УДК 539.3
Я.В.Максимович
Луцький національний технічний університет

НАПРУЖЕННЯ БІЛЯ ТРІЩИН У ОБМЕЖЕНИХ ПЛАСТИНКАХ ІЗ ЗАЛИШКОВИМИ ДЕФОРМАЦІЯМИ ЗА ВРАХУВАННЯ КОНТАКТУ ЇХ БЕРЕГІВ

Напруження біля тріщин у обмежених пластинках із залишковими деформаціями за врахування контакту їх берегів. Запропоновано алгоритм визначення напруженого стану пластинок з тріщинами, зумовленого залишковими деформаціями за врахування контакту їх берегів. Для визначення залишкових напружень у пластинках використано розрахунково-експериментальний метод Підстригача-Осадчука. Встановлено, що нехтування контактом берегів тріщин може привести до істотних похибок при знаходженні КІН за дії залишкових напружень. КІН може досягати максимальних значень для зміщених відносно центру шва тріщин.

При зварюванні, проведенні різних технологічних операцій в елементах конструкцій виникають напруження, зумовлені залишковими деформаціями. Ці напруження можуть бути сумірні із напруженнями, які зумовлені експлуатаційними навантаженнями, а тому їх необхідно враховувати при проведенні розрахунків на міцність та довговічність. В роботі запропоновано алгоритм визначення напружень біля тріщин у пластинках, зумовлених залишковими деформаціями. Для визначення залишкових напружень у пластинках використано розрахунково-експериментальний метод [4]. Враховуючи, що залишкові напруження можуть бути в окремих областях стискувальними, врахована можливість контакту берегів тріщин. Зазначимо, що в літературі, як правило, аналогічні дослідження проводять без врахування контакту берегів тріщин, що може привести до некоректних результатів.

Визначення залишкових напружень у суцільних пластинках. Розглянемо задачу визначення напруженого стану пластинки, зумовленого залишковими (початковими) деформаціями $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ за умови, що її межа вільна від навантаження. Для цього використаємо закон Гука

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right),\ \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right),\ \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + \frac{1}{G}\tau_{xy}, \tag{1}$$

де $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ – повні деформації, які задовольняють умовам сумісності деформацій

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0\,. \tag{2}$$

Напруження в пластинці $\sigma_x, \sigma_y, \gamma_{xy}$ задовольняють рівнянням рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0\,,\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0\,. \tag{3}$$

Розглянемо детальніше випадок, який стосується пластинок з прямолінійним зварним швом, що розміщений вздовж осі *Oy*. Залишкові деформації в цьому випадку в літературі приймають відмінними від нуля при $|x| < d$ у вигляді

$$\overset{0}{\varepsilon_x} = C_x f(x),\ \overset{0}{\varepsilon_y} = C_y f(x),\ \overset{0}{\gamma_{xy}} = 0\ , \tag{4}$$

де $f(x)$ – відома функція, $C_x = -\frac{S_x}{E},\ C_y = -\frac{S_y}{E},\quad S_x = k_x\sigma_T,\ S_y = k_y\sigma_T,\ k_x, k_y$ –безрозмірні параметри, σ_T –межа текучості, d – ширина пластичної зони.

Тут розглянуто характерний для зварювання випадок, коли залишкові деформації є від'ємними. Зокрема, в [4] приймали

$$f(x) = 1 + a_0\left(\frac{x}{d}\right)^2 - (3 + 2a_0)\left(\frac{x}{d}\right)^4 + (2 + a_0)\left(\frac{x}{d}\right)^6, \tag{5}$$

©Я.В. Максимович

де a_0 – стала, яка лежить на проміжку *[0,2]*. В даному випадку у опис початкових деформацій входять чотири параметри d, a_0, k_x, k_y, які необхідно визначити так, щоби знайдені розрахунковим і експериментальними методами напруження мало відрізнялись між собою.

Розв'язок задачі зобразимо у вигляді суми часткового та корегувального складових.

