умовно присвоїмо індекси 0, 1, 2 відповідно, і розглядатимемо задачі типів (ij) , $i, j = 0, 1, 2$. Так, наприклад, задача типу (01) означає, що правий край оболонки ($x = 1$) закріплений шарнірно, а лівий ($x = 6$) – жорстко.

Початкову матрицю Y_0 , що враховує умови закріплення в точці $x = x_0$, для жорсткого закріплення і вільного кінця відповідно:

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; Y_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Позначимо :

$$B(l,0)Y_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Тоді, залежно від умов закріплення на правому краї ($x = L$) отримаємо характеристичне рівняння для визначення частоти вільних коливань ,відповідно, для шарнірного, жорсткого закріплення та для вільного кінця

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = 0; \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 0; \det \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} = 0. \quad (31)$$

В таблиці 2 подані значення частот вільних коливань циліндричної оболонки змінної жорсткості при різних закріпленнях країв.

Табл.2.

Частоти коливань при різних типах закріплення країв циліндричної оболонки

Тип	ω_1	ω_2	ω_3
01	211996,16	241460,93	300121,41
11	196535,67	201062,12	215792,33
12	200221,43	214160,92	247535,65
10	209947,92	237881,83	294575,81
21	202813,68	219270,89	256038,90

Побудова форм вільних коливань циліндричної оболонки зводиться до задачі на знаходження власних векторів квазидиференціального рівняння (20) з граничними умовами (21).

Запишемо праву частину виразу (27) через лінійно незалежні розв'язки КДР (20)

$$Y(x) = \begin{pmatrix} C_1 \cdot y_2(l, \omega) + C_2 \cdot y_4(l, \omega) \\ C_1 \cdot y_2'(l, \omega) + C_2 \cdot y_4'(l, \omega) \\ C_1 \cdot y_2^{[2]}(l, \omega) + C_2 \cdot y_4^{[2]}(l, \omega) \\ C_1 \cdot y_2^{[3]}(l, \omega) + C_2 \cdot y_4^{[3]}(l, \omega) \end{pmatrix} \quad (32)$$

причому функції y_2, y_4 такі, що вже задовольняють крайові умови (умови шарнірного закріплення) в точці $x = x_0$. Для шарнірного краю в точці $x = L$ ці умови мають вигляд:

$$\begin{cases} C_1 \cdot y_2(l, \omega) + C_2 \cdot y_4(l, \omega) = 0 \\ C_1 \cdot y_2^{[2]}(l, \omega) + C_2 \cdot y_4^{[2]}(l, \omega) = 0 \end{cases} \quad (33)$$

Знайдену i -ту власну частоту ω_i підставимо в (33) і отримуємо два лінійних залежних рівняння для визначення невідомих сталих C_1 і C_2 :

$$\begin{cases} C_1 \cdot y_2(l, \omega_i) + C_2 \cdot y_4(l, \omega_i) = 0 \\ C_1 \cdot y_2^{[2]}(l, \omega_i) + C_2 \cdot y_4^{[2]}(l, \omega_i) = 0 \end{cases} \quad (34)$$

Одне з цих рівнянь (наприклад, перше) можна відкинути. Тоді з другого рівняння

$$C_2 = - \frac{C_1 y_2^{[2]}(l, \omega_i)}{y_4^{[2]}(l, \omega_i)} \quad (35)$$

Підставивши у вираз для прогину в довільній точці $x \in [x_0, L]$

$$y(x) = C_1 y_2(x, \omega_i) + C_2 y_4(x, \omega_i)$$

значення C_2 з (35) отримаємо формулу для визначення i -тої форми власних коливань

$$y(x, \omega_i) = C_1 \left[y_2(x, \omega_i) - \frac{y_2^{[2]}(l, \omega_i)}{y_4^{[2]}(l, \omega_i)} y_4(x, \omega_i) \right]. \quad (36)$$

Форми вільних коливань, обчислені по формулі (36) зображені на рис. 3.

