УДК 539.39

Н.В.Здолбіцька[1], М.В.Делявський[2], К.Росінські[2]
[1]Луцький національний технічний університет
[2]Технологічно-природничий університет, Польща

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТОВСТОЇ ОРТОТРОПНОЇ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛИТИ

Побудовано математичну модель товстої ортотропної плити під дією нормальних і дотичних зусиль несиметрично прикладених до верхньої та нижньої поверхонь. Складові тензора напружень визначаються з фізичних рівнянь. Функції зміни переміщень по товщині плити визначаються з умов обмеження напружень на її поверхнях, а з крайових умов – коректори. Переміщення і напруження визначаються через п'ять потенціалів переміщень, які визначаються з п'яти рівнянь рівноваги. Як приклад проведено розрахунок напружено-деформованого стану товстої прямокутної ортотропної плити вільнообіпертої на контурі під косинусоїдальним навантаженням.

Актуальність проблеми. Аналіз тривимірного напружено-деформованого стану товстої плити можна наближено провести застосовуючи різні апроксимації тривимірного опису. Отримані таким чином теорії плит можна розділити на дві групи: асимптотичні і технічні [1,2]. В асимптотичних теоріях тривимірна задача зводиться до послідовності двовимірних задач. Збільшуючи чи зменшуючи кількість виразів послідовності отримуємо більш чи менш точну двовимірну апроксимацію напружено-деформованого стану плити. У технічних теоріях зведення тривимірного стану до двовимірного полягає на прийнятті певних спрощених гіпотез (в'язей) щодо поля напружень чи переміщень.

Побудована в статті математична модель товстої плити належить до другої групи, в якій накладено певні обмеження (в'язі) на поверхнях плити, також прийнято допущення щодо розкладу переміщень по її товщині.

Постановка задачі.

Розглянемо товсту прямокутну ортотропну плиту товщиною h віднесену до прямокутної системи координат $Ox_1x_2x_3$ (рис. 1).

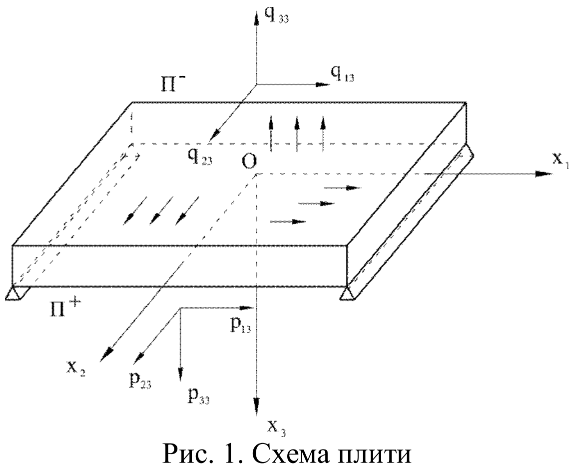


Рис. 1. Схема плити

Нехай на верхній $\Pi^- \in R^2$ і нижній $\Pi^+ \in R^2$ поверхнях плити прикладені розподілені навантаження відповідно $q_{i3}(x_1, x_2)$ і $p_{i3}(x_1, x_2)$, $i = 1,2,3$.

Моделювання поля переміщень плити. Складові вектора переміщень плити вибираємо наступним чином:

$$u_1 = \lambda_0(\delta)U - h\left[\lambda_1(\delta)\left(\Omega_{,1} - \Phi_{,2}\right)\right] + \\ + \lambda_4(\delta)v_{11} + \lambda_5(\delta)v_{12} + hf_4(\delta)X_{,1} + hf_5(\delta)Y_{,1}; \tag{1}$$

$$u_2 = \lambda_0(\delta)V - h\left[\lambda_1(\delta)\left(\Omega_{,2} + \Phi_{,1}\right)\right] + \\ + \lambda_4(\delta)v_{21} + \lambda_5(\delta)v_{22} + hf_4(\delta)X_{,2} + hf_5(\delta)Y_{,2}; \tag{2}$$

