

УДК 539.3

А.Ю. Коцюба, С.В. Лавренчук

Луцький національний технічний університет

### КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ЖОРСТКОГО ШТАМПА ТА НЕСКІНЧЕНОЇ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ З БЛИЗЬКИМ ДО ЕЛІПТИЧНОГО ОТВОРОМ

На основі побудованого в [1] алгоритму розвинуто числову методику знаходження контактних напружень під штампом складної форми для випадку ортотропної пластинки з близьким до еліптичного отвором. Досліджено розподіл контактних напружень під штампом, форма якого збігається з формою отвору.

**Постановка задачі.** Розглядається задача про контактну взаємодію жорсткого гладкого штампа складної форми з границею близького до еліптичного отвору (з півосями  $R_x$  та  $R_y$ ) в ортотропній нескінченній пластинці. В літературі така задача достатньо повно вивчена, коли штамп має кругову форму і є близьким за розмірами до отвору [2, 3].

Розвинута в даній роботі числова методика дозволяє розв'язувати плоскі контактні задачі теорії пружності, у яких область контакту є наперед невідомою і може складатися з окремих ділянок.

Прийmemo, що пластинка послаблена близьким до еліптичного отвором. Нехай рівняння контуру, що обмежує цей отвір, задається у неявному вигляді  $g(x, y) = 0$  (або у параметричному –  $x = g_1(\alpha)$ ,  $y = g_2(\alpha)$ ), а границя штампу до контактної взаємодії – рівнянням

$$f(x, y) = 0. \quad (1)$$

Припустимо, що відомі прикладені до штампа сили, головні вектори та момент яких відповідно дорівнюють  $(P_x, P_y)$  і  $M$ .

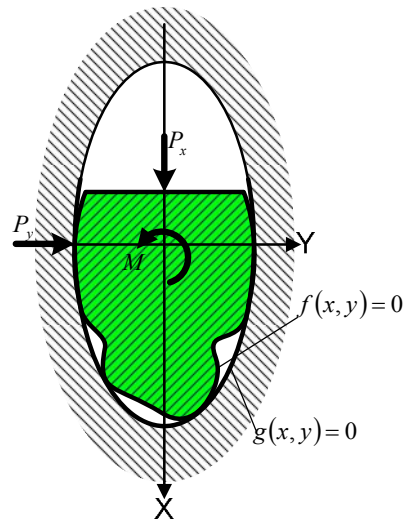


Рис. 1. Постановка задачі

При розв'язуванні будемо вважати, що між штампом та ортотропним тілом мають місце сили тертя. Покладемо, що штамп знаходиться в стані граничної рівноваги і має місце закон Кулона-Амонтона.

Для розв'язування задачі використаємо числово-аналітичну методику [1], яка базується на методах інтегральних рівнянь, механічних квадратур та квадратичного програмування.

**Умови контакту.** Приймаючи, що після контактної взаємодії відбувається зміщення штампа в напрямку координатної осі  $Ox$  на відстань  $D_x$  та його поворот на кут  $\theta$ , одержимо з [1] умови контакту у вигляді

$$f_1(\alpha)\tilde{u}(\alpha) + f_2(\alpha)\tilde{v}(\alpha) = -\tilde{f}(\alpha) - D_x f_1(\alpha) + \theta f_3(\alpha) + \delta(\alpha), \quad (2)$$

де  $\tilde{f}(\alpha) = f(g_1(\alpha), g_2(\alpha))$ ,  $f_1(\alpha) = f'_x(g_1(\alpha), g_2(\alpha))$ ,  $f_2(\alpha) = f'_y(g_1(\alpha), g_2(\alpha))$ ,  
 $f_3(\alpha) = g_1(\alpha) \cdot f_2(\alpha) - g_2(\alpha) \cdot f_1(\alpha)$ ;  $\tilde{u}(\alpha) = u(g_1(\alpha), g_2(\alpha))$ ,  $\tilde{v}(\alpha) = v(g_1(\alpha), g_2(\alpha))$  –  
 переміщення межі пластинки, зумовлені дією прикладеного до неї штамп;  $\delta(\alpha) = o(\tilde{u}, \tilde{v})$  – додаткові  
 члени, які мають другий порядок малості відносно цих переміщень.

