О.В. Максимович
Луцький національний технічний університет

ДВОПЕРІОДИЧНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ АНІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИНОК ІЗ ТРІЩИНАМИ

Двоперіодичні задачі теорії пружності для анізотропних пластинок із тріщинами. У статті наведено алгоритм дослідження напруженого стану анізотропних пластинок, послаблених періодичною системою тріщин. У роботі для двоперіодичних задач отримано достатньо прості інтегральні рівняння, ядра в яких виражені через ядра одноперіодичних задач на основі яких виконано дослідження впливу анізотропії та взаємодії берегів на КІН для криволінійних тріщин. На прикладах показана ефективність алгоритму.

Двоперіодичним задачам для ізотропних пластинок присвячена значна кількість досліджень. Детальний їх огляд наведено в роботах [2, 5, 6]. У значно меншій мірі такі задачі вивчені для анізотропних матеріалів [7].

Безпосереднє розв'язування двоперіодичних задач на основі відповідних підходів, що використовуються для одноперіодичних задач може привести до помилкових розв'язків. Тому при застосуванні методу інтегральних рівнянь для розв'язування таких задач ядра будують на основі періодичних чи квазіперіодичних функцій Веєрштраса. При реалізації такого підходу виникають достатньо громіздкі вирази. В роботі для двоперіодичних задач отримано достатньо прості інтегральні рівняння, ядра в яких виражені через ядра одноперіодичних задач на основі яких виконано дослідження впливу анізотропії та взаємодії берегів на КІН для криволінійних тріщин.

Розглядається двоперіодична задача для нескінченної анізотропної пластинки, яка послаблена в основному періоді системою тріщин, що розміщені вздовж кривих L_j $(j=1,...,J)$. Приймемо, що пластинка перебуває під дією зосереджених сил (X_j, Y_j), $j=1,...,M$, прикладених у точках (a_j, b_j), прикладених до тріщини зусиль (X_T, Y_T), які приймаються однаковими на її протилежних берегах. Приймемо відомими середні напруження в основному періоді $<\sigma_x>, <\sigma_y>, <\tau_{xy}>$, та будемо враховувати контакт берегів тріщин.

Основні співвідношення для пружних анізотропних пластинок. Розглянемо довільну криву Γ, яка лежить в області D, що займає пластинка та виберемо на ній додатній напрямок обходу. Введемо вектор $\overrightarrow{S_\Gamma}$ на дотичній до кривої площинці, нормаль до якої розміщена справа відносно вибраного напрямку обходу. Проекції (X_Γ, Y_Γ) вектора $\overrightarrow{S_\Gamma}$ і похідні від переміщень (u,v) за дуговою координатою на кривій через комплексні потенціали Лехніцького визначаються за формулами [1,2]

$$Y_\Gamma = -2\,\mathrm{Re}\left[\Phi(z_1)z_1' + \Psi(z_2)z_2'\right],\quad X_\Gamma = 2\,\mathrm{Re}\left[s_1\Phi(z_1)z_1' + s_2\Psi(z_2)z_2'\right], \tag{1}$$
$$u' = 2\,\mathrm{Re}\left[p_1\Phi(z_1)z_1' + p_2\Psi(z_2)z_2'\right],\quad v' = 2\,\mathrm{Re}\left[q_1\Phi(z_1)z_1' + q_2\Psi(z_2)z_2'\right],$$

де $z_j = x + s_j y$, $u' = du/ds$, $v' = dv/ds$, $z_j' = dx/ds + s_j dy/ds$, $j = 1,2$; ds – диференціал дуги на Γ; s_j – корені характеристичного рівняння.

Вважаємо, що в співвідношеннях (1) на кривій Γ відомі функції $u', v', X_\Gamma, Y_\Gamma$. Тоді маємо [3]

$$\Phi(z_1) = \frac{-v' + s_1 u' + p_1 X_\Gamma + q_1 Y_\Gamma}{\Delta_1 z_1'},\quad \Psi(z_2) = \frac{-v' + s_2 u' + p_2 X_\Gamma + q_2 Y_\Gamma}{\Delta_2 z_2'}. \tag{2}$$

де $\Delta_1 = \alpha_{11}(s_1 - s_2)(s_1 - \overline{s_1})(s_1 - \overline{s_2})$, $\Delta_2 = \alpha_{11}(s_2 - s_1)(s_2 - \overline{s_1})(s_2 - \overline{s_2})$, α_{ij} – пружні сталі, які входять у закон Гука, $p_j = a_{11}s_j^2 + \alpha_{12} - \alpha_{16}s_j$, $q_j = \alpha_{12}s_j + \alpha_{22}/s_j - \alpha_{26}$.

