

УДК 621.548

І.В.Кузьо, В.М.Корендій

Національний університет "Львівська політехніка"

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ТИХОХІДНОГО ВІТРОКОЛЕСА

Математичне моделювання динаміки тихохідного вітроколеса. На основі аналізу інерційних та гравітаційних навантажень тихохідного вітроколеса з використанням принципів класичної механіки (принцип Д'Аламбера, теорема Коріоліса, теорема про зміну кількості руху тощо) розроблено математичну модель динаміки тихохідного вітроколеса, яка дозволяє визначити сумарні еквівалентні навантаження на елементарні ділянки лопатей при їх одночасному, неусталеному обертанні навколо трьох осей – башти, лопаті і вітроколеса.

Ключові слова: математичне моделювання, вітроустановка, тихохідне вітроколесо, гравітаційні та інерційні навантаження, складний рух.

Постановка проблеми. На даний час у всьому світі спостерігається підвищений інтерес до використання в різних галузях економіки нетрадиційних відновлюваних джерел енергії (НВДЕ). Це пов'язано, перш за все, із зростаючою необхідністю охорони навколишнього середовища, виснаженням викопних природних ресурсів та кризовими явищами в економіці. Внаслідок цього перед споживачами електричної та інших видів енергії особливо гостро постають завдання постійного зниження енергозатрат, а також пошуку дешевих альтернативних джерел енергії.

Характерною рисою розвитку сучасної енергетики є широке залучення в енергобаланс передових країн світу НВДЕ. Енергія повітряних потоків розглядається спеціалістами, як одна із найбільш перспективних, яка здатна замінити не тільки традиційні джерела, але і атомну енергетику. Аналіз існуючих вітроустановок (ВУ) показує, що на даний час в основному використовуються та проектується ВУ великої та середньої потужності з перетворенням енергії вітру в електричну енергію та передачу її безпосередньо в промислову мережу. Проте одним із найперспективніших напрямків розвитку вітроенергетики є використання її в сільськогосподарському виробництві. Особливістю технологічних процесів даної галузі є їх порівняно мала енергоємність. Перш за все, це виробництво муки, водопостачання, підготовка кормів у тваринницьких господарствах, зрошення садів і городніх культур, освітлення приміщень, використання в якості приводів станків невеликих ремонтних майстерень тощо. Відмічений факт робить необхідним створення вітроустановок малої та надмалої потужності для обслуговування окремих господарств. Здебільшого виробники таких ВУ використовують досвід зарубіжних країн, який базується на проектуванні швидкохідних установок середньої та великої потужності, а тому не завжди враховує і задовольняє особливості тихохідних ВУ. На даний час вітроенергетичні установки малої і надмалої потужності з тихохідним вітроколесом (ВК) знаходяться або на стадії проектування, або конструюються і використовуються на аматорському рівні. Тому й виникає необхідність вдосконалення методичної бази їх дослідження та моделювання.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідженню динаміки ВУ присвячено досить багато публікацій [1-5]. Проте в більшості робіт моделюються лише рухи лопатей навколо однієї або двох осей – башти і вітроколеса, при чому рух лопатей навколо власних осей не досліджується, а також не враховуються обертові сили інерції у перехідних (неусталених) режимах, коли виникають кутові пришвидшення обертання гондоли чи вітроколеса.

Формулювання цілі статті. Метою даної роботи є розробка математичної моделі динаміки тихохідного вітроколеса на основі аналізу інерційних та гравітаційних навантажень на його лопаті. При цьому конструкцією вітроустановки передбачена можливість обертання лопатей одночасно навколо трьох осей: навколо осі башти (при орієнтації ВУ за напрямком вітру); навколо осі вітроколеса (внаслідок взаємодії з повітряним потоком); навколо власної осі (при зміні швидкості вітру з метою стабілізації частоти обертання вітроколеса).

Виклад основного матеріалу. Розглянемо вітроустановку, яка складається із вітроколеса (абсолютно жорсткого диска з плоскими лопатями), гондоли (жорсткого валу, на якому обертається вітроколесо) та башти (жорсткої балки, на якій встановлюється гондола з можливістю повороту) (рис. 1). Розмістимо систему координат $Oxyz$ таким чином, щоб осі x і y утворювали горизонтальну площину, а осі x і z та y і z – відповідні вертикальні площини. Як видно із рис. 1

початок координат (точка O) співпадає з віссю башти, а вісь z направлена вздовж цієї осі. В такому випадку лопаті можуть обертатися у площині xOy на деякий кут φ за рахунок повороту гондоли (рис. 1), в площині L , перпендикулярній до xOy , на деякий кут ψ за рахунок обертання вітроколеса (рис. 1) та в площині K , перпендикулярній до L , на деякий кут θ внаслідок обертання навколо власної осі (рис. 2).