Нехай дотичні напруження  $\tau$  під штампом пов'язані з нормальними  $\sigma$  згідно закону Кулона-Амонтона  $\sigma = \rho\tau$  ( $\rho$  – коефіцієнт тертя), тоді для випадку еліптичного отвору з півосями  $R_x$  та  $R_y$  співвідношення для переміщень можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \tilde{u}(\alpha) = \int_{\Omega} \sigma(\xi)(K_1(\alpha, \xi) - \rho K_2(\alpha, \xi)) d\xi, \\ \tilde{v}(\alpha) = \int_{\Omega} \sigma(\xi)(K_2(\alpha, \xi) + \rho K_1(\alpha, \xi)) d\xi; \end{cases} \quad (3)$$

де  $\Omega$  – сукупність відрізків, уздовж яких відбувається контакт;

$$\begin{cases} K_1(\alpha, \xi) = -\frac{1}{\pi} \left[ -n_1 \ln 2 \sin \frac{|\alpha - \xi|}{2} R_y \cos \xi - n_2 \frac{\alpha - \xi + \pi}{2} R_x \sin \xi \right], \\ K_2(\alpha, \xi) = -\frac{1}{\pi} \left[ -n_3 \ln 2 \sin \frac{|\alpha - \xi|}{2} R_x \sin \xi + n_2 \frac{\alpha - \xi + \pi}{2} R_y \cos \xi \right]; \end{cases}$$

де  $n_1 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{E_1}$ ,  $n_2 = \frac{-\nu_{12}}{E_1} + \frac{1}{\beta_1 \beta_2 E_2} = \frac{-\nu_{12}}{E_1} + \frac{\beta_1 \beta_2}{E_1} = \frac{-\nu_{21}}{E_2} + \frac{1}{\beta_1 \beta_2 E_2} = \frac{-\nu_{21}}{E_2} + \frac{\beta_1 \beta_2}{E_1}$ ,  $n_3 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{E_2 \beta_1 \beta_2}$ ; тут  $E_1$ ,  $E_2$  і  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}$  – модулі Юнга і коефіцієнти Пуассона для напрямків осей  $Ox$  та  $Oy$ ;  $\beta_1$  і  $\beta_2$  – додатні корені характеристичного біквдратного рівняння

$$\frac{\beta^4}{E_1} + \left( -\frac{2\nu_{12}}{E_1} + \frac{1}{G} \right) \beta^2 + \frac{1}{E_2} = 0,$$

де  $G$  – модуль зсуву.

Далі прийемо, що отвір має близьку до еліптичної з півосями  $R_x$  та  $R_y$  форму. Тоді його рівняння у параметричному вигляді буде

$$g_1(\alpha) = \tilde{R}_x(\alpha) \cos \alpha, \quad g_2(\alpha) = \tilde{R}_y(\alpha) \sin \alpha, \quad \alpha \in [-\pi; \pi],$$

де  $R_x - \tilde{R}_x(\alpha) = g_{x\varepsilon}(\alpha)$ ,  $R_y - \tilde{R}_y(\alpha) = g_{y\varepsilon}(\alpha)$ . Тут  $g_{x\varepsilon}$  і  $g_{y\varepsilon}$  – обмежені за модулем малим числом  $\varepsilon$  функції, які характеризують відхилення форми отвору від еліптичної. Будемо вважати, що величина  $\varepsilon$  є достатньо малою, і нею у співвідношеннях для переміщень можна знехтувати без істотного впливу на шукані розподіли контактних напружень, тобто, що переміщення на поверхні цього отвору задаються співвідношеннями (3).