$$u_3 = \gamma_0(\delta)W + \lambda_4(\delta)v_{31} + \lambda_5(\delta)v_{32}; \tag{3}$$

$$\delta = \frac{x_3}{h}. \tag{4}$$

Функції $u_i(x_1, x_2),\ i = 1,2$ називаємо дотичними переміщеннями, а u_3 – нормальним переміщенням або прогином плити. Функції $U, V, W, \Omega, \Phi -$ це потенціали переміщень. Вони описують розподіл переміщень в площинах паралельних до серединної площини плити. Функції λ, γ, f описують розподіл переміщень по товщині плити (назвемо їх функціями розподілу). Залежать вони від безрозмірного параметру δ (4). Функції X, Y є допоміжними і служать для занулювання частини виразів напружень на поверхнях плити з метою спрощення процесу задоволення крайових умов.

Невідомі потенціали переміщень визначаються з п'яти рівнянь рівноваги (два для нормальних і дотичних сил, два для згинальних і крутильних моментів і одне для поперечних сил).

Розглянемо фізичні рівняння для ортотропного матеріалу, записані в матричних позначеннях:

$$\sigma_i = b_{ij}\varepsilon_j = b_{i1}u_{1,1} + b_{i2}u_{2,2} + b_{i3}u_{3,3},\ i = 1,2,3 \tag{5}$$

$$\sigma_4 = b_{44}(u_{2,3} + u_{3,2}) \\ \sigma_5 = b_{55}(u_{1,3} + u_{3,1}) \\ \sigma_6 = b_{66}(u_{1,2} + u_{2,1}) \tag{6}$$

де:

$$\sigma_1 = \sigma_{11}, \sigma_2 = \sigma_{22}, \sigma_3 = \sigma_{33}, \sigma_4 = \sigma_{23}, \sigma_5 = \sigma_{13}, \sigma_6 = \sigma_{12}, \tag{7}$$

Ці напруження мусять задовольняти статичним умовам на поверхнях плити. Запишемо ці умови:

$$\sigma_5\big|_{\delta=1} = p_5, \sigma_4\big|_{\delta=1} = p_4. \tag{8}$$

Накладаємо обмеження (в'язі) на функції розподілу

$$\gamma_4(\pm 1) = \gamma_5(\pm 1) = 0,\ \lambda_5'(1) = 0. \tag{9}$$

Умови (8) задовольняємо точно за допомогою коректорів v_{11} і v_{21}.

Подібним чином за допомогою коректорів v_{11} і v_{22} задовольняємо умови на верхній стороні плити

$$\sigma_5\big|_{\delta=-1} = q_5, \sigma_4\big|_{\delta=-1} = q_4. \tag{10}$$

Накладаючи в'язі на функції розподілу

$$\gamma_4(\pm 1) = \gamma_5(\pm 1) = 0,\ \lambda_4'(-1) = 0. \tag{11}$$

Отримані коректори підставляємо до формул (1)-(2) на переміщення u_1 і u_2, і після перегрупування подаємо їх у вигляді:

$$u_1 = \Lambda_0(\delta)U - h\Lambda_1(\delta)\left(\Omega_{,1} - \Phi_{,2}\right) - hg_0(\delta)W_{,1} + \\ + \Lambda_4(\delta)h\widetilde{p}_5 + \Lambda_5(\delta)h\widetilde{g}_5 + hF_4(\delta)X_{,1} + hF_5(\delta)Y_{,1}; \tag{12}$$

$$u_2 = \Lambda_0(\delta)V - h\Lambda_1(\delta)\left(\Omega_{,2} + \Phi_{,1}\right) - hg_0(\delta)W_{,2} + \\ + \Lambda_4(\delta)h\widetilde{p}_4 + \Lambda_5(\delta)h\widetilde{q}_4 + hF_4(\delta)X_{,2} + hF_5(\delta)Y_{,2}; \tag{13}$$

Тут $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_4, \Lambda_5, g_0, F_4, F_5$ є новими (згрупованими) функціями розподілу переміщень по товщині плити.

