УДК 539.376

О.Г.Бондарський, О.В.Бабков, В.І.Косенко
Луцький національний технічний університет
Національний транспортний університет
Державний економіко-технологічний університет транспорту

МЕТОДИКА ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ СТАТИКИ СИСТЕМ БАГАТОШАРОВОЇ СТРУКТУРИ

Крайова задача лінійної термов'язкопружності зводиться до ряду задач Коші, інтегрування яких здійснюється методом Рунге-Кутта з використанням дискретної ортогоналізації.

1. Метод дискретної ортогоналізації для розв'язання одновимірних крайових задач. Зведення двовимірної крайової задачі до одновимірної

Розв'язувальні рівняння багатошарових оболонок обертання є системами звичайних диференціальних рівнянь з перемінними коефіцієнтами . Аналітичні розв'язки таких задач можливі лише в окремих частинних випадках. В зв'язку з цим для їх розв'язання доцільно пристосовувати чисельні методи. В силу лінійності крайових задач, які розглядаються, для їх розв'язання можливо використати звичайний метод зведення крайової задачі до ряду задач Коші з послідовним чисельним інтегруванням. Проте в задачах теорії оболонок мають місце крайові та локальні ефекти, які можуть при такому підході привести до нестійкості розрахунку. З математичної точки зору це означає, що якщо власні значення матриці системи значно різняться за величиною матеріальної частини, то при інтегруванні зі зростанням аргументу в результаті втрати значущих цифр система векторів-розв'язків задач Коші стає майже лінійно-залежною і тому неможливо з достатньою точністю при задоволенні граничних умов на другому кінці інтервалу інтегрування визначити постійні, одержані в спільному розв'язку, а тим самим і функції, які треба знайти.

З метою подолання вказаних труднощів розроблено ряд методів. До них відносяться метод прогонки в диференціальній і різницевій формах, метод неперервної і дискретної ортогоналізації.

Для одержання стійкого обчислювального процесу для даного класу задач використовується метод дискретної ортогоналізації (МДО), в якому за рахунок ортонормування в окремих точках векторів-розв'язків задач Коші усувається зростання похибки.

Сутність метода складається з такої послідовності: лінійна крайова задача зводиться до розв'язку ряду задач Коші для однорідної системи рівнянь з початковими умовами, що задовольняють граничні умови на лівому контурі, а також до одної задачі Коші для системи рівнянь, що задовольняють неоднорідні умови на тому ж контурі. Розв'язання задачі реалізується в два етапи: на першому (прямий хід) за допомогою метода Рунге-Кутта знаходимо розв'язок семи задач Коші, які в точках ортогоналізації ортонормуються; на другому етапі (зворотний хід) визначаються постійні інтегрування, з допомогою яких находяться розв'язки крайової задачі. При цьому інформація про матриці прямого ходу зберігається не у всіх точках ортогоналізації, а тільки в точках видачі результатів, що приводить до істотної економії пам'яті.

Для розв'язання крайових задач використовується пакет програм, розроблений в Інституті механіки АН України. Для використання цього пакету крайова задача термов'язкопружності має бути представлена диференціальними рівняннями в нормальній формі Коші

$$\overline{y}'(x_1, t) = \mathbf{A}\ \overline{y}(x_1, t) + \overline{f}(x_1, t, \tilde{y}(\tau)) \qquad (1)$$

і граничними умовами в вигляді векторних рівнянь

$$B_0\ \overline{y}(x_1, t) = \overline{b}_0, \quad \text{коли} \quad x_1 = S_0;$$

$$B_k\ \overline{y}(x_1, t) = \overline{b}_k, \quad \text{коли} \quad x_1 = S_k. \qquad (2)$$

Для зведення двовимірних рівнянь теорії оболонок до одновимірних скористуємося методом поділу перемінних. Для цього розкладемо всі компоненти напружено-деформованого стану (НДС), а також невідомі функції в ряди Фур'є за окружною координатою:

$\{ N_{11}, N_{22}, Q, M_{11}, M_{22}, M_{111}, M_{122}, M_{222}, Q_{11}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{111}, \chi_{122}, \chi_{222}, \chi_{211}, v_1, w, \varphi_1, N_{1T},$

$$N_{2T}, M_{1T}, M_{2T}, M_{11T}, M_{12T}, M_{22T}, Q_{1T}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{ N_{11}(x_1), N_{22}(x_1), Q(x_1), \dots M_{22T}(x_1), Q_{1T}(x_1)\} \cos n\, x_2; \quad (3)$$

$$\{ N_{12}, Q, M_{12}, M_{112}, M_{212}, Q_{22}, \varepsilon_{12}, \chi_{12}, \chi_{112}, \chi_{212}, v_2, \varphi_2, N_{12p}, M_{12p}, M_{112p}, M_{212p}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{ N_{12}(x_1),$$