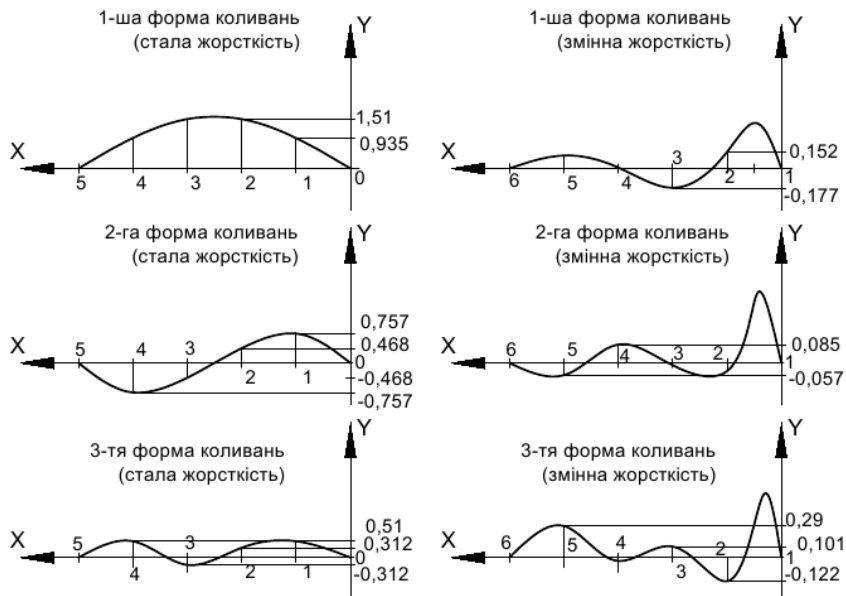


рис.3

Висновки. Запропоновано новий наближений метод обчислення частот вільних коливань циліндричних оболонок змінної жорсткості, в основу якого закладено апроксимацію коефіцієнтів відповідних диференціальних рівнянь узагальненими функціями. Метод може бути покладений в основу досліджень коливань оболонок обертання, підкріплених стрингерами та шпангоутами.

Метод характеризується простотою і універсальністю алгоритму та швидкістю збіжності. Отримані при цьому числові результати при відповідних значеннях параметрів співпадають з відомими.

1. Строительная механика летательных аппаратов: Учебник для авиационных специальностей вузов/ И.Ф. Образцов, Л.А. Булычев, В.В. Васильев и др.; Под ред. И.Ф. Образцова. - М.: Машиностроение, 1986.—536 с.
2. Андрианов И.В., Лесничая В.А., Маневич Л.И. Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек.- М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985.- 224с.
3. Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций.- М.: Машиностроение. 1975.-375 с.
4. Брусиловський А.Д., Швейко Ю.Ю. О собственных колебаниях цилиндрических оболочек, подкрепленных поперечными ребрами жесткости.- В кн.: Расчеты на прочность, 1971, вып. 15.- М.: Машиностроение, с.312-327.
5. Тацій Р. М., Ішук В. В., Кісілевич В. В. Про апроксимацію розв'язків диференціальних рівнянь з мірами // Вісн. Київ. ун-ту: Математика і механіка. – Київ: Либідь, 1990. № 32. – С .128-131.
6. Вибрации в технике. Справочник: В 6 т./ Под ред. В.В. Болотина.-М.: Машиностроение, 1978.- Т.1-352с.
7. Тимошенко С.П., Войновський-Кригер С. Пластини и оболочки.- М.: Наука. 1966.- 636 с.
8. Тацій Р.М. Узагальнені квазидиференціальні рівняння. Науково-учбовий Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я.С. Підстригача АН України . Львів, 1994. 54 с.
9. Тацій Р. М., Пахолок Б. Б. Про структуру фундаментальної матриці квазидиференціального рівняння // Доп. АН УРСР. – Сер. А. – 1989. - № 4. – С.25-28.
10. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи: Пер. с англ. -М., 1968.-749 с.
11. Тацій Р. М., Ушак Т. І. Метод дискретизації в задачах стійкості стрижнів змінної жорсткості // Вісник НУ „Львівська політехніка”, „Теорія та практика будівництва”.-2005.-№545.- С.178-181.