Додаткові рівності для знаходження невідомих  $D_x$  і  $\theta$  запишемо у вигляді

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \sigma(\xi)(\tilde{R}_y(\xi) \cos \xi - \rho \tilde{R}_x(\xi) \sin \xi) d\xi = P_x, \\ \int_{\Omega} \sigma(\xi)(\tilde{R}_x(\xi) \sin \xi + \rho \tilde{R}_y(\xi) \cos \xi) d\xi = P_y. \end{cases} \quad (4)$$

**Побудова інтегральних рівнянь.** Нехай штамп має форму близьку до еліптичної з півосями  $r_x$  та  $r_y$ . Тоді його рівняння можна записати у параметричному вигляді

$$x = \tilde{r}_x(\alpha) \cos \alpha, \quad y = \tilde{r}_y(\alpha) \sin \alpha, \quad \alpha \in [-\pi; \pi],$$

де  $r_x - \tilde{r}_x(\alpha) = f_{x\delta}(\alpha)$ ,  $r_y - \tilde{r}_y(\alpha) = f_{y\delta}(\alpha)$ . Тут  $f_{x\delta}$  і  $f_{y\delta}$  – обмежені за модулем малим числом  $\delta$  функції, які характеризують відхилення форми штамп від еліптичної.

Для побудови інтегрального рівняння (2) необхідно було б знайти відповідну функцію  $f$ , тобто побудувати рівняння жорсткого штампа у неявному вигляді (1). Якщо проводити міркування для довільних функцій  $\tilde{r}_x$  та  $\tilde{r}_y$ , то це дуже суттєво ускладнить подальші викладки. Тому для спрощення приймемо, що  $f_{x\delta}(\alpha) = r_x \delta \cos(k\alpha)$  і  $f_{y\delta}(\alpha) = r_y \delta \cos(k\alpha)$ . Тоді рівняння штампа (1) матиме вигляд

$$(x - \varepsilon)^2 + my^2 - r_x^2 (1 - \delta \cos(k\mathcal{C}(x, y)))^2 = 0, \quad (5)$$

$$\text{де } m = \frac{r_x^2}{r_y^2}; \quad \mathcal{C}(x, y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{r_x y}{r_y x}\right) & \text{при } x > 0; \\ \arctan\left(\frac{r_x y}{r_y x}\right) + \pi & \text{при } x < 0, y \geq 0; \\ \arctan\left(\frac{r_x y}{r_y x}\right) - \pi & \text{при } x < 0, y < 0; \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} y & \text{при } x = 0, y \neq 0. \end{cases}$$

Нехтуючи величиною  $\delta$ , проведемо лінеаризацію інтегрального рівняння (2) для жорсткого штампа, форма якого задається рівнянням (5). Тоді в умові (2) функції  $\tilde{f}$ ,  $\tilde{f}_1$ ,  $\tilde{f}_2$  і  $\tilde{f}_3$  одержимо у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\alpha) &= \tilde{R}_x^2(\alpha) - r_x^2 (1 - \delta \cos(k\tilde{\alpha}(\alpha)))^2 + \varepsilon^2 - 2\tilde{R}_x(\alpha)\varepsilon \cos\alpha + \\ &\quad + (m\tilde{R}_y^2(\alpha) - \tilde{R}_x^2(\alpha))\sin^2\alpha, \\ \tilde{f}_1(\alpha) &= 2(\tilde{R}_x(\alpha)\cos\alpha - \varepsilon) - r_x^2 \delta k (1 - \delta \cos(k\tilde{\alpha}(\alpha))) \sin(k\tilde{\alpha}(\alpha))\tilde{\alpha}_1(\alpha), \\ \tilde{f}_2(\alpha) &= 2m\tilde{R}_y(\alpha)\sin\alpha - r_x^2 \delta k (1 - \delta \cos(k\tilde{\alpha}(\alpha))) \sin(k\tilde{\alpha}(\alpha))\tilde{\alpha}_2(\alpha), \\ \tilde{f}_3(\alpha) &= 2\tilde{R}_x(\alpha)\tilde{R}_y(\alpha)\sin\alpha \cos\alpha (m - 1) + 2\tilde{R}_y(\alpha)\varepsilon \sin\alpha + r_x^2 \delta k \times \\ &\quad \times (1 - \delta \cos(k\tilde{\alpha}(\alpha))) (\tilde{R}_y(\alpha)\tilde{\alpha}_1(\alpha)\sin\alpha - \tilde{R}_x(\alpha)\tilde{\alpha}_2(\alpha)\cos\alpha) \sin(k\tilde{\alpha}(\alpha)); \end{aligned}$$