Умови для комплексних потенціалів на граничних контурах. Приймемо, що відомі проекції (Y_L, X_L) та момент відносно початку координат M_L вектора всіх сил, які прикладені до граничного контуру *L*. Тоді отримуємо умови

$$\int_{L_1} \Phi(z_1)\,dz_1 = -\frac{p_1 X_L + q_1 Y_L}{\Delta_1}, \quad \int_{L_2} \Psi(z_2)\,dz_2 = -\frac{p_2 X_L + q_2 Y_L}{\Delta_2}, \tag{3}$$

$$\mathrm{Re}\left[\int_{L_1} z_1 \Phi(z_1)\,dz_1 + \int_{L_2} z_2 \Psi(z_2)\,dz_2\right] = -M_L / 2,$$

де L_j – криві в системах координат (x_j, y_j), в які при афінних перетвореннях $x_j = x + \mathrm{Re}(s_j)y,\ y_j = x + \mathrm{Im}(s_j)y$ переходить крива *L*.

Інтегральні рівняння задачі для нескінченної пластинки з тріщинами відносно стрибків переміщень. Для побудови інтегральних рівнянь стосовно до анізотропних пластинок з тріщинами, як правило, використовують інтегральні зображення, що містять стрибки комплексних потенціалів на берегах тріщин, які не мають безпосередньо механічного змісту. В той же час для ізотропних пластинок ці рівняння будують в основному на основі стрибків переміщень. Такі зображення значно спрощують дослідження та розв'язування задач про тріщини в пластинках. Зокрема, такі рівняння дають можливість розглядати задачі з врахуванням контакту берегів тріщин. Використаємо аналогічний підхід для дослідження НДС анізотропних пластинок з тріщинами.

На основі [1, 3] інтегральні зображення потенціалів для пластинки з тріщинами виберемо у вигляді

$$\Phi(z_1) = \int_L \frac{G_1'}{t_1 - z_1} ds + \Phi_S(z_1), \quad \Psi(z_2) = \int_L \frac{G_2'}{t_2 - z_2} ds + \Psi_S(z_2), \tag{4}$$

де $G_1' = A_1 g_1' + A_2 g_2'$, $G_2' = B_1 g_1' + B_2 g_2'$,

$$A_1 = -\frac{is_1}{2\pi\Delta_1}, \quad A_2 = \frac{i}{2\pi\Delta_1}, \quad B_1 = -\frac{is_2}{2\pi\Delta_2}, \quad B_2 = \frac{i}{2\pi\Delta_2}.$$

Зазначимо, що для внутрішніх тріщин

$$\int_L G_{1,2}'(s)\,ds = 0. \tag{5}$$

Позначимо періоди в основній системі координат через ω_1, ω_2. Перший із них будемо вважати дійсною величиною, а другий – комплексною. В допоміжних площинах z_k періоди будуть $\omega_{1,2}^{(k)}$, причому $\omega_1^{(k)} = \omega_1$, $\omega_2^{(k)} = x_\omega + s_k y_\omega$, $x_\omega + iy_\omega = \omega_2$, $y_\omega > 0$.

Для двоперіодичної задачі аналогічно до [2, 4] використаємо зображення

$$\Phi(z_1) = \int_L G_1'(s)\zeta(t_1 - z_1)\,ds + A_S, \quad \Psi(z_2) = \int_L G_2'(s)\zeta(t_2 - z_2)\,ds + B_S, \tag{6}$$

де $\zeta(z_k)$ – дзета-функція Вейерштрасса, побудована на періодах $\omega_1^{(k)}, \omega_2^{(k)}$, A_S, B_S – невідомі сталі.

Використовуючи умови (5) та те, що $\zeta(z_k + \omega_n^{(k)}) = \zeta(z_k) + \delta_n^{(k)}$, легко показати, що потенціали (3) є періодичними (а значить, періодичними будуть відповідні їм напруження і переміщення). Тут $\delta_n^{(k)} = 2\zeta(\omega_n^{(k)}/2)$. Водночас, потенціалам (6) (як і (4)) відповідають стрибки переміщень $g_1 + ig_2$ на кривій L.