Частковий розв'язок. За частковий розв'язок приймемо $\sigma_x = 0,\ \varepsilon_y = 0,\ \tau_{xy} = 0, \gamma_{xy} = 0$. Тоді з другої формули (1) маємо $\sigma_y = -E\overset{0}{\varepsilon}_y$, а далі з першої формули знаходимо $\varepsilon_x = \overset{0}{\varepsilon}_x + \nu\overset{0}{\varepsilon}_y$.

Таким чином, отримуємо частковий розв'язок для напружень і деформацій у вигляді

$$\sigma_x = 0,\ \ \sigma_y = -EC_y f(x) = S_y f(x),\ \tau_{xy} = 0, \tag{6}$$

$$\varepsilon_x = (C_x + \nu C_y) f(x),\ \ \varepsilon_y = 0,\ \ \gamma_{xy} = 0. \tag{7}$$

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що напруження (6) задовольняють рівняння рівноваги (3), а деформації (7) – рівняння сумісності (2).

Вектор напружень (X_0, Y_0) на довільній площинці, що відповідає частковому розв'язку, визначається за формулами

$$X_0 = 0,\ Y_0 = \sigma_y \sin\gamma, \tag{8}$$

де γ – кут між віссю *Ox* і перпендикуляром до площинки.

Корегувальний розв'язок. Для його знаходження необхідно розглянути задачу теорії пружності для заданої пластинки, до границі якої прикладено знайдені вище зусилля з протилежним знаком $X = 0, Y = -S_y f(x)\sin\gamma$.

Приймемо, що відомі вирази для комплексні потенціали для пластинки з вільною межею, яка навантажена системою сил (X_k, Y_k), прикладених в точках z_k, $k = 1,...,K$ (для обмеженої пластинки сили повинні бути самозрівноваженими). Запишемо ці потенціали у вигляді

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{K} \Phi_0(z, z_k, X_k, Y_k),\ \Psi(z) = \sum_{k=1}^{K} \Psi_0(z, z_k, X_k, Y_k), \tag{9}$$

де $\Phi_0(z, z_k, X_k, Y_k),\ \Psi_0(z, z_k, X_k, Y_k)$ – відомі функції.

Розглянемо випадок, коли прикладені до границі зусилля є розподіленими на дузі *AB* і дорівнюють $X(t), Y(t)$. Тоді комплексні потенціали, що відповідають цьому навантаженню будуть

$$\Phi(z) = \int_{AB} \Phi_0\big(z, t, X(t), Y(t)\big)ds,\ \Psi(z) = \int_{AB} \Psi_0\big(z, t, X(t), Y(t)\big)ds, \tag{10}$$

Враховуючи, що $X = 0, Y = -S_y f(x)\sin\gamma$, маємо

$$\Phi(z) = S_y \int_{AB} \Phi_0\big(z, t, 0, 1\big) f(\xi)d\xi,\ \Psi(z) = S_y \int_{AB} \Psi_0\big(z, t, 0, 1\big) f(\xi)d\xi,$$

де $\xi = \mathrm{Re}\, t$. Тут використано те, що функції $\Phi_0(z, t, X, Y)$, $\Psi_0(z, t, X, Y)$ є лінійними відносно змінних X, Y та $\sin\gamma = -dx / ds$.

Ці потенціали у внутрішніх точках пластинки, для яких підінтегральні функції є гладкими, можуть бути обчислені з використанням відомих квадратурних формул. Зокрема, приймемо, що рівняння границі записано в параметричному вигляді $z = \omega(\theta),\ 0 < \theta \le 2\pi$. Використовуючи квадратурну формули прямокутників, яка для періодичних гладких функцій є підвищеної точності, маємо

$$\Phi(z) = hS_y \sum_{n=1}^{M} \Phi_0\big(z, t_n, 0, 1\big) f(x_n) x'(\theta_n), \qquad \Psi(z) = hS_y \sum_{n=1}^{M} \Psi_0\big(z, t_n, 0, 1\big) f(x_n) x'(\theta_n),$$

де $h = 2\pi / M$, $\theta_n = nh$, $t_n = \omega(\theta_n)$, $x_n = \mathrm{Re}\, t_n, x'(\theta) = \mathrm{Re}\big(\omega'(\theta)\big)$.