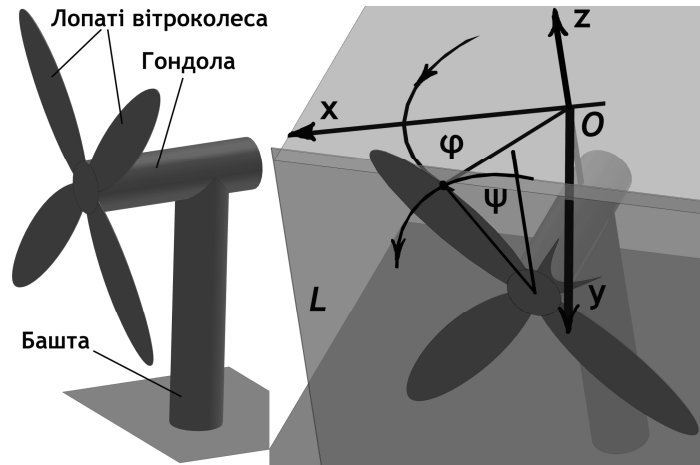


Рис. 1. Схематичне зображення обертального руху вітроколеса та гондоли

Розглянемо спершу випадок руху лопатей навколо осі башти та визначимо проєкції інерційних сил на осі обраної системи координат. Припустимо, що внаслідок різкої зміни напрямку повітряного потоку гондола відхилилася від свого початкового положення на кут деякий кут φ , а тому й елементарні ділянки лопатей вітроколеса повернулася відносно площини Oxz на цей же кут (рис. 1). При цьому рух гондоли, а відповідно й вітроколеса з лопатями, визначатиметься кутовими швидкістю $d\varphi/dt$ та пришвидшенням $d^2\varphi/dt^2$ її обертання. Таким чином на елементарні ділянки лопатей будуть діяти інерційні навантаження, обумовлені дотичним \vec{a}_τ та доцентровим \vec{a}_n пришвидшеннями. Спроєкуємо ці пришвидшення на осі обраної системи координат:

$$\begin{aligned} Ox: a_{\tau x} &= -d^2\varphi/dt^2 \cdot f \cdot \sin\varphi; & a_{nx} &= -(d\varphi/dt)^2 \cdot f \cdot \cos\varphi; \\ Oy: a_{\tau y} &= d^2\varphi/dt^2 \cdot f \cdot \cos\varphi; & a_{ny} &= -(d\varphi/dt)^2 \cdot f \cdot \sin\varphi; \\ Oz: a_{\tau z} &= 0; & a_{nz} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де f – відстань від довільної точки лопаті до осі башти. Вона буде змінюватися в залежності від положення лопаті при її обертанні навколо осі вітроколеса та навколо власної осі:

$$f = \sqrt{\left(\sqrt{r^2 + (b \cos\theta)^2} \cdot \sin\psi\right)^2 + (c \pm b \sin\theta)^2} = \sqrt{\left(r^2 + (b \cos\theta)^2\right) \cdot \sin^2\psi + (c \pm b \sin\theta)^2}, \quad (2)$$

де r – проєкція радіуса розміщення елементарної ділянки на вісь лопаті, b – відстань від осі лопаті до елементарної ділянки, де c – відстань від осі башти до осі лопаті.

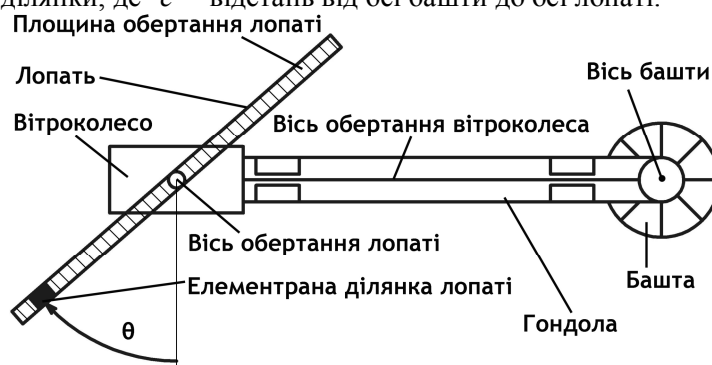


Рис. 2. Схематичне зображення обертального руху лопаті навколо власної осі

Згідно з означенням відцентрову та дотичну сили інерції в інерційній системі відліку можна легко визначити за формулами $\vec{\Phi}_n = -m \cdot \vec{a}_n$ і $\vec{\Phi}_\tau = -m \cdot \vec{a}_\tau$ у випадку, коли масу m можна вважати зосередженою в певній точці. В нашому випадку необхідно враховувати те, що інерційні сили будуть розподілені за довжиною та шириною лопаті, тому потрібно записати проекції $\vec{\Phi}_n$ і $\vec{\Phi}_\tau$ через проекції сил $\vec{\Phi}_n^i$ і $\vec{\Phi}_\tau^i$, які прикладені до елементарної ділянки лопаті довжиною dr і шириною db . Для цього знайдемо проекції інтенсивностей вказаних сил $\vec{q}_n^i(r, b)$ і $\vec{q}_\tau^i(r, b)$:

$$\begin{aligned} Ox: \quad q_{\tau x}^i(r, b) &= d^2\varphi/dt^2 \cdot \rho \cdot s \cdot \sqrt{\left(r^2 + (b \cos \theta)^2\right) \cdot \sin^2 \psi + (c \pm b \sin \theta)^2} \cdot \sin \varphi; \\ q_{nx}^i &= (d\varphi/dt)^2 \cdot \rho \cdot s \cdot \sqrt{\left(r^2 + (b \cos \theta)^2\right) \cdot \sin^2 \psi + (c \pm b \sin \theta)^2} \cdot \cos \varphi; \\ Oy: \quad q_{\tau y}^i(r, b) &= -d^2\varphi/dt^2 \cdot \rho \cdot s \cdot \sqrt{\left(r^2 + (b \cos \theta)^2\right) \cdot \sin^2 \psi + (c \pm b \sin \theta)^2} \cdot \cos \varphi; \\ q_{ny}^i &= (d\varphi/dt)^2 \cdot \rho \cdot s \cdot \sqrt{\left(r^2 + (b \cos \theta)^2\right) \cdot \sin^2 \psi + (c \pm b \sin \theta)^2} \cdot \sin \varphi; \\ Oz: \quad q_{\tau z}^i(r, b) &= 0; \quad q_{nz}^i = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

де ρ – густина матеріалу лопаті, s – товщина лопаті.