Для визначення сталих A_s, B_s знайдемо вектор напружень, який діє на відрізках, паралельних основним періодам [2]. Будемо виходити із співвідношення для визначення проекцій вектора напружень, які діють на довільній дузі *AB*

$$Y_{AB} = -2\,\mathrm{Re}\left[\varphi(z_1) + \psi(z_2)\right]_{AB}, \quad X_{AB} = 2\,\mathrm{Re}\left[s_1\varphi(z_1) + s_2\psi(z_2)\right]_{AB}.$$

Покладемо, що AB – відрізок, паралельний до осі Ox. Використаємо

$$\varphi(z_1)_{AB} = \int_{z_1}^{z_1+\omega_1^{(1)}} \Phi(z_1)dz_1 = \int_L G_1'(s)\left(\int_{z_1}^{z_1+\omega_1^{(1)}} \zeta(t_1 - z_1)dz_1\right)ds + A_S\omega_1^{(1)},$$

Враховуючи, що [4]

$$\int_{z_1}^{z_1+\omega_1^{(1)}} \zeta(t_1 - z_1)dz_1 = \delta_1^{(1)}(t_1 - z_1) + const,$$

звідси отримуємо

$$\varphi(z_1)_{AB} = \delta_1^{(1)}\int_L G_1'(s)(t_1 - z_1)ds + A_S\omega_1^{(1)} = \delta_1^{(1)}\int_L G_1'(s)t_1 ds + A_S\omega_1^{(1)}.$$

Аналогічно маємо

$$\psi(z_2)_{AB} = \delta_1^{(2)}\int_L G_2'(s)t_2 ds + B_S\omega_1^{(2)}.$$

Таким чином знаходимо для нижньої межі основного паралелограма

$$Y_1 = -2\,\mathrm{Re}\left(\delta_1^{(1)}J_1 + \delta_1^{(2)}J_2 + A_S\omega_1^{(1)} + B_S\omega_1^{(2)}\right),$$

$$X_1 = 2\,\mathrm{Re}\left(s_1\delta_1^{(1)}J_1 + s_2\delta_1^{(2)}J_2 + A_S s_1\omega_1^{(1)} + B_S s_2\omega_1^{(2)}\right), \tag{7}$$

де $J_k = \int_L G_k'(s)t_k ds$.

Аналогічно знаходимо для правої межі основного паралелограма

$$Y_2 = -2\,\mathrm{Re}\left(\delta_2^{(1)}J_1 + \delta_2^{(2)}J_2 + A_S\omega_2^{(1)} + B_S\omega_2^{(2)}\right),$$

$$X_2 = 2\,\mathrm{Re}\left(s_1\delta_2^{(1)}J_1 + s_2\delta_2^{(2)}J_2 + A_S s_1\omega_2^{(1)} + B_S s_2\omega_2^{(2)}\right). \tag{8}$$

Величини зліва в (7) і (8) є відомими і дорівнюють

$$Y_1 = -\omega_1 < \sigma_y >, X_1 = -\omega_1 < \tau_{xy} >,$$

$$Y_2 = |\omega_2|\left(< \tau_{xy} > \cos\alpha - < \sigma_y > \sin\alpha\right), X_2 = |\omega_2|\left(< \sigma_x > \cos\alpha - < \tau_{xy} > \sin\alpha\right),$$

де $\alpha -$ кут між другим періодом ω_2 і віссю Oy.

Рівняння (7) і (8) розглядаємо як систему для знаходження сталих A_S, B_S.

Розглянемо спочатку рівняння (7) і перше рівняння (8)

$$-2\,\mathrm{Re}\left((A_S + B_S)\omega_1 + \delta_1^{(1)}J_1 + \delta_1^{(2)}J_2\right) = Y_1,$$

$$2\,\mathrm{Re}\left(\omega_1(s_1A_S + s_2B_S) + s_1\delta_1^{(1)}J_1 + s_2\delta_1^{(2)}J_2\right) = X_1,$$

$$-2\,\mathrm{Re}\left(x_\omega(A_S + B_S) + y_\omega(s_1A_S + s_2B_S) + \delta_2^{(1)}J_1 + \delta_2^{(2)}J_2\right) = Y_2$$

Із цих рівнянь маємо умову

$$2\,\mathrm{Re}\left[\left(\delta_1^{(1)}\omega_2^{(1)} - \delta_2^{(1)}\omega_1^{(1)}\right)J_1 + \left(\delta_1^{(2)}\omega_2^{(2)} - \delta_2^{(2)}\omega_1^{(2)}\right)J_2\right] = -x_\omega Y_1 + y_\omega X_1 + \omega_1 Y_2 = 0.$$

Враховуючи, що $\delta_1^{(k)}\omega_2^{(k)} - \delta_2^{(k)}\omega_1^{(k)} = 2\pi i$, звідси отримуємо

$$4\pi\,\mathrm{Re}\,i\left(J_1 + J_2\right) = 0.$$

Використавши те, що

$$2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\overset{j}{s_1}}{\Delta_1} + \frac{\overset{j}{s_2}}{\Delta_2}\right) = 0, \text{ при } j = 0,1,2,$$

отримуємо, що ця умова задовольняється тотожно.