При знаходженні напружень σ_θ (кільцевих) на межі пластинки достатньо обчислити тільки функцію Φ, оскільки тут $\sigma_\theta + N = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z)$, де $N + iT = (X + iY)\dfrac{ds}{dt}$. Підінтегральна функція в околі прикладеної в точці t границі зосередженої сили (X, Y) має особливість вигляду

$$\Phi_0(z,t,X,Y) \sim \frac{(X+iY)}{2\pi(t-z)},$$

Тому зобразимо $\Phi_0(z,t,0,1) = -\dfrac{1}{2\pi i(t-z)} + F(t,z)$, де F – регулярна функція.

Тоді після граничного переходу, використовуючи формулу Племеля–Сохоцького, для точок на межі отримуємо

$$\sigma_\theta = N + 4\,\mathrm{Re}\,\tilde{\Phi}(z),\ N = -S_y f(x)\left(dx/ds\right)^2,$$

де $\tilde{\Phi}(z)$ - дорівнює функції Φ, в якій інтеграл Коші розглядається в сенсі головного значення. Для обчислення цього інтегралу можуть бути використані відомі квадратурні формули.

Результати розрахунків. Розглянемо прямокутну пластинку з півсторонами a і b із залишковими деформаціями (4), (5) при $b/a = 1{,}4$, $d/a = 0{,}3$, $a_0 = 0$. Комплексні потенціали Φ_0, Ψ_0 визначались у замкненому вигляді на основі методу Мусхелішвілі із використанням конформного відображення області, яку займає пластинка на круг одиничного радіуса [1, 3]. Відображальну функцію розкладали в ряд Тейлора, в якому далі утримували до ста членів. На рис. 1 зліва наведено розподіл знайдених залишкових відносних напружень σ_y / S_y у перерізах $y = 0,\ 0{,}5a,\ a,\ 1{,}3a$, причому біля кривих наведено значення y/a.

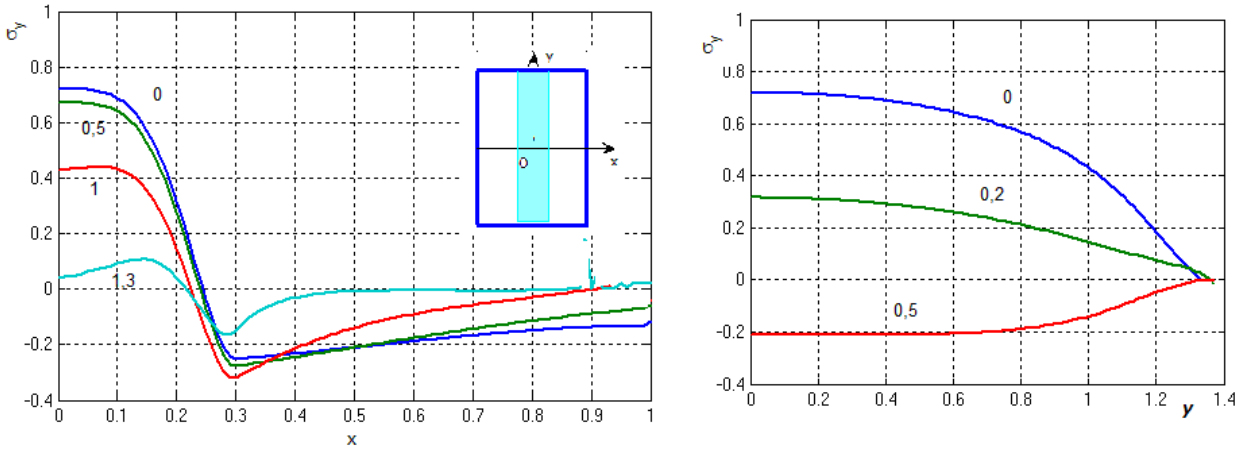

Рис.1. Розподіл залишкових відносних напружень σ_y / S_y

Результати розрахунків відносних напружень σ_y / S_y в перерізах $x = ma$ при $m = 0,\ 0{,}2,\ 0{,}5$ залежно від координати y наведено на рис.1 справа.