Остаточно проекції сил $\vec{\Phi}_n^i$ і $\vec{\Phi}_\tau^i$, які прикладені до елементарної ділянки лопаті довжиною dr і шириною db , матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \Phi_{\tau x}^i &= q_{\tau x}^i(r, b) \cdot dr \cdot db = d^2\varphi/dt^2 \cdot \rho \cdot s \cdot \sqrt{\left(r^2 + (b \cos \theta)^2\right) \cdot \sin^2 \psi + (c \pm b \sin \theta)^2} \cdot \sin \varphi \cdot dr \cdot db; \\ \Phi_{nx}^i &= q_{nx}^i \cdot dr \cdot db = (d\varphi/dt)^2 \cdot \rho \cdot s \cdot \sqrt{\left(r^2 + (b \cos \theta)^2\right) \cdot \sin^2 \psi + (c \pm b \sin \theta)^2} \cdot \cos \varphi \cdot dr \cdot db; \\ \Phi_{\tau y}^i &= q_{\tau y}^i(r, b) \cdot dr \cdot db = -d^2\varphi/dt^2 \cdot \rho \cdot s \cdot \sqrt{\left(r^2 + (b \cos \theta)^2\right) \cdot \sin^2 \psi + (c \pm b \sin \theta)^2} \cdot \cos \varphi \cdot dr \cdot db; \\ \Phi_{ny}^i &= q_{ny}^i \cdot dr \cdot db = (d\varphi/dt)^2 \cdot \rho \cdot s \cdot \sqrt{\left(r^2 + (b \cos \theta)^2\right) \cdot \sin^2 \psi + (c \pm b \sin \theta)^2} \cdot \sin \varphi \cdot dr \cdot db; \\ \Phi_{\tau z}^i &= q_{\tau z}^i(r, b) = 0; \quad \Phi_{nz}^i = q_{nz}^i = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Отже можна записати сумарне інерційне навантаження на лопать при обертанні гондоли та зведемо його до найпростішого вигляду:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^R \int_0^{B/2} \sqrt{\left(\Phi_{\tau x}^i + \Phi_{nx}^i\right)^2 + \left(\Phi_{\tau y}^i + \Phi_{ny}^i\right)^2 + \left(\Phi_{\tau z}^i + \Phi_{nz}^i\right)^2} dr db = \\ &= \rho \cdot s \cdot \int_0^R \int_0^{B/2} \sqrt{\left(r^2 + (b \cos \theta)^2\right) \cdot \sin^2 \psi + (c \pm b \sin \theta)^2} \cdot \sqrt{\left(d^2\varphi/dt^2\right)^2 + (d\varphi/dt)^4} dr db, \end{aligned} \tag{5}$$

де R – зовнішній радіус вітроколеса, $B = B(r)$ – функція залежності ширини лопаті від її поточного радіуса. Отже, як бачимо у формулі (5), розрахунки пришвидшень отримані правильно, оскільки сумарна інерційна сила, яка діє на елементарні ділянки лопатей при обертанні гондоли навколо осі башти, розкладається на дві складові – відцентрову та дотичну.

Тепер перейдемо до аналізу руху лопатей навколо осі вітроколеса та визначимо проекції відповідних інерційних сил на осі обраної системи координат. Припустимо, що внаслідок різкої зміни швидкості повітряного потоку вітроколесо обернулося навколо власної осі на деякий кут ψ , а тому й елементарні ділянки лопатей повернулися навколо осі вітроколеса на цей же кут. Аналогічно як і в попередньому випадку, рух вітроколеса, а відповідно й лопатей, визначатиметься кутовими швидкістю $d\psi/dt$ та пришвидшенням $d^2\psi/dt^2$ його обертання. Таким чином на елементарні ділянки лопатей будуть діяти інерційні навантаження, обумовлені дотичним

$\bar{a}_{\tau 1}$ та доцентровим \bar{a}_{n1} пришвидшеннями. Спроектуємо ці пришвидшення на осі системи координат $Oxyz$:

$$\begin{aligned} Ox: \quad a_{\tau x1} &= d^2\psi/dt^2 \cdot h \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi; \quad a_{nx1} = -(d\psi/dt)^2 \cdot h \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi; \\ Oy: \quad a_{\tau y1} &= -d^2\psi/dt^2 \cdot h \cdot \cos \varphi \cdot \cos \psi; \quad a_{ny1} = (d\psi/dt)^2 \cdot h \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi; \\ Oz: \quad a_{\tau z1} &= -d^2\psi/dt^2 \cdot h \cdot \sin \psi; \quad a_{nz1} = -(d\psi/dt)^2 \cdot h \cdot \cos \psi, \end{aligned} \quad (6)$$

де h – відстань від довільної точки лопаті до осі вітроколеса. Вона буде змінюватися в залежності від положення лопаті при її обертанні навколо власної осі:

$$h = \sqrt{r^2 + (b \cos \theta)^2}. \quad (7)$$

У даному випадку інерційні навантаження внаслідок обертання лопатей навколо осі вітроколеса, аналогічно як і в попередньому, будуть розподілені за довжиною та шириною лопаті, тому проекції сил $\bar{\Phi}_{n1}^i$ і $\bar{\Phi}_{\tau 1}^i$, які прикладені до елементарної ділянки лопаті довжиною dr і шириною db , матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \Phi_{\tau x1}^i &= -d^2\psi/dt^2 \cdot \rho \cdot s \cdot \sqrt{r^2 + (b \cos \theta)^2} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi \cdot dr \cdot db; \\ \Phi_{nx1}^i &= (d\psi/dt)^2 \cdot \rho \cdot s \cdot \sqrt{r^2 + (b \cos \theta)^2} \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi \cdot dr \cdot db; \\ \Phi_{\tau y1}^i &= d^2\psi/dt^2 \cdot \rho \cdot s \cdot \sqrt{r^2 + (b \cos \theta)^2} \cdot \cos \varphi \cdot \cos \psi \cdot dr \cdot db; \\ \Phi_{ny1}^i &= -(d\psi/dt)^2 \cdot \rho \cdot s \cdot \sqrt{r^2 + (b \cos \theta)^2} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi \cdot dr \cdot db; \\ \Phi_{\tau z1}^i &= d^2\psi/dt^2 \cdot \rho \cdot s \cdot \sqrt{r^2 + (b \cos \theta)^2} \cdot \sin \psi \cdot dr \cdot db; \\ \Phi_{nz1}^i &= (d\psi/dt)^2 \cdot \rho \cdot s \cdot \sqrt{r^2 + (b \cos \theta)^2} \cdot \cos \psi \cdot dr \cdot db. \end{aligned} \quad (8)$$