Таким чином, для визначення сталих маємо три рівняння – рівняння (7) і друге рівняння (8). Розв'язок цієї системи шукаємо у вигляді

$$A_S = -\frac{\delta_1^{(1)}}{\omega_1} J_1 + \Phi_\infty + A,\ B_S = -\frac{\delta_1^{(2)}}{\omega_1} J_2 + \Phi_\infty + B,$$

де Φ_∞, Ψ_∞ – потенціали для суцільної пластинки, навантаженої на нескінченності зусиллями $<\sigma_x>, <\sigma_y>, <\tau_{xy}>$.

Тоді для визначення сталих *A, B* отримуємо систему

$$2\operatorname{Re}(A+B) = 0, \quad 2\operatorname{Re}(s_1 A + s_2 B) = 0, \quad 2\operatorname{Re}\left(As_1^2 + Bs_2^2\right) = -\frac{4\pi}{y_\omega \omega_1}\operatorname{Re} i(s_1 J_1 + s_2 J_2).$$

З цієї системи з точністю до величин, які не впливають на напруження знаходимо

$$A = -\frac{1}{y_\omega \omega_1 \Delta_1}\int_L g_1' t_1 ds,\ B = -\frac{1}{y_\omega \omega_1 \Delta_2}\int_L g_1' t_2 ds$$

Зобразимо [6]

$$\zeta(z) = \frac{\delta_1}{\omega_1} z + S(z;\omega_1,\omega_2),$$

де

$$S(z;\omega_1,\omega_2) = \frac{\pi}{\omega_1}\left\{\operatorname{ctg}\frac{\pi z}{\omega_1} + \sum_{n=1}^{N}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi z}{\omega_1} + n\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi z}{\omega_1} - n\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\right]\right\},$$

при $N \to \infty$.

Зазначимо, що при обчисленнях зручно користуватись формулою

$$S(z;\omega_1,\omega_2) = \lambda_1\left\{\operatorname{ctg}\lambda_1 z + 4\sin\left(2\lambda_1 z\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{(1-\lambda^n e^{2i\lambda_1 z})(1-\lambda^n e^{-2i\lambda_1 z})}\right\},$$

де $\lambda_1 = \dfrac{\pi}{\omega_1}, \lambda = exp\left(2\pi i\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)$, причому $|\lambda| < 1$.

Перепишемо отримані зображення у вигляді

$$\Phi(z_1) = \int_L\left[g_1'\Phi_1(t_1 - z_1) + g_2'\Phi_2(t_1 - z_1)\right]ds + \Phi_\infty,$$

$$\Psi(z_2) = \int_L\left[g_1'\Psi_1(t_2 - z_2) + g_2'\Psi_2(t_2 - z_2)\right]ds + \Psi_\infty, \qquad (9)$$

де

$$\Phi_1(z) = A_1\left[S_1(z) + \frac{\gamma}{s_1}z\right],\ \Psi_1(z) = B_1\left[S_2(z) + \frac{\gamma}{s_2}z\right], \Phi_2(z) = A_2 S_1(z),\ \Psi_2(z) = B_2 S_2(z),$$

$S_k(z) = S(z;\omega_1,\omega_2^{(k)})$, $\gamma = \dfrac{2\pi i}{y_\omega \omega_1}$.

Ядра в інтегральних представленнях (9) зображені у вигляді суми ядер для одноперіодичних задач та мають додаткові складові, які містять множник γ. Зазначимо, що в літературі були спроби будувати у вигляді суми аналогічні представлення безпосередньо. Очевидно, що такі підходи є некоректними.