де

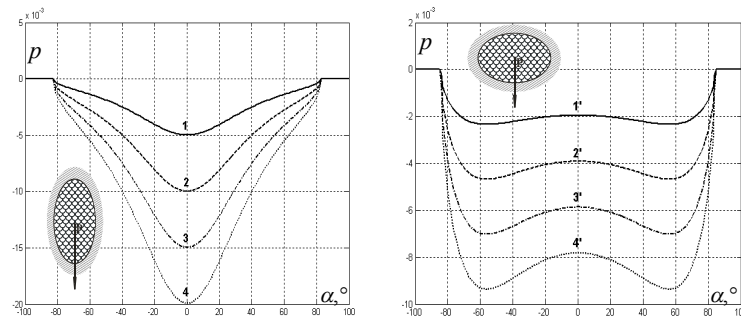
$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(\alpha) &= \mathcal{C}(\tilde{R}_x(\alpha)\cos\alpha, \tilde{R}_y(\alpha)\sin\alpha), \\ \tilde{\alpha}_1(\alpha) &= \mathcal{C}'(\tilde{R}_x(\alpha)\cos\alpha, \tilde{R}_y(\alpha)\sin\alpha), \\ \tilde{\alpha}_2(\alpha) &= \mathcal{C}''(\tilde{R}_x(\alpha)\cos\alpha, \tilde{R}_y(\alpha)\sin\alpha). \end{aligned}$$

**Контактні напруження під штампом, форма якого співпадає з формою отвору.** Нехай рівняння отвору задається співвідношенням (5). Тоді у параметричній формі воно матиме вигляд  $x = \tilde{r}_x(1 - \delta \cos(k\alpha))\cos\alpha$ ,  $y = \tilde{r}_y(1 - \delta \cos(k\alpha))\sin\alpha$ ,  $\alpha \in [-\pi; \pi]$ .

Для спрощення приймемо, що  $E_1 = E_2 = E$ ,  $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$ ,  $\rho = 0$ ,  $Q_y = \frac{-P_y}{2GR} = 0$   
 $(R = \frac{R_x + R_y}{2})$  і  $\delta = 0$ .

Результати розрахунків контактних напружень при  $N = 601$  і  $D = [-100^\circ, 100^\circ]$  наведено на рис. 2. Для різних напрямків дії головного вектора сили отримано різні розподіли контактних напружень. Для кривих (1-4) сила діє в напрямку великої півосі, а для кривих (1'-4') – в напрямку малої півосі. Тут

кривим (1 і 1') відповідає головний вектор сили  $Q_x^1 = \frac{P_x^1}{2GR} = 0.00625$ , кривим (2 і 2') –  $Q_x^2 = 0.0125$ , кривим (3 і 3') –  $Q_x^3 = 0.01875$ , кривим (4 і 4') –  $Q_x^4 = 0.025$ .



а) Сила діє в напрямку великої півосі      б) Сила діє в напрямку малої півосі

Рис. 2. Контактні напруження під штампом еліптичної форми

Як видно з цього рисунку, у випадку дії сили в напрямку великої півосі максимальні напруження досягаються в центрі області контакту. При дії зусиль у напрямку малої півосі (рис. 2б) максимум у розподілі контактних напружень досягається в точках  $\alpha = \pm 55^\circ$ , при цьому він при відповідних значеннях сили є більш ніж у 2 рази меншим, ніж на рис. 2а. Крім того, у двох випадках спостерігається майже лінійна залежність між максимальними напруженнями і значеннями головного вектора сили. Область контакту у всіх розглянутих випадках співпадає і становить  $\approx [-84^\circ; 84^\circ]$ .

1. Божидарнік В.М. Контактна взаємодія штампа довільної форми та пластинки з еліптичним отвором / В. В. Божидарнік, А. Ю. Коцюба, О. В. Максимович // Вісник Дніпропетровського університету. Серія : Механіка. – Дніпропетровськ : В-во ДНУ, 2007. – Вип. 11, т. 2, № 2/2. – С. 29–34.
2. Комбель С.М. Посадка жорсткого диска в еліптичний отвір нескінченної ортотропної пластинки // Машинознавство. – 2003. – № 8. – С. 25–31.
3. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. – К. : Наукова думка, 1968. – 888 с.