З метою дослідження впливу сили інерції, яка виникає при обертанні вітроколеса навколо своєї осі, а також для перевірки правильності отриманих залежностей для проекцій дотичних та доцентрових пришвидшень, виведемо вираз для знаходження сумарного інерційного навантаження Φ_1 на лопать та зведемо його до найпростішого вигляду:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \rho \cdot s \cdot \int_0^{R/2} \int_0^{B/2} \sqrt{r^2 + (b \cos \theta)^2} \times \left[\begin{aligned} &\left((d\psi/dt)^2 \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi - d^2\psi/dt^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi \right)^2 + \\ &\left(d^2\psi/dt^2 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \psi - (d\psi/dt)^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi \right)^2 + \\ &\left(d^2\psi/dt^2 \cdot \sin \psi + (d\psi/dt)^2 \cdot \cos \psi \right)^2 \end{aligned} \right] dr db = \\ &= \rho \cdot s \cdot \int_0^{R/2} \int_0^{B/2} \sqrt{r^2 + (b \cos \theta)^2} \times \sqrt{\left[(d^2\psi/dt^2)^2 + (d\psi/dt)^4 \right]} dr db. \end{aligned} \quad (9)$$

Отже, як бачимо у формулі (9), розрахунки пришвидшень отримані правильно, оскільки сумарна інерційна сила, яка діє на елементарні ділянки лопатей при обертанні вітроколеса навколо своєї осі, розкладається на дві складові – відцентрову та дотичну.

І, нарешті, залишився останній випадок – рух лопатей навколо власних осей внаслідок різкої зміни швидкості повітряного потоку. Припустимо, що в результаті пориву вітру лопать обернулася навколо власної осі на деякий кут θ . Рух елементарних ділянок лопатей визначатиметься кутовими швидкістю $d\theta/dt$ та пришвидшенням $d^2\theta/dt^2$ її обертання. Таким чином на діятимуть інерційні навантаження, обумовлені дотичним $\bar{a}_{\tau 2}$ та доцентровим \bar{a}_{n2} пришвидшеннями. Спроектуємо ці пришвидшення на осі системи координат $Oxyz$:

$$\begin{aligned}
 Ox: \quad a_{\text{tx}2} &= d^2\theta/dt^2 \cdot b \cdot (\sin\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\psi + \cos\theta \cdot \cos\varphi); \\
 a_{\text{nx}2} &= (d\theta/dt)^2 \cdot b \cdot (\cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\psi - \sin\theta \cdot \cos\varphi); \\
 Oy: \quad a_{\text{ty}2} &= -d^2\theta/dt^2 \cdot b \cdot (\sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot \cos\psi - \cos\theta \cdot \sin\varphi); \\
 a_{\text{ny}2} &= -(d\theta/dt)^2 \cdot b \cdot (\cos\theta \cdot \cos\varphi \cdot \cos\psi + \sin\theta \cdot \sin\varphi); \\
 Oz: \quad a_{\text{tz}2} &= -d^2\theta/dt^2 \cdot b \cdot \sin\theta \cdot \sin\psi; \quad a_{\text{nz}2} = -(d\theta/dt)^2 \cdot b \cdot \cos\theta \cdot \sin\psi.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

У даному випадку інерційні навантаження внаслідок обертання лопатей навколо осі вітроколеса, аналогічно як і в попередньому, будуть розподілені за довжиною та шириною лопаті, тому проекції сил $\bar{\Phi}_{n2}^i$ і $\bar{\Phi}_{\tau2}^i$, які прикладені до елементарної ділянки лопаті довжиною dr і шириною db , матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\text{tx}2}^i &= -d^2\theta/dt^2 \cdot \rho \cdot s \cdot b \cdot (\sin\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\psi + \cos\theta \cdot \cos\varphi) \cdot dr \cdot db; \\
 \Phi_{\text{nx}2}^i &= -(d\theta/dt)^2 \cdot \rho \cdot s \cdot b \cdot (\cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\psi - \sin\theta \cdot \cos\varphi) \cdot dr \cdot db; \\
 \Phi_{\text{ty}2}^i &= d^2\theta/dt^2 \cdot \rho \cdot s \cdot b \cdot (\sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot \cos\psi - \cos\theta \cdot \sin\varphi) \cdot dr \cdot db; \\
 \Phi_{\text{ny}2}^i &= (d\theta/dt)^2 \cdot \rho \cdot s \cdot b \cdot (\cos\theta \cdot \cos\varphi \cdot \cos\psi + \sin\theta \cdot \sin\varphi) \cdot dr \cdot db;
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

$$\Phi_{\text{tz}2}^i = d^2\theta/dt^2 \cdot \rho \cdot s \cdot b \cdot \sin\theta \cdot \sin\psi \cdot dr \cdot db; \quad \Phi_{\text{nz}2}^i = (d\theta/dt)^2 \cdot \rho \cdot s \cdot b \cdot \cos\theta \cdot \sin\psi \cdot dr \cdot db.$$