Результати розрахунків. Зображення (9) мають такий же вигляд, як і отримані для інших задач теорії пружності для анізотропних пластинок з тріщинами [1, 3]. У зв'язку з цим для знаходження стрибків переміщень, що входять у них, і далі напружень біля тріщин може бути застосований числовий алгоритм, розроблений в [3]. При обчисленнях для ядра інтегральних рівнянь зручно користуватись формулою

$$S(z;\omega_1,\omega_2) = \lambda_1\left\{\operatorname{ctg}\lambda_1 z + 4\sin\left(2\lambda_1 z\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{(1-\lambda^n e^{2i\lambda_1 z})(1-\lambda^n e^{-2i\lambda_1 z})}\right\},$$

де $\lambda_1 = \dfrac{\pi}{\omega_1}, \lambda = exp\left(2\pi i\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)$, причому $|\lambda| < 1$.

Цей ряд швидкозбіжний. Зокрема, для ізотропного матеріалу за квадратної гратки в ньому достатньо утримувати два члени.

З метою тестування виконані розрахунки КІН для випадку прямокутної решітки, коли прямолінійна тріщина півдовжиною l розміщена симетрично. Знайдені КІН за одностороннього розтягу перпендикулярно тріщині та зсуву для ізотропної пластинки відрізняються від відповідних даних, що наведені в довіднику [5] (табл.2.19, 2.20) на четвертій-п'ятій значущій цифрі.

Розраховані відносні КІН $F_I = K_I / (p\sqrt{\pi l})$ залежно від довжини тріщини (параметру $\lambda = 2l/\omega_1$) за поперечного розтягу зусиллями p для пластинки з істотно анізотропним матеріалом CF1 при армуванні в напрямку осі Oy наведено на рис.1. Штриховим лініям відповідає випадок квадратної решітки ($\omega_2 = \omega_1$), а суцільним - прямокутної при $\omega_2 = \omega_1 / 2$.

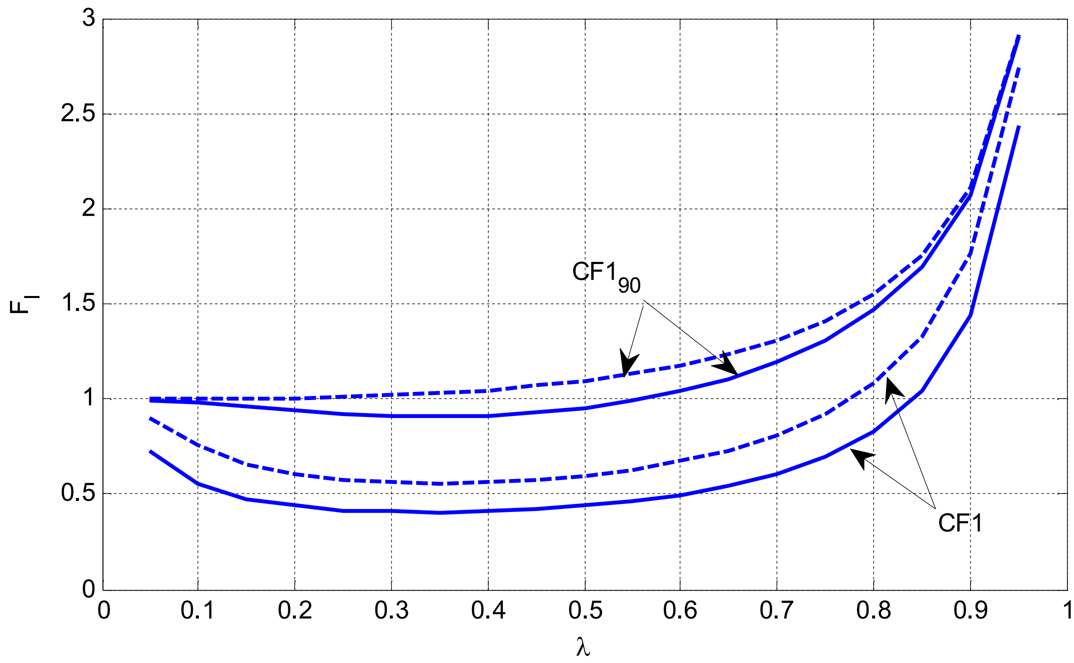

Рис.1. Відносні КІН $F_I = K_I / (p\sqrt{\pi l})$ залежно від довжини тріщини (параметру $\lambda = 2l/\omega_1$) за поперечного розтягу зусиллями p.

На рис.1 наведено також результати розрахунків для цього ж матеріалу, коли його напрямок максимальної жорсткості паралельний осі Ox (криві з позначкою $CF1_{90}$). Ці результати практично збігаються із даними розрахунків для ізотропного матеріалу [5]. Звідси випливає, що за двоперіодичного розміщення тріщин анізотропія мало впливає на КІН, якщо тріщини паралельні напрямку з максимальною жорсткістю матеріалу. У випадку, коли тріщини розміщені перпендикулярно до армованого матеріалу КІН істотно зменшуються (до двох разів при $\lambda > 0{,}1$), тобто відбувається "зміцнення матеріалу".