$Q_2(x_1), \dots M_{112p}(x_1), M_{212p}(x_1)\} \sin n\, x_2$

З урахуванням розкладення (3) система диференціальних рівнянь рівноваги для *n-ї* гармоніки при A_I=1, набуває вигляду

$$\begin{gathered}
A_2N_{11,1} + A_{2,1}N_{11} - A_{2,1}N_{22} + nN_{12} = 0; \\
-nN_{22} + A_2N_{12,1} + 2A_{2,1}N_{12} = 0; \\
A_2M_{11,1} + A_{2,1}M_{11} - A_{2,1}M_{22} + nM_{12} - A_2 Q_1 = 0; \\
A_2(k_1N_{11} + k_2N_{22}) - A_2Q_{1,1} - nQ_2 = A_2q \\
nM_{22} + A_2 M_{12},_1 + 2A_{2,1}M_{12} - A_2Q_2 = 0; \\
A_2M_{111,1} + A_{2,1}M_{111} - A_{2,1}M_{122} + nM_{112} - A_2 Q^*_{11} = 0; \\
- nM_{222} + A_2 M_{212},_1 + 2A_{2,1}M_{212} - A_2Q^*_{22} = 0.
\end{gathered} \quad (4)$$

Після підстановки четвертого рівняння в п'яте і введення заміни $Q = Q_1 + nM_{12}/A_2$, замість семи рівнянь рівноваги, що включають в себе дванадцять невідомих функцій і їх перші похідні, отримаємо шість. Остаточно рівняння рівноваги набувають такого вигляду

$$\begin{gathered}
A_2N_{11,1} = A_{2,1}N_{22} - A_{2,1}N_{11} - nN_{12}; \\
A_2N_{12,1} = nN_{22} - 2A_{2,1}N_{12}; \\
A_2M_{11,1} = A_{2,1}M_{22} - A_{2,1}M_{11} - nM_{12} + A_2 Q_1; \\
A_2Q_{1,1} = A_2(k_1N_{11} + k_2N_{22}) - A_{2,1}Q + n^2M_{22}/A_2 - 2nM_{12}/A_2 + A_2q; \\
A_2M_{111,1} = A_{2,1}M_{122} - A_{2,1}M_{111} - nM_{112} - A_2 Q^*_{11}; \\
A_2 M_{212},_1 = nM_{222} - 2A_{2,1}M_{212} + A_2Q^*_{22}.
\end{gathered} \quad (5)$$

Геометричні співвідношення з урахуванням (3) запишуться у вигляді

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{11} = v_{1,1} + k_1w; \quad \varepsilon_{22} = nv_2 + A_{2,1}v_1/A_2 + k_2w; \\
\varepsilon_{12} = (v_{1,2} - A_{2,1}v_2)/(2A_2) + v_{2,1}/2; \\
\chi_{11} = \nu_{,1}; \quad \chi_{22} = n^2w/A^2_2; \\
\chi_{12} = (-n\nu - nA_{2,1}w)/A_2; \\
\chi_{111} = \varphi_{1,1}; \quad \chi_{222} = n\varphi_2/A_2; \quad \chi_{122} = A_{2,1}\varphi_1/A_2; \\
\chi_{112} = -n\varphi_1/(2A_2); \quad \chi_{212} = (\varphi_{2,1} - A_{2,1}\varphi_2/A_2)/2,
\end{gathered} \quad (6)$$

де $\nu = -w_{,1}$ – кут повороту нормалі в меридіональному напрямку.

Для спрощення формулювання граничних умов вектор-функцій, що розшукуються, доцільно компонувати в змішаній формі із таких зусиль та переміщень, які входять в контурний інтеграл варіаційного рівняння. З урахуванням цих міркувань вектор основних функцій вибираємо у вигляді

$$\bar{y} = \{ N_{11}, N_{12}, M_{11}, Q, v_1, v_2, w, \nu, M_{111}, M_{212}, \varphi_1, \varphi_2\}, \quad (7)$$

де перші вісім функцій відповідають класичному розв'язку задачі в припущенні, що відносне подовження в нормальному до координатної поверхні напрямку та поперечні зсуви приймаються приблизно рівними нулю (гіпотеза Кірхгофа-Лява).

2. Розв'язувальні рівняння квазістатичної рівноваги для багатошарових в'язко пружних оболонок, виконаних із термореологічно складних матеріалів.

Наведемо два алгоритми зведення двовимірних диференціальних рівнянь до одновимірних в нормальній формі Коші. Нижче будуть указані переваги та недоліки кожного.

Розглянемо симетрично, відносно осі x_2 (окружний напрям), навантажену циліндричну оболонку радіуса *R*, для якої коефіцієнти першої квадратичної форми і кривизни визначаються такими рівняннями

$$A_1 = A_2 = 1; \qquad k_1 = 0; \qquad k_2 = 1/R. \quad (8)$$

Перший алгоритм.