З метою дослідження впливу сили інерції, яка виникає при обертанні лопатей навколо своїх осей, а також для перевірки правильності отриманих залежностей для проекцій дотичних та доцентрових пришвидшень, введемо кінцевий вираз для сумарного інерційного навантаження Φ_2 на лопать та зведемо його до найпростішого вигляду:

$$\begin{aligned}
 \Phi_2 &= \rho \cdot s \cdot \int_0^{R/2} \int_0^{B/2} b \cdot \left[\begin{aligned} &\left(d^2\theta/dt^2 \cdot (\sin\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\psi + \cos\theta \cdot \cos\varphi) + \right. \\ &\left. + (d\theta/dt)^2 \cdot (\cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\psi - \sin\theta \cdot \cos\varphi) \right)^2 + \\ &\left(d^2\theta/dt^2 \cdot (\sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot \cos\psi - \cos\theta \cdot \sin\varphi) + \right. \\ &\left. + (d\theta/dt)^2 \cdot (\cos\theta \cdot \cos\varphi \cdot \cos\psi + \sin\theta \cdot \sin\varphi) \right)^2 + \\ &\left(d^2\theta/dt^2 \cdot \sin\theta \cdot \sin\psi + (d\theta/dt)^2 \cdot b \cdot \cos\theta \cdot \sin\psi \right)^2 \end{aligned} \right] drdb = \\
 &= \rho \cdot s \cdot \int_0^{R/2} \int_0^{B/2} b \cdot \sqrt{\left[\left(d^2\theta/dt^2 \right)^2 + (d\theta/dt)^4 \right]} drdb.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Отже, як бачимо у формулі (12), розрахунки пришвидшень отримані правильно, оскільки сумарна інерційна сила, яка діє на елементарні ділянки при обертанні лопаті навколо своєї осі, розкладається на дві складові – відцентрову та дотичну.

Тепер перейдемо до аналізу гравітаційних сил, що діють на елементарні ділянки лопатей. Сили тяжіння напрямлені вздовж вертикальної осі протилежно до напрямку осі Oz , тому матимуть лише одну складову, яка буде розподілена за довжиною та шириною лопаті:

$$\Phi_{\text{tx}} = 0; \quad \Phi_{\text{ty}} = 0; \quad \Phi_{\text{t}} = \Phi_{\text{tz}} = \rho \cdot s \cdot g \cdot \int_0^{R/2} \int_0^{B/2} drdb,
 \tag{13}$$

де $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – пришвидшення вільного падіння.

І насамкінець, дослідимо вплив трьох коріолісових сил інерції, які діятимуть на елементарні ділянки лопатей вітроколеса в результаті одночасного обертання: 1) гондоли і вітроколеса; 2) гондоли і лопаті; 3) вітроколеса і лопатей. Розглянемо детальніше кожне із цих навантажень та визначимо їх проекції на осі обраної системи координат $Oxyz$.

Згідно з означенням коріолісове пришвидшення – складова \vec{a}_{cor} абсолютного пришвидшення точки при її складному русі, що дорівнює подвоєному векторному добутку вектора переносної кутової швидкості $\vec{\omega}_e$ на вектор відносної швидкості \vec{V}_r цієї точки: $\vec{a}_{cor} = 2 \cdot (\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r)$. Для наших трьох випадків переносними будуть кутові швидкості: 1) і 2) гондоли ($\omega_{e1} = d\varphi/dt$); 3) вітроколеса ($\omega_{e2} = d\psi/dt$). Спроєкуємо вектори кутових швидкостей $\vec{\omega}_{e1}$ і $\vec{\omega}_{e2}$ на осі системи координат $Oxyz$:

$$\omega_{ex1} = 0; \omega_{ey1} = 0; \omega_{ez1} = d\varphi/dt; \omega_{ex2} = d\psi/dt \cdot \cos\varphi; \omega_{ey2} = d\psi/dt \cdot \sin\varphi; \omega_{ez2} = 0. \quad (14)$$

Відносними швидкостями елементарної ділянки для наших трьох випадків будуть її колові швидкості при обертанні навколо: 1) осі вітроколеса $\left(V_{r1} = d\psi/dt \cdot \sqrt{r^2 + (b \cos\theta)^2} \right)$; 2) і 3) осі лопаті $(V_{r2} = d\theta/dt \cdot b)$. Спроєкуємо вектори відносних швидкостей \vec{V}_{r1} і \vec{V}_{r2} цієї точки на осі системи координат $Oxyz$:

$$\begin{aligned} V_{rx1} &= d\psi/dt \cdot \sqrt{r^2 + (b \cos\theta)^2} \cdot \cos\psi \cdot \sin\varphi; V_{ry1} = -d\psi/dt \cdot \sqrt{r^2 + (b \cos\theta)^2} \cdot \cos\psi \cdot \cos\varphi; \\ V_{rz1} &= -d\psi/dt \cdot \sqrt{r^2 + (b \cos\theta)^2} \cdot \sin\psi; V_{rx2} = d\theta/dt \cdot b \cdot (\sin\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\psi + \cos\theta \cdot \cos\varphi); \\ V_{ry2} &= -d\theta/dt \cdot b \cdot (\sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot \cos\psi - \cos\theta \cdot \sin\varphi); V_{rz2} = -d\theta/dt \cdot b \cdot \sin\theta \cdot \sin\psi. \end{aligned} \quad (15)$$

При розрахунку коріолісового пришвидшення варто пам'ятати, що на практиці воно лежатиме в площині переносного обертання, згідно з правилом Жуковського: щоб знайти напрям переносного пришвидшення, необхідно спроєкувати вектор відносної швидкості на площину переносного обертання та повернути його проєкції на кут 90° за напрямом переносного обертання. Тому будемо користуватися наступним правилом:

$$a_{corx} = 2 \cdot (\omega_{ey} \cdot V_{rz} - \omega_{ez} \cdot V_{ry}); a_{cory} = 2 \cdot (\omega_{ez} \cdot V_{rx} - \omega_{ex} \cdot V_{rz}); a_{corz} = 2 \cdot (\omega_{ex} \cdot V_{ry} - \omega_{ey} \cdot V_{rx}).$$