Розглянуто пластинку з нахиленими під кутом α до осі Ox тріщинами, центри яких утворюють правильну трикутну решітку за двостороннього розтягу у взаємно перпендикулярних напрямках зусиллями p і q, перші з яких напрямлені під кутом γ до осі Ox. Результати розрахунків добре узгоджуються із даними, які отримуються на основі розкладу в ряд за параметром $\lambda = \dfrac{2l}{\omega_1}$ [4, 5]. При $\lambda < 0{,}3$ у розрахованих різними способами КІН перші чотири значущі цифри збігались. Достатньо точні результати отримуються також і при $\lambda < 0{,}7$.

Наприклад, наведемо значення відносних КІН для тріщини, нахиленої під кутом 30^0. У таблиці 1 наведено відносні КІН за розтягу в напрямку осі Oy зусиллями p (величини $F_{I,II} = K_{I,II} / (p\sqrt{\pi l})$), та за зсуву зусиллями τ (величини $F_{I,II} = K_{I,II} / (\tau\sqrt{\pi l})$). В цій же таблиці наведено відповідні величини (із хвильками наверху), які розраховані за наближеними формулами [5]

Таблиця 1

. Значення відносних КІН для тріщини в ізотропній пластинці, нахиленої під кутом 30^{0}.

λ	F_I	F_{II}	$\tilde{F}_I$	$\tilde{F}_{II}$	$-F_I$	$\tilde{F}_{II}$	$-\tilde{F}_I$	F_{II}
	Розтяг				Зсув			
0,05	0,751	0,433	0,751	0,433	0,868	0,500	0,868	0,500
0,1	0,755	0,434	0,755	0,434	0,872	0,501	0,872	0,501
0,2	0,772	0,437	0,772	0,436	0,891	0,504	0,891	0,504
0,3	0,804	0,439	0,804	0,439	0,928	0,507	0,928	0,507
0,4	0,856	0,441	0,856	0,441	0,989	0,509	0,988	0,509
0,5	0,937	0,441	0,937	0,439	1,082	0,509	1,082	0,507
0,6	1,056	0,437	1,058	0,432	1,220	0,505	1,222	0,499
0,7	1,217	0,434	1,233	0,418	1,405	0,500	1,424	0,483
0,8	1,407	0,436	1,477	0,396	1,624	0,503	1,705	0,457
0,9	1,589	0,449	1,811	0,366	1,835	0,519	2,091	0,423
0,95	1,663	0,462	2,018	0,349	1,920	0,533	2,330	0,404

Аналогічні результати для матеріалу CF1 наведені в таблиці 2.

Таблиця 2.

Відноснії КІН для тріщини в пластинці з матеріалу CF1, нахиленої під кутом 30^{0}.

λ	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	$-F_I$	F_{II}	$-F_I$	F_{II}
	CF1		$CF1_{90}$		CF1		$CF1_{90}$	
	Розтяг				Зсув			
0,05	0,739	0,426	0,755	0,430	0,861	0,505	0,857	0,480
0,1	0,714	0,411	0,766	0,426	0,852	0,515	0,836	0,431
0,2	0,687	0,394	0,799	0,426	0,849	0,532	0,796	0,324
0,3	0,733	0,421	0,843	0,439	0,889	0,526	0,784	0,249
0,4	0,897	0,514	0,900	0,461	0,999	0,476	0,798	0,199
0,5	1,344	0,768	0,975	0,487	1,289	0,319	0,832	0,166
0,6	2,355	1,280	1,067	0,515	2,099	0,081	0,885	0,144
0,7	2,560	1,281	1,167	0,542	2,460	0,141	0,947	0,131
0,8	2,579	1,196	1,262	0,571	2,652	0,105	1,012	0,127
0,9	2,586	1,112	1,342	0,607	2,818	0,053	1,073	0,128
0,95	2,597	1,078	1,375	0,628	2,901	0,028	1,100	0,131

Розглянуто систему чотирьох тріщин, які розміщено у квадратній гратці. Центри тріщин в основному періоді розміщено симетрично у точках $(\pm\omega_1/4, \pm\omega_1/4)$, півдовжина тріщин $-\omega_1/8$. Кути нахилу тріщин вибирались випадковими і дорівнювали $0.3171\pi/2$, $0.9502\pi/2$, $0.0344\pi/2$, $0.4387\pi/2$. Розраховані відносні КІН при всесторонньому розтягу пластинки для ізотропного і анізотропного матеріалу CF1 наведено в таблиці 3.