Використовуючи отримані вирази (12), (13) на переміщення за допомогою фізичних рівнянь (5)-(6) визначаємо напруження. Далі задовольняємо умови на поверхнях плити для нормальних напружень σ_3:

$$\sigma_3\big|_{\delta=1} = -p_3, \sigma_3\big|_{\delta=-1} = -q_3. \tag{14}$$

Накладаючи обмеження на функцію $F_5(1) = 0$ і додаткові в'язі

$$\Lambda_4(1) = \Lambda_5(1) = 0,\ \gamma_5'(1) = 0. \tag{15}$$

Визначаємо допоміжну функцію X. Умови (14) задовольняємо за допомогою коректора v_{31}.

Подібним чином задовольняємо умови на верхній стороні плити за допомогою коректора v_{32}, приймаючи, що $F_4(-1) = 0$ і

$$\Lambda_4(-1) = \Lambda_5(-1) = 0,\ \gamma_4'(-1) = 0. \tag{16}$$

Підставляючи отримані вирази до формул (3), (12), (13) записуємо остаточні формули на переміщення

$$\begin{aligned} u_1 &= \Lambda_0(\delta)U - h\Lambda_1(\delta)\left(\Omega_{,1} - \Phi_{,2}\right) + \\ &+ h\Lambda_4(\delta)\tilde{p}_5 + h\Lambda_5(\delta)\tilde{q}_5 + hH_0(\delta)\Psi_{,1} + h\Gamma_0(\delta)W_{,1}; \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \Lambda_0(\delta)V - h\Lambda_1(\delta)\left(\Omega_{,2} + \Phi_{,1}\right) + \\ &+ h\Lambda_4(\delta)\tilde{p}_4 + h\Lambda_5(\delta)\tilde{q}_4 + hH_0(\delta)\Psi_{,2} + h\Gamma_0(\delta)W_{,2}; \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} u_3 &= G_0(\delta)W + G_1(\delta)\Psi - hL_1(\delta)U_{,1} - hL_2(\delta)V_{,2} + \\ &+ h^2K_1(\delta)\Omega_{,11} + h^2K_2(\delta)\Omega_{,22} - h^2\left[K_1(\delta) - K_2(\delta)\right]\Phi_{,12} + \\ &+ h\frac{\gamma_4(\delta)}{\gamma_4'(1)}\tilde{p}_3 + h\frac{\gamma_5(\delta)}{\gamma_5'(-1)}\tilde{q}_3; \end{aligned} \tag{19}$$

які виражаються тепер лише через потенціали переміщень і зовнішнє навантаження і не залежать від коректорів і допоміжних функцій. Далі за допомогою фізичних рівнянь визначаємо напруження в плиті.

Внутрішні зусилля в плиті визначаємо згідно з означеннями:

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{h} \sigma_{\alpha\beta}\,dx_3;$$

$$Q_\alpha = \int_{-h}^{h} \sigma_{\alpha 3}\,dx_3;$$

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{h} \sigma_{\alpha\beta}x_3\,dx_3,\ (\alpha, \beta = 1{,}2). \tag{20}$$

Оскільки потенціали переміщень не залежать від поперечної змінної x_3, то інтегрування напружень в формулах (20) зводиться до інтегрування функцій розподілу переміщень по товщині плити. У статті ці функції вибрано у вигляді поліномів третього порядку з накладеними на них в'язями, які полегшують процедуру задоволення умов на поверхнях плити.

Потенціали переміщень товстої плити до поверхонь якої прикладні нормальні і дотичні зусилля визначаємо з системи п'яти зв'язаних диференціальних рівнянь рівноваги записаних в термінах зусиль, моментів і поперечних сил.

$$\begin{gathered} N_{11,1} + N_{12,2} + p_5 - q_5 = 0; \\ N_{21,1} + N_{22,2} + p_4 - q_4 = 0; \\ M_{11,1} + M_{12,2} - Q_1 + h\left[p_5 - q_5\right] = 0; \\ M_{21,1} + M_{22,2} - Q_2 + h\left[p_4 - q_4\right] = 0; \\ Q_{1,1} + Q_{2,2} - Q_1 + p_3 - q_3 = 0. \end{gathered} \tag{21}$$

Підставляючи до цієї системи рівнянь інтегральні характеристики (20) напружень (5), (6) приходимо до системи п'яти зв'язаних неоднорідних диференціальних рівнянь відносно потенціалів переміщень.