Отже, можемо записати проєкції коріолісових пришвидшень на осі системи координат $Oxyz$ для кожного з трьох випадків:

$$\begin{aligned} a_{cor1x} &= 2 \cdot d\varphi/dt \cdot d\psi/dt \cdot \sqrt{r^2 + (b \cos\theta)^2} \cdot \cos\psi \cdot \cos\varphi; \\ a_{cor1y} &= 2 \cdot d\varphi/dt \cdot d\psi/dt \cdot \sqrt{r^2 + (b \cos\theta)^2} \cdot \cos\psi \cdot \sin\varphi; \quad a_{cor1z} = 0; \\ a_{cor2x} &= 2 \cdot d\varphi/dt \cdot d\theta/dt \cdot b \cdot (\sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot \cos\psi - \cos\theta \cdot \sin\varphi); \\ a_{cor2y} &= 2 \cdot d\varphi/dt \cdot d\theta/dt \cdot b \cdot (\sin\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\psi + \cos\theta \cdot \cos\varphi); \quad a_{cor2z} = 0; \\ a_{cor3x} &= -2 \cdot d\psi/dt \cdot \sin\varphi \cdot d\theta/dt \cdot b \cdot \sin\theta \cdot \sin\psi; \\ a_{cor3y} &= 2 \cdot d\psi/dt \cdot \cos\varphi \cdot d\theta/dt \cdot b \cdot \sin\theta \cdot \sin\psi; \\ a_{cor3z} &= -2 \cdot d\psi/dt \cdot \cos\varphi \cdot d\theta/dt \cdot b \cdot (\sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot \cos\psi - \cos\theta \cdot \sin\varphi) - \\ &\quad - 2 \cdot d\psi/dt \cdot \sin\varphi \cdot d\theta/dt \cdot b \cdot (\sin\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\psi + \cos\theta \cdot \cos\varphi). \end{aligned} \quad (16)$$

Згідно з означенням коріолісову силу інерції можна легко визначити за формулою $\vec{\Phi}_{cor} = -m\vec{a}_{cor}$ у випадку, коли масу m лопаті можна вважати зосередженою в певній точці. В нашому випадку необхідно враховувати те, що коріолісові сили інерції будуть розподілені за довжиною і шириною лопаті, тому проєкції сил $\vec{\Phi}_{cor1}^i$, $\vec{\Phi}_{cor2}^i$ і $\vec{\Phi}_{cor3}^i$, які прикладені до елементарної ділянки довжиною dr і шириною db , матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{cor1x}^i &= 2 \cdot \rho \cdot s \cdot d\varphi/dt \cdot d\psi/dt \cdot \sqrt{r^2 + (b \cos \theta)^2} \cdot \cos \psi \cdot \cos \varphi \cdot dr \cdot db; \\
 \Phi_{cor1y}^i &= 2 \cdot \rho \cdot s \cdot d\varphi/dt \cdot d\psi/dt \cdot \sqrt{r^2 + (b \cos \theta)^2} \cdot \cos \psi \cdot \sin \varphi \cdot dr \cdot db; \quad \Phi_{cor1z}^i = 0; \\
 \Phi_{cor2x}^i &= 2 \cdot \rho \cdot s \cdot d\varphi/dt \cdot d\theta/dt \cdot b \cdot (\sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \cos \psi - \cos \theta \cdot \sin \varphi) \cdot dr \cdot db; \\
 \Phi_{cor2y}^i &= 2 \cdot \rho \cdot s \cdot d\varphi/dt \cdot d\theta/dt \cdot b \cdot (\sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi + \cos \theta \cdot \cos \varphi) \cdot dr \cdot db; \quad \Phi_{cor2z}^i = 0; \\
 \Phi_{cor3x}^i &= -2 \cdot \rho \cdot s \cdot d\psi/dt \cdot \sin \varphi \cdot d\theta/dt \cdot b \cdot \sin \theta \cdot \sin \psi \cdot dr \cdot db; \\
 \Phi_{cor3y}^i &= 2 \cdot \rho \cdot s \cdot d\psi/dt \cdot \cos \varphi \cdot d\theta/dt \cdot b \cdot \sin \theta \cdot \sin \psi \cdot dr \cdot db; \\
 \Phi_{cor3z}^i &= -2 \cdot \rho \cdot s \cdot \left(\begin{aligned} &d\psi/dt \cdot \cos \varphi \cdot d\theta/dt \cdot b \cdot (\sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \cos \psi - \cos \theta \cdot \sin \varphi) + \\ &+ d\psi/dt \cdot \sin \varphi \cdot d\theta/dt \cdot b \cdot (\sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi + \cos \theta \cdot \cos \varphi) \end{aligned} \right) \cdot dr \cdot db.
 \end{aligned} \tag{17}$$