Подаючи зусилля в рівняннях рівноваги (5) через компоненти переміщень (6) і враховуючи, що друге і останнє рівняння „зайві”, отримуємо чотири рівняння рівноваги, які складаються із восьми невідомих функцій { N_{11}, M_{11}, Q, v_1, w, ν, M_{111}, φ_1, }. Доповнимо їх трьома співвідношеннями в'язкопружності для N_{11}, M_{11}, M_{111} і одним геометричним $\nu= -w_{,1}$ В результаті отримаємо замкнену систему восьми диференціальних рівнянь вигляду

$$\mathbf{C}\,\bar{y}'(x_1,t) = \mathbf{D}\ \bar{y}(x_1,t) + \bar{f}(x_1,t,\bar{\bar{y}}(\tau)). \tag{9}$$

Тут f – вектор силового і температурного навантаження, що враховує і попередню історію навантаження; **D** – матриця змінних коефіцієнтів при перших похідних невідомих функцій; **C** аналогічна матриця коефіцієнтів при самих функціях.

Розв'язуючи за допомогою ПК лінійну систему восьми рівнянь відносно y' (перших похідних), отримуємо систему диференціальних рівнянь в нормальній формі Коші (1). Наведена процедура зведення до нормального вигляду, назвемо її перший алгоритм, доволі проста, але при розрахунку задач в'язкопружності, якщо необхідно розв'язувати велику кількість пружних задач, вона є невиправданою. Це пояснюється перш за все тим, що для всіх точок інтегрування задач Коші за довжиною оболонки необхідно багато разів розв'язувати систему восьми алгебраїчних рівнянь.

Другий алгоритм.

Для зменшення машинного часу, а також для перевірки розв'язувальної системи рівнянь отримаємо останню іншим шляхом, а саме запишемо співвідношення термов'язкопружності для N_{11}, M_{11}, M_{111} відносно похідних переміщень $v_{1,1}$, $\nu_{,1}$, $\varphi_{1,1}$. Тепер співвідношення матимуть вигляд

$$\begin{gathered} v_{1,1}F_{11} + \nu_{,1}K_{11} + \varphi_{1,1}K_{111}=N_{11} + N_{1т} - wF_{12}/R - \varphi_1 V_{11};\\ v_{1,1}K_{11} + \nu_{,1}D_{11} + \varphi_{1,1}P_{111}=M_{11} + M_{1т} - wK_{12}/R - \varphi_1 V_{111};\\ v_{1,1}K_{111} + \nu_{,1}P_{111} + \varphi_{1,1}P_{1111}=M_{111} + M_{11т} - wK_{112}/R - \varphi_1 V_{211}. \end{gathered} \tag{10}$$

Розв'язуючи систему рівнянь (10) відносно похідних від невідомих функцій отримаємо:

$$\begin{gathered} v_{1,1}=D[N_{11}(S_1-S_4)+M_{11}(S_2-S_5)+M_{111}(S_6-S_7)+S_{11}+wS_{14}-\varphi_1 S_{18}];\\ \nu_{,1}=D[N_{11}(S_9-S_5)+M_{11}(F_{11}P_{111}-S_3)+M_{111}(S_8-S_{10})+S_{12}+wS_{15}-\varphi_1 S_{19}];\\ \varphi_{1,1}=D[N_{11}(S_6-S_7)+M_{11}(S_8-S_{10})+M_{111}(F_{11}D_{11}-K^2_{11})+S_{13}+wS_{16}-\varphi_1 S_{20}]. \end{gathered} \tag{11}$$

Ці рівняння є відповідно четвертим, шостим і восьмим рівняннями розв'язуваної системи. Тут введено коефіцієнти S_1 - S_{20}, які обчислюються на основі інтегральних фізико-механічних і теплофізичних характеристик (ФМХ і ТФХ) F_{11}-V_{211} , що довільно залежать від температури нагріву. Формули визначення цих характеристик не наводяться заради скорочення статті.

Останні рівняння отримаємо безпосередньо із рівнянь (5). Їх сукупність становить собою нормальну форму Коші (1), де f – вектор навантаження, що враховує спадкові ефекти , $\boldsymbol{A}$ – двовимірна матриця розміром 8х8 змінних параметрів, що враховує жорсткість оболонки, залежність ФМХ і ТФХ шарів від температури і історію навантаження.

1. Бабков А.В. Исследование слоистых ортотропных оболочек вращения из вязкоупругих термореологически сложных материалов // Прикладная механика. – 1998 –34, №8. С. 82-90
2. Рассказов А.О., Соколовская Н.Д., Шульга Н.А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. К.: Вища шк., 1986. 191 с.
3. Бабков А.В. Расчет многослойных оболочек вращения из вязкоупругих материалов. // Проблемы прочности. – 1993, №12, С. 71-77.
4. Schapery R.A. Method of Viscoelastic Stress Analysis Using Elastic Solutions // J. Franclin Inst. – 1965. – 279, №4. – P. 268-289.