Аналіз числових результатів. Розглянемо прямокутну в плані товсту ортотропну плиту вільно обіперту на контурі під поперечним косунусоїдальним навантаженням

$$q_3 = q_0 \cos\frac{\pi x_1}{a}\cos\frac{\pi x_2}{b},$$

прикладеним до її верхньої сторони. У розрахунках прийнято такі розміри плити $a = b = 10м,\ h = 2м$ і інтенсивності поперечного навантаження $q_0 = 2kH/м^2$.

У розрахунках прийнято також такі значення модулів Юнга:

$$E_1 = 5.7\cdot 10^9[Pa],\ E_2 = 1.4\cdot 10^9[Pa],\ E_3 = 1.4\cdot 10^9[Pa],$$

модулів зсуву

$$G_{12} = 0.57\cdot 10^9[Pa],\ G_{23} = 0.5\cdot 10^9[Pa],\ G_{31} = 0.57\cdot 10^9[Pa],$$

і коефіцієнтів Пуассона

$$\nu_{12} = 0.277,\ \nu_{23} = 0.400,\ \nu_{31} = 0.068.$$

Потенціали переміщень вибираємо у вигляді подвійних тригонометричних рядів

$$U = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\delta_m^{[1]}x_1 \cos\delta_n^{[2]}x_2,$$

$$V = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \cos\delta_m^{[1]}x_1 \sin\delta_n^{[2]}x_2,$$

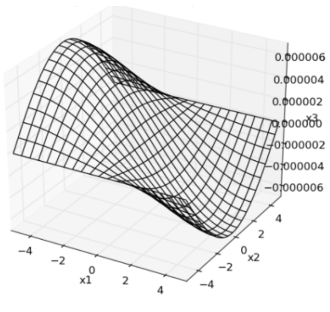
$$W = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \cos\delta_m^{[1]}x_1 \cos\delta_n^{[2]}x_2, \qquad (22)$$

$$\Omega = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} \cos\delta_m^{[1]}x_1 \cos\delta_n^{[2]}x_2,$$

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} \sin\delta_m^{[1]}x_1 \sin\delta_n^{[2]}x_2.$$

Розв'язуючи систему диференціальних рівнянь рівноваги (21) визначаємо невідомі коефіцієнти $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}, E_{mn}$, а потім за формулами (22) потенціали переміщень U, V, W, Ω, Φ. Далі за допомогою потенціалів переміщень визначаємо переміщення і напруження в плиті.

На рисунках 2-4 подано просторові графіки і лінії рівня переміщень точок плити, а на рисунках 5-7 відповідні графіки для напружень.