Таблиця 3.

Розраховані відносні КІН за всестороннього розтягу

	F_{IA}	$F_{II\,A}$	F_{IB}	F_{IIB}	F_{IA}	$F_{II\,A}$	F_{IB}	F_{IIB}	F_{IA}	$F_{II\,A}$	F_{IB}	F_{IIB}
№	Ізотропія				CF1				$CF1_{90}$			
1	1,167	0,047	1,167	0,047	0,848	-0,109	0,848	-0,109	0,859	0,390	0,859	0,390
2	1,154	0,006	1,154	0,006	1,032	-0,061	1,032	-0,061	0,751	0,032	0,751	0,032
3	1,273	-0,055	1,273	-0,055	0,806	-0,037	0,806	-0,037	1,165	-0,038	1,164	-0,037
4	1,209	-0,162	1,209	-0,162	0,744	-0,406	0,744	-0,406	1,037	0,047	1,037	0,047

Із таблиці 3 видно, що КІН для кожної із тріщин виявились однаковими для обох вершин (що можна було передбачити, оскільки така задача має відповідні осі симетрії).

Із таблиць 1 і 2 випливає, що за зсуву отриманий розв’язок може виявитись некоректним, оскільки КІН F_I є від’ємними, в зв’язку з чим поставлену задачу необхідно розв’язувати із врахуванням контакту берегів тріщин. Модифікований на випадок контакту берегів тріщин алгоритм розв’язування задачі наведений в [3]. Виконаємо із його застосуванням розрахунки стосовно до тріщини, що розміщена вздовж дуги параболи $y = k(x^2 / l^2 - 1)$ при $-l \le x \le l$. Знайдені відносні КІН $F_{I,II} = K_{I,II} / (p\sqrt{\pi l})$ при $k = 1$ з та без врахування контакту берегів для ізотропної пластинки наведено в таблиці 4. Тут величини із індексом А відносяться до лівої вершини тріщини, а з індексом В – до правої.

Таблиця 4.

Відносні КІН для тріщини, що розміщена вздовж дуги параболи

ω_1 / l	F_{IA}	$F_{II\,A}$	F_{IB}	F_{IIB}	F_{IA}	$F_{II\,A}$	F_{IB}	F_{IIB}
	Без врахування контакту				Врахування контакту			
2,5	1,782	0,880	-1,782	0,880	1,684	0,434	0	0,941
3	1,394	0,709	-1,394	0,709	1,340	0,412	0	0,783
3,5	1,249	0,638	-1,250	0,638	1,207	0,395	0	0,717
4	1,174	0,599	-1,175	0,599	1,137	0,384	0	0,681
4,5	1,129	0,575	-1,129	0,575	1,095	0,376	0	0,659
5	1,098	0,558	-1,098	0,558	1,066	0,371	0	0,644
5,5	1,077	0,547	-1,077	0,547	1,046	0,366	0	0,633
6	1,061	0,538	-1,061	0,538	1,032	0,363	0	0,626
6,5	1,048	0,532	-1,049	0,532	1,021	0,360	0	0,620
7	1,039	0,527	-1,039	0,527	1,012	0,358	0	0,615

Розрахунки показали, що контакт берегів мав місце в околі правої вершини на приблизно третині її довжини. Із таблиці видно істотний вплив врахування контакту берегів тріщини на КІН. Результати аналогічних розрахунків для анізотропного матеріалу CF1 наведено в таблиці 5.

Таблиця 5.

Відносні КІН для тріщини, що розміщена вздовж дуги параболи

ω_1 / l	F_{IA}	$F_{II\,A}$	F_{IB}	F_{IIB}	F_{IA}	$F_{II\,A}$	F_{IB}	F_{IIB}	F_{IB} / F_{IIB}
	CF1				$CF1_{90}$				
2,5	1,028	-0,604	0,162	0,393	1,633	-0,495	-0,525	0,605	-0,867
3	0,880	-0,394	0,065	0,157	1,399	-0,372	-0,560	0,521	-1,075
3,5	0,826	-0,326	0,025	0,061	1,303	-0,317	-0,533	0,495	-1,075
4	0,799	-0,298	0,003	0,007	1,253	-0,283	-0,520	0,484	-1,075
4,5	0,784	-0,286	-0,012	-0,028	1,221	-0,260	-0,514	0,478	-1,075