Наведені графіки практично збігаються із даними розрахунків, які отримані в [4] для даної задачі іншим методом.

Виконаний розрахунок залишкових напружень в прямокутній пластинці при $b/a = 1{,}5$ коли розподіл залишкових деформацій має вигляд $f(x) = \sqrt{1 - x^2/d^2}$ показав також повну збіжність результатів розрахунку із даними [4], які отримані іншими методами.

Залишкові напруження в півплощині та смузі. Розглянемо півплощину $y<0$ з вільною від навантаження границею. На основі півплощини доцільно моделювати розподіл залишкових напружень у пластинці великих розмірів у околі шва біля межі. Знаходження корегувального розв'язку зводиться до розгляду півплощини, яка знаходиться під дією навантаження $p(x) = \sigma_y(x,0) - i\tau_{xy}(x,0) = -S_y f(x)$, причому $p \neq 0$ при $-d < x < d$. Комплексні потенціали для цього випадку визначаються за формулами [3]

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-d}^{d}\frac{p(t)dt}{z-t},\ \Omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-d}^{d}\frac{\overline{p(t)}dt}{z-t},$$

причому $\Psi(z)=\Omega(z)-z\Phi'(z)-\Phi(z)$.

Нехай $f(x)=1-x^2/d^2$. В цьому випадку

$$\Phi(z)=\frac{C}{2\pi i d^2}\left[\left(z^2-d^2\right)L(z,d)+2dz\right],\ \Phi'(z)=\frac{C}{2\pi i d^2}\left[2zL(z,d)+4d\right],$$

$$\Omega(z)=\frac{\overline{C}}{2\pi i d^2}\left[\left(z^2-d^2\right)L(z,d)+2dz\right],$$

де $L(z,d)=\ln\frac{z-d}{z+d}$, $C=-S_y$.

Додаючи частковий і корегувальні складові, отримуємо розв'язок задачі про залишкові напруження в півплощині.

Розглянемо смугу $-H<y<0$. Комплексні потенціали для смуги зобразимо у вигляді

$$\Phi(z)=\Phi_p(z)+\Phi_\Delta(z),\ \Omega(z)=\Omega_p(z)+\Omega_\Delta(z),$$

де $\Phi_p(z),\Omega_p(z)$ – потенціали для півплощини $y<0$, навантаженої зусиллями, що прикладені до смуги при $y=0$. Вирази для потенціалів $\Phi_\Delta(z),\Omega_\Delta(z)$, які при $y>-H$ визначаються через інтеграли від гладких функцій, наведено в [5].

Для прикладу проведені розрахунки напружень у смузі, зумовлених залишковими деформаціями при $\varepsilon_y^0=-S_y(1-x^2/d^2)/E$. Розраховані напруження $\sigma_y,\sigma_x,\tau_{xy}$, які віднесені до величини S_y залежно від відносної координати x/d при *d/H=0.05* наведені на рис.2. Номерам *0, 1, 2, 3, 4, 5* біля кривих відповідають перерізи *y=-0.1jd* при *j=0, 1, 2, 3, 4, 5.*

Знайдені напруження при $d/H=0{,}1$ добре узгоджуються із даними для прямокутної пластинки із рис. 1.

На рис. 3 наведено розподіл відносних напружень σ_x/S_y (а) та σ_y/S_y (б) при *x=0,* $-H/2<y<0$ залежно від ширини зони розподілу початкових деформацій. Тут кривим 0,...,5 відповідають значення $d/H=0.05,0.1,0.25,0.5,0.75,1$.