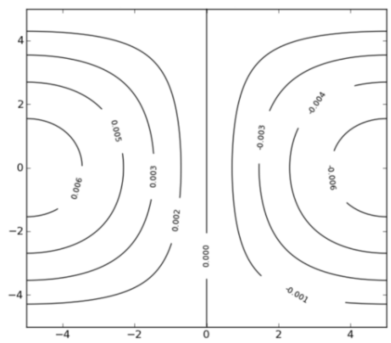


Рис. 2. Графік зміни переміщення u_1

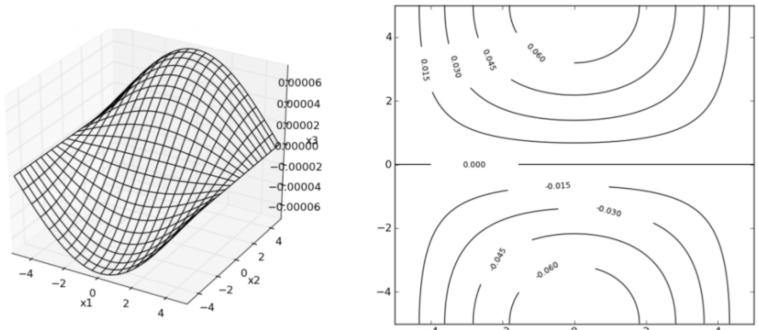


Рис. 3. Графік зміни переміщення u_2

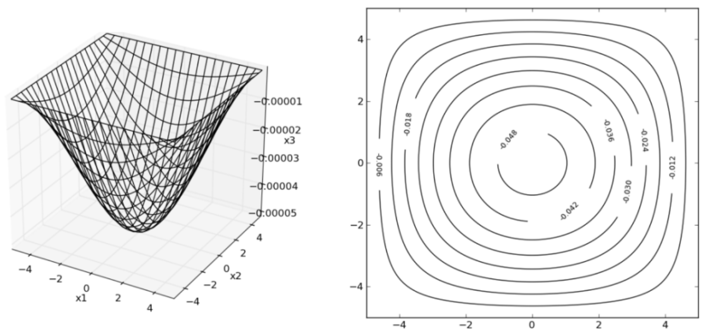


Рис. 4. Графік зміни переміщення u_3

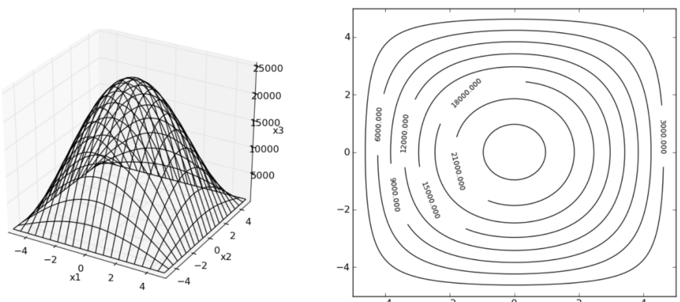


Рис. 5. Графік зміни нормальних напружень σ_{11}

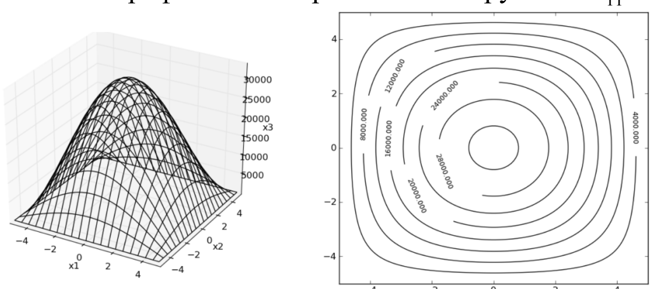


Рис. 6. Графік зміни нормальних напружень σ_{22}

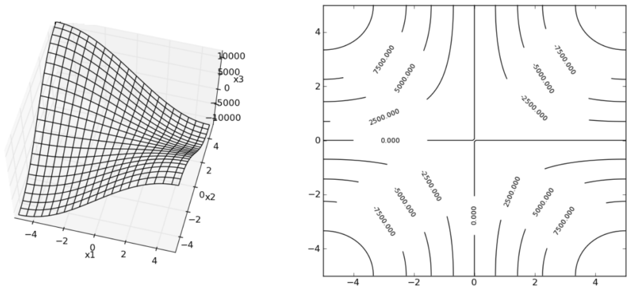


Рис. 7. Графік зміни дотичних напружень σ_{12}

Висновки. Побудовано математичну модель товстої ортотропної плити, до поверхонь якої прикладені несиметрично розподілені нормальні і дотичні зусилля. За допомогою коректорів точно задовольняються статичні умови на поверхнях плити. Отримано систему п'яти рівнянь рівноваги відносно невідомих потенціалів переміщень. Як приклад проведено розрахунок напружень і переміщень в товстій квадратній поперечно завантаженій плиті вільно обіпертій на контурі.

1. Borkowski Sz. Mechanika sprężystych płyt i powłok / pod red. Czesława Woźniaka. Mechanika Techniczna – Polska Akademia Nauk. Komitet Mechaniki t.8. Wydawnictwo Naukowe PWN SA, 2001.
2. German J. Podstawy mechaniki kompozytów włóknistych. Politechnika Krakowska, 2001.