З метою дослідження впливу коріолісової сили інерції, яка виникає при обертанні лопатей навколо трьох осей, виведемо кінцевий вираз для сумарного інерційного навантаження Φ_{cor} на лопать та зведемо його до найпростішого вигляду за допомогою програмного комплексу МАТЕМАТИКА:

$$\Phi_{cor} = 2 \cdot \rho \cdot s \cdot \int_0^{RB/2} \int_0^0 \left[\begin{aligned} &\left(\begin{aligned} &d\varphi/dt \cdot d\psi/dt \cdot \sqrt{r^2 + (b \cos \theta)^2} \cdot \cos \psi \cdot \cos \varphi + \\ &+ d\varphi/dt \cdot d\theta/dt \cdot b \cdot (\sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \cos \psi - \cos \theta \cdot \sin \varphi) - \\ &- d\psi/dt \cdot \sin \varphi \cdot d\theta/dt \cdot b \cdot \sin \theta \cdot \sin \psi \end{aligned} \right)^2 + \\ &\left(\begin{aligned} &d\varphi/dt \cdot d\psi/dt \cdot \sqrt{r^2 + (b \cos \theta)^2} \cdot \cos \psi \cdot \sin \varphi + \\ &+ d\varphi/dt \cdot d\theta/dt \cdot b \cdot (\sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi + \cos \theta \cdot \cos \varphi) + \\ &+ d\psi/dt \cdot \cos \varphi \cdot d\theta/dt \cdot b \cdot \sin \theta \cdot \sin \psi \end{aligned} \right)^2 + \\ &\left(\begin{aligned} &d\psi/dt \cdot \cos \varphi \cdot d\theta/dt \cdot b \cdot (\sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \cos \psi - \cos \theta \cdot \sin \varphi) + \\ &+ d\psi/dt \cdot \sin \varphi \cdot d\theta/dt \cdot b \cdot (\sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi + \cos \theta \cdot \cos \varphi) \end{aligned} \right)^2 \end{aligned} \right] \cdot dr \cdot db. \tag{18}$$

Тепер запишемо проекції еквівалентного навантаження $\vec{\Phi}_\Sigma = \vec{\Phi} + \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_2 + \vec{\Phi}_T + \vec{\Phi}_{cor}$ на елементарні ділянки лопатей вітроколеса від дії інерційних та гравітаційних сил:

$$\Phi_{\Sigma x} = \rho \cdot s \cdot \left[\begin{aligned} &\sqrt{(r^2 + (b \cos \theta)^2)} \cdot \sin^2 \psi + (c \pm b \sin \theta)^2 \cdot \left(d^2\varphi/dt^2 \cdot \sin \varphi + (d\varphi/dt)^2 \cdot \cos \varphi \right) + \\ &+ \sqrt{r^2 + (b \cos \theta)^2} \cdot \left((d\psi/dt)^2 \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi - d^2\psi/dt^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi \right) - \\ &- b \cdot \left(\begin{aligned} &d^2\theta/dt^2 \cdot (\sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi + \cos \theta \cdot \cos \varphi) + \\ &+ (d\theta/dt)^2 \cdot (\cos \theta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi - \sin \theta \cdot \cos \varphi) \end{aligned} \right) + \\ &+ 2 \cdot \left(\begin{aligned} &d\varphi/dt \cdot d\psi/dt \cdot \sqrt{r^2 + (b \cos \theta)^2} \cdot \cos \psi \cdot \cos \varphi + \\ &+ d\varphi/dt \cdot d\theta/dt \cdot b \cdot (\sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \cos \psi - \cos \theta \cdot \sin \varphi) - \\ &- d\psi/dt \cdot \sin \varphi \cdot d\theta/dt \cdot b \cdot \sin \theta \cdot \sin \psi \end{aligned} \right) \end{aligned} \right] \cdot dr \cdot db; \tag{19}$$

$$\Phi_{\Sigma y} = \rho \cdot s \cdot \left[\begin{aligned} & \sqrt{(r^2 + (b \cos \theta)^2) \cdot \sin^2 \psi + (c \pm b \sin \theta)^2 \cdot \left((d\varphi/dt)^2 \cdot \sin \varphi - d^2\varphi/dt^2 \cdot \cos \varphi \right) +} \\ & + \sqrt{r^2 + (b \cos \theta)^2} \cdot \left(d^2\psi/dt^2 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \psi - (d\psi/dt)^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi \right) + \\ & + b \cdot \left(d^2\theta/dt^2 \cdot (\sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \cos \psi - \cos \theta \cdot \sin \varphi) + \right. \\ & \left. + (d\theta/dt)^2 \cdot (\cos \theta \cdot \cos \varphi \cdot \cos \psi + \sin \theta \cdot \sin \varphi) \right) + \\ & + 2 \cdot \left(d\varphi/dt \cdot d\psi/dt \cdot \sqrt{r^2 + (b \cos \theta)^2} \cdot \cos \psi \cdot \sin \varphi + \right. \\ & \left. + d\varphi/dt \cdot d\theta/dt \cdot b \cdot (\sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi + \cos \theta \cdot \cos \varphi) + \right. \\ & \left. + d\psi/dt \cdot \cos \varphi \cdot d\theta/dt \cdot b \cdot \sin \theta \cdot \sin \psi \right) \end{aligned} \right] \cdot dr \cdot db;$$

$$\Phi_{\Sigma z} = \rho \cdot s \cdot \left[\begin{aligned} & \sqrt{r^2 + (b \cos \theta)^2} \cdot \left(d^2\psi/dt^2 \cdot \sin \psi + (d\psi/dt)^2 \cdot \cos \psi \right) + \\ & + b \cdot \left(d^2\theta/dt^2 \cdot \sin \theta \cdot \sin \psi + (d\theta/dt)^2 \cdot \cos \theta \cdot \sin \psi \right) + g + \\ & + 2 \cdot \left(d\psi/dt \cdot \cos \varphi \cdot d\theta/dt \cdot b \cdot (\sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \cos \psi - \cos \theta \cdot \sin \varphi) + \right. \\ & \left. + d\psi/dt \cdot \sin \varphi \cdot d\theta/dt \cdot b \cdot (\sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi + \cos \theta \cdot \cos \varphi) \right) \end{aligned} \right] \cdot dr \cdot db.$$

Сумарне еквівалентне навантаження на елементарні ділянки лопатей можна визначити за наступною формулою:

$$\Phi_{\Sigma x} = \sqrt{(\Phi_{\Sigma x})^2 + (\Phi_{\Sigma y})^2 + (\Phi_{\Sigma z})^2}. \quad (20)$$