Знаходження КІН в прямокутній пластинці з залишковими напруженнями. Розглянемо тепер випадок, коли у пластинці із залишковими напруженнями виникла прямолінійна тріщина півдовжиною d із центром в точці (x_c,y_c), яка нахилена під кутом α до осі Ox. Напруження у такій пластинці зобразимо у вигляді суми напружень у суцільній пластинці із залишковими деформаціями та напружень, які відповідають корегувальному розв'язку. Позначимо вектор напружень у суцільній пластинці на лінії, на якій лежить тріщина через (X_L,Y_L). Тоді для знаходження корегувального розв'язку розглядаємо задачу теорії пружності для пластинки із тріщиною, до берегів якої прикладено зусилля $(-X_L,-Y_L)$. Будемо розглядати також випадок, коли береги тріщини при цьому можуть контактувати. Тоді вказані вище зусилля будуть прикладені тільки на ділянках тріщини, де контакт відсутній, а в області контакту приймаємо, що

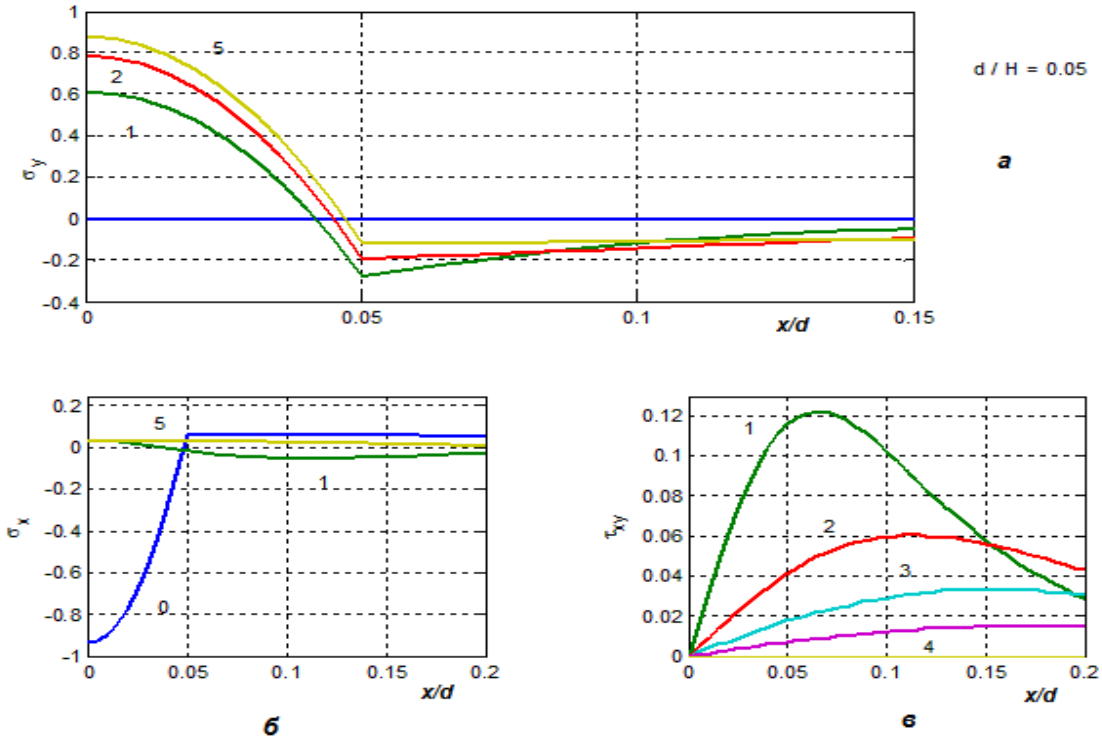

Рис.2. Напруження $\sigma_y, \sigma_x, \tau_{xy}$, які віднесені до величини S_y при *d/H=0.05*