5	0,775	-0,281	-0,021	-0,052	1,201	-0,243	-0,510	0,474	-1,075
5,5	0,769	-0,280	-0,028	-0,069	1,187	-0,230	-0,507	0,472	-1,075
6	0,766	-0,282	-0,033	-0,081	1,177	-0,219	-0,505	0,470	-1,075
6,5	0,764	-0,284	-0,037	-0,089	1,170	-0,211	-0,503	0,468	-1,075
7	0,763	-0,288	-0,039	-0,095	1,165	-0,203	-0,501	0,466	-1,075

У всіх випадках мав місце контакт берегів тріщин в околі правої вершини, за винятком матеріалу $CF1_{90}$ при $\omega_1 / l = 2,5$, для якого береги контактували правіше центру тріщини. Із таблиці 5 видно, що за контакту берегів біля вершини тріщини КІН K_{IB} для анізотропного матеріалу (на відміну від ізотропного) виявилися відмінними від нуля, причому для матеріалу $CF1_{90}$ КІН є достатньо великими. Для обгрунтування такого явища наведемо значення стрибків берегів тріщин біля вершини в напрямку нормалі до дотичної [1]

$$[u_n] = 4a_{11} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}} \left(u_{11} K_I + u_{12} K_{II}\right), \tag{10}$$

де r – відстань від вершини, $u_{11} = -\mathrm{Re}\left[i\left(s_1 - \overline{s_2}\right) g_2 \overline{g_1}\right]$, $u_{12} = \mathrm{Re}\left[i\left(s_1 - \overline{s_2}\right) d_2 \overline{g_1}\right]$,

$d_j = \cos\varphi + s_j \sin\varphi$, $g_j = \sin\varphi - s_j \cos\varphi$, φ – кут між дотичною до тріщини у вершині і віссю Ox. Зазначимо, що для ортропного матеріалу, для якого $s_j = i\beta_j$

$$u_{11} = (\beta_1 + \beta_2)\cos^2\varphi(k^2 + \beta_1\beta_2), \quad u_{12} = -(\beta_1 + \beta_2)\cos^2\varphi k(1 - \beta_1\beta_2) .$$

Звідси випливає, що за контакту берегів тріщини біля вершини справедлива умова

$$\frac{K_I}{K_{II}} = -\frac{u_{12}}{u_{11}} . \tag{11}$$

Для випадку матеріалу $CF1_{90}$ $k = 2,\ u_{12} / u_{11} = 1,0751$. В таблиці 4 в останньому стовпчику наведене знайдене відношення КІН. Тобто, умова контакту берегів (11) виконується із високою точністю. Із умови (10) випливає, що для відсутності контакту біля берегів вершини необхідно виконання умови $u_{11}K_I + u_{12}K_{II} > 0$. Хоча знайдене значення F_{IB} при $\omega_1 / l = 2,5$ і є від'ємним, однак ця умова задовольняється, що також узгоджується із наведеним вище числовим розв'язком, згідно якого контакт берегів тут відсутній.

Висновок. Побудовано в простому вигляді інтегральні рівняння двоперіодичної задачі теорії пружності для анізотропної пластинки із тріщинами, які уточнюють відомі співвідношення, що грунтувались на відповідних розв'язках одноперіодичних задач. Досліджено вплив анізотропії на КІН для прямолінійних та криволінійних тріщин, в тому числі за врахування контакту берегів. Обгрунтовано за анізотропії можливість виникнення ненульових КІН K_I в околі вершини, біля якої береги контактують.

1. Божидарник В.В. Двовимірні задачі теорії пружності й термопружності структурнонеоднорідних тіл / В.В. Божидарник // Львів: Світ, 1998. – С. 352.
2. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. Регулярные кусочно-однородные структуры с дефектами. – М.: Физ.-мат. гиз, 1994.–С. 336.
3. Максимович О. Розрахунок напруженого стану анізотропних пластинок з отворами і криволінійними тріщинами при врахуванні контакту їхніх берегів/ О. Максимович. // Вісник Тернопільського державного технічного університету. –2009. №3, –С. 36-42.
4. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М.П. Саврук // К.: Наук. думка, 1981. – С. 324.
5. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / М.П. Саврук // К.: Наук. думка, 1988. – С. 620.
6. Сулим Г. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г. Сулим // ІППММ НАН України, Львівський національний університет ім.Ів.Франка. – 2007. – С. 716.