У зв'язку з громіздкими виразами для розрахунку $\Phi_{\Sigma x}$, $\Phi_{\Sigma y}$ і $\Phi_{\Sigma z}$ формулу (20) ми подали у загальному вигляді. За формулами (19) і (20) можна визначити сумарні еквівалентні навантаження від дії інерційних та гравітаційних сил на елементарні ділянки лопаті при їх обертанні навколо трьох осей: башти, вітроколеса та лопаті. Для прикладу наведемо на рис. 3 орієнтовну схему дії інерційних та гравітаційних сил на елементарну ділянку лопаті у горизонтальній площині Oxy . В даному випадку сили $\vec{\Phi}_{cor3}$, $\vec{\Phi}_T$ діятимуть у вертикальній площині (перпендикулярній до площини рисунка) і будуть напрямлені протилежно осі Oz .

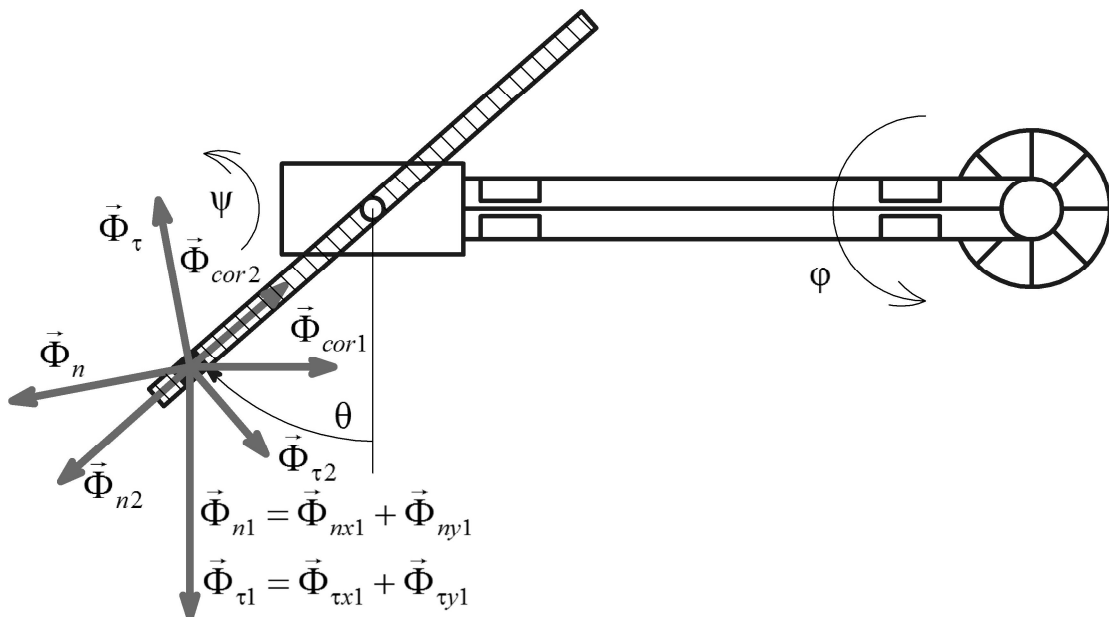


Рис. 3. Схема дії інерційних та гравітаційних сил у горизонтальній площині Oxy

Висновки. Математичне і комп'ютерне моделювання будь-яких машин і механізмів дозволяє уже на етапі проектування оцінювати відповідність конструкторських рішень очікуваним результатам, визначити оптимальні принципи і закони керування цими об'єктами в умовах змінного навантаження або не стаціонарності вхідних параметрів (наприклад, повітряного потоку для ВЕУ). У статті проаналізовано інерційні та гравітаційні навантаження тихохідного вітроколеса з використанням принципів класичної механіки (принцип Д'Аламбера, теорема Коріоліса, теорема про зміну кількості руху тощо). Подано відповідні рівняння, які дають можливість моделювати вказані сили у програмних комплексах. Розроблено математичну модель динаміки тихохідного вітроколеса, яка дозволяє визначати сумарні еквівалентні навантаження на елементарні ділянки лопатей при їх одночасному, неусталеному обертанні навколо трьох осей – башти гондоли і вітроколеса.

У подальших етапах дослідження планується зосереджувати увагу на процесах комп'ютерного моделювання роботи конкретних систем і елементів ВЕУ (руху лопатей, обертання вітроколеса, повороту гондоли за напрямком потоку повітря тощо), а також створювати експериментальні стенди для імітації режимів функціонування цих систем і елементів.

1. Гайдайчук В. Аналіз динаміки вітроенергетичних установок за інтегрованими розрахунковими схемами / В. Гайдайчук, В. Дегтярь, В. Носенко // Збірник наукових праць Національного транспортного університету. – 2009. – № 19, ч. 2. – С. 212-216.
2. Гайдайчук В. Динаміка вітроенергетичних установок під дією вітрових та інерційних навантажень / В. Гайдайчук, В. Носенко // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2008. – № 82. – С. 31-38.
3. Гвоздева И. Моделирование динамики ветроэнергетической установки большой мощности / И. Гвоздева, В. Миргород, О. Глазева // Електротехнічні та комп'ютерні системи. – 2010. – № 1 (77). – С. 53-57.
4. Голубенко Н. Исследование нагрузок на лопасть турбины электрической ветряной турбогенераторной установки / Н. Голубенко, А. Белогуров, С. Белогуров, А. Яцура // Вісник інженерної академії України. – 2008. – № 3-4. – С. 186-191.
5. Приходько А. Математическое моделирование аэродинамики и динамики вертикально-осевых ветроагрегатов / А. Приходько, Д. Редниц // Вісник Харківського національного університету. – 2005. – № 703. – С. 178-197.