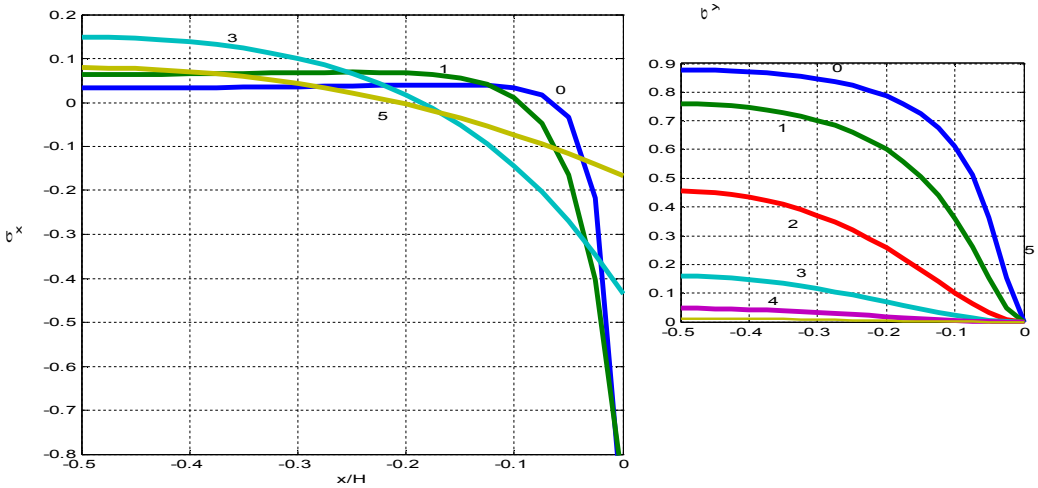

Рис. 3. Розподіл відносних напружень σ_x / S_y (а) та σ_y / S_y

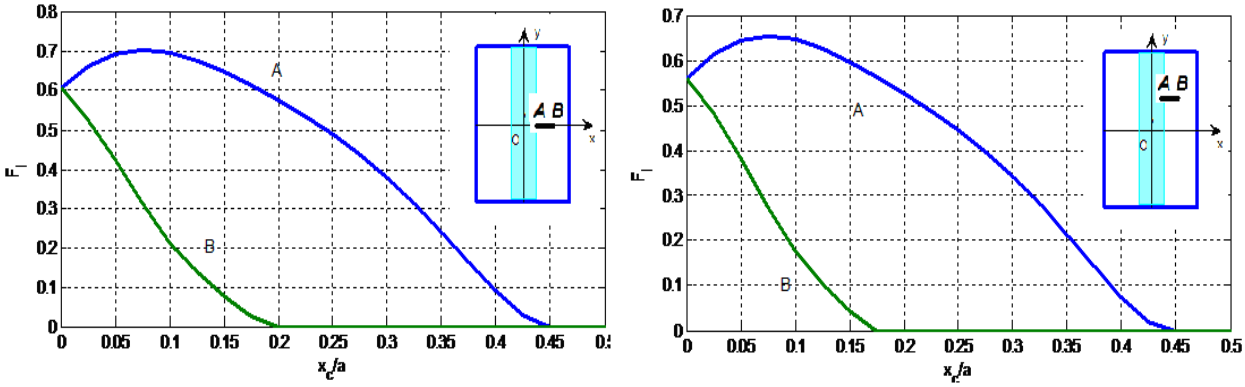

Рис.4. Відносні КІН $F_{I,II} = K_{I,II} / (S_y \sqrt{\pi d})$ з врахуванням контакту берегів для випадку $d / a = 0,2$ при $y_c = 0,\ \alpha = 0$

©Я.В. Максимович

дотичні напруження відсутні (гладкий контакт) та нормальні зміщення берегів однакові. Для розв'язування цієї задачі використовуємо алгоритм роботи [2].

Розраховані відносні значення КІН $F_{I,II} = K_{I,II} / (S_y \sqrt{\pi d})$ з врахуванням контакту берегів для випадку $d / a = 0,2$ при $y_c = 0$, $\alpha = 0$, залежно від розміщення центру x_c для лівої *(A)* та правої вершин (*B)* тріщини наведена ні рис. 4. зліва.

Аналогічні результати для паралельної до осі *Ox* тріщини при $y_c / a = 0,5$ наведені на рис.4 справа.

На рис.5 наведено розподіл КІН для нахиленої тріщини залежно від кута α при розміщенні центра тріщини в точках $(0,0)$ і $(0, 0,2a)$.

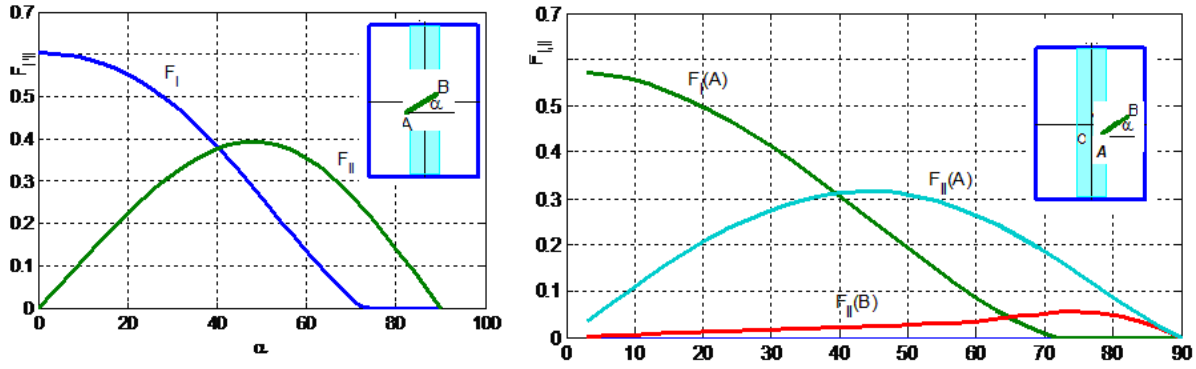

Рис. 5. Розподіл КІН залежно від кута α при розміщенні центра тріщини в точках $(0,0)$ і $(0, 0,2a)$.

На основі виконаних розрахунків можна зробити наступні висновки: при визначенні КІН для тріщин, що знаходяться в полі залишкових напружень необхідно враховувати контакт берегів тріщин; для тріщин, перпендикулярних до зварного шва максимальне значення КІН K_I досягається, якщо тріщина зміщена; контакт берегів, як правило, має місце біля віддаленої від шва вершини.

Висновок. Запропоновано алгоритм визначення напруженого стану пластинок з тріщинами, зумовленого залишковими деформаціями. Встановлено, що нехтування контактом берегів тріщин може привести до істотних похибок при знаходженні КІН за дії залишкових напружень. КІН може досягати максимальних значень для зміщених відносно центру шва тріщин.

1. Божидарнік В.В. Визначення напруженого стану пластинок з отворами і тріщинами за допомогою методів інтегральних рівнянь та конформного відображення / В.В. Божидарнік, О.В. Максимович // Збірник праць XV міжнародної науково-технічної конференції "Машиностроение и техносфера XXI века". – Донецьк. – 2008. – Т. 3. – С. 140-146.
2. Максимович О. Розрахунок напруженого стану анізотропних пластинок з отворами і криволінійними тріщинами при врахуванні контакту їхніх берегів / О. Максимович // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2009. – № 3. – С. 36-42.
3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили // М.: Наука, 1966. – С. 708.
4. Осадчук В. Визначення залишкових напружень у зварному стиковому з'єднанні двох прямокутних пластин / В. Осадчук, Ю. Токовий // Машинознавство. – 2005. – № 9/99. – С.3-9.
5. Саврук М.П., Максимович Я.В. Побудова розв'язку типу Гріна задачі теорії пружності для смуги // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – 35, № 6. – С.17-21.