

УДК 539.3

Ю.О.Пир'єв

Луцький національний технічний університет

АНАЛІЗ КОЛИВАНЬ ПІВПРОСТОРУ ЗУМОВЛЕНИХ ІМПУЛЬСНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

Наведено результати числового аналізу нестационарної задачі для пружного півпростору при імпульсному навантаженні.

Належне утримання доріг вимагає детальної інформації про несучу здатність її поверхні. Для цієї мети використовують виміряні прогини дороги, які є вхідними даними для числових моделей на основі яких можливо дати оцінку несучої здатності конструкції. Для цього використовують прилади які вимірюють прогини від ударних навантажень FWD (Falling Weight Deflectometer), або розповсюдження хвиль SPA (Seismic Pavement Analyzer) [5]. FWD викликає навантаження шляхом скидання з певної висоти тягача на демпфер, який закріплений на контактній плиті. Значення прогинів поверхні вимірюється датчиками в центрі навантаження $r_0 = 0$ і на певних відстанях $r_1 = 0,3$, $r_2 = 0,6$, $r_3 = 0,9$, $r_4 = 1,5$ і $r_5 = 1,8$ м, (див. рис. 1). Для доріг найчастіше використовують вагу 50 ± 5 кН і круглу контактну плиту радіусом r_* для передачі імпульсу навантаження на поверхню. Для проведення аналізу отриманих вимірів прогинів необхідно мати теоретичне розв'язання задачі. Робота є першим кроком у вирішенні цієї задачі.

Формулювання задачі. Розглянемо пружний півпростір $z > 0$ на поверхню якого діє осесиметричне ударне навантаження імпульсного типу в напрямку осі z .

Задача зводиться до розв'язання наступної системи диференціальних рівнянь теорії пружності для півпростору [1]



Рис. 1. Датчики переміщень які встановлені на балці

$$(\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

(2)

Тут $u(r, z, t)$, $w(r, z, t)$ – компоненти вектора переміщення, λ , μ – коефіцієнти Ляме. Граничні умови мають вигляд:

$$\sigma_{zz} = -Z(r)f(t), \quad \sigma_{zr} = 0, \quad \text{при } z = 0, \quad u, w \rightarrow 0, \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Початкові умови нульові

$$u = \partial u / \partial t = w = \partial w / \partial t = 0, \quad \text{при } t < 0$$

(4)

Вважаємо, що зміна в часі функції $f(t)$ має імпульсний характер

$$f(t) = A t \exp(-v_0 t) H(t),$$

(5)

де $H(t)$ – функція Хевісайда ($H(t) = 1, t > 0$; $H(t) = 0, t < 0$)

$$A = v_0 e, \quad \max_{t \in (0, \infty)} f(t) = f(t_{\max}) = 1, \quad t_{\max} = 1/v_0.$$

Навантаження на поверхні має вигляд:

$$Z(r) = \frac{2P}{\pi r_*^4} (r_*^2 - r^2) H(r_* - r), \quad 2\pi \int_0^\infty Z(r) r dr = P.$$

(6)

Побудова розв'язання задачі. Розв'язок задачі отримуємо за допомогою інтегрального перетворення Лапласа та Ганкеля [2-4]. Так переміщення в напрямку осі z у безрозмірних змінних набуває вигляду:

$$w(r, z, t) = \frac{PA}{2\pi\mu c_2} \int_0^\infty W(\tau) \bar{Z}(x) x J_0(x) dx, \quad (7)$$

$$W(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} w_0^{LH} \frac{e^{y\tau}}{(y + t_* v_0)^2} dy, \quad (8)$$

$$w_0^{LH} = (\gamma_0 e^{-\alpha_0 \frac{\zeta}{\rho}} - 2x^2 e^{-\beta_0 \frac{\zeta}{\rho}}) \frac{\alpha_0}{\Delta_0},$$

(9)

$$\alpha_0 = \sqrt{x^2 + (c_2^2/c_1^2)y^2}, \quad \beta_0 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (10)$$

$$\gamma_0 = 2x^2 + y^2, \quad \Delta_0 = \gamma_0^2 - 4\alpha_0\beta_0 x^2, \quad (11)$$

$$\zeta = \frac{z}{r_*}, \quad \xi = \frac{r}{r_*}, \quad \tau = \frac{t}{t_*}, \quad t_* = \frac{r}{c_2}, \quad \bar{Z}(x) = 8 \frac{J_2(x/\xi)}{(x/\xi)^2},$$

(12)

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (13)$$

Враховуючи положення особливостей підінтегральної функції (точки галуження $\pm ix$, $\pm i(c_1/c_2)x$ і полюси $\pm i(c_R/c_2)x$) контур інтегрування в оберненому перетворенні Лапласа AB замінено контуром $CDEF$, який складається з відрізків DE , CD , EF (див. рис. 2).

$$W(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} \tilde{W}(y) e^{y\tau} dy = W_1 + W_2 + W_3$$

(14)

$$\tilde{W}(y) = \frac{w_0^{LH}}{(y + t_* v_0)^2}, \quad \overline{\tilde{W}(y)} = \tilde{W}(\bar{y}), \quad W_2 = W_3$$

(15)

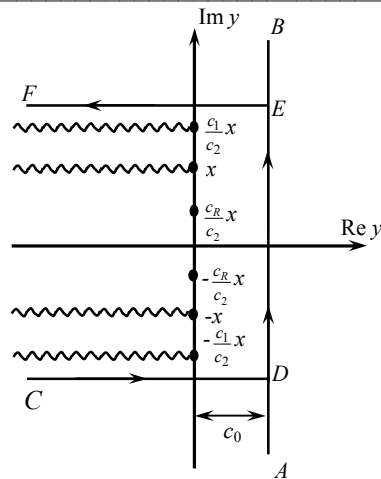


Рис. 2. Шлях інтегрування у оберненому перетворенні Лапласа

$$W_1 = \frac{1}{\pi} e^{c_0 \tau} \int_0^{\beta} (\cos(\eta \tau) \operatorname{Re}(\tilde{W}(c_0 + i\eta)) - \sin(\eta \tau) \operatorname{Im}(\tilde{W}(c_0 + i\eta))) d\eta \quad (16)$$

$$W_2 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{c_0 \tau} e^{\eta} \left(\sin(\beta \tau) \operatorname{Re}(\tilde{W}(\frac{\eta}{\tau} + i\beta)) + \cos(\beta \tau) \operatorname{Im}(\tilde{W}(\frac{\eta}{\tau} + i\beta)) \right) \frac{d\eta}{\tau}$$

(17)

Параметри, які входять у вирази (16), (17) прийнято наступними $c_0 = 5/t$, $\beta = xc_1/c_2 + 5/t$. Проведено числовий аналіз оберненого перетворення Ганкеля і Лапласа з урахуванням представлень (16), (17). Результати розрахунків представлено на рис. 3 і 4.

Числовий аналіз задачі. Числовий аналіз виконаний для параметрів ґрунту $c_1 = 800$ м/с, $c_2 = 320$ м/с, $\rho = 1600$ кг/м³ ($\lambda = 0,7$ ГПа, $\mu = 0,16$ ГПа). Швидкість хвилі Релея $c_R = 300$ м/с. Приймаємо $r_* = 0,3$ м, $P = 50$ кН, $\nu_0 = 5000$ с⁻¹.

На рисунку 3 представлена зміна в часі нормального напруження $\sigma_{zz}(0,0,t)$ і переміщення в напрямку осі z в середині навантаження. Найбільше переміщення досягається при $t_{\max} = 0,76$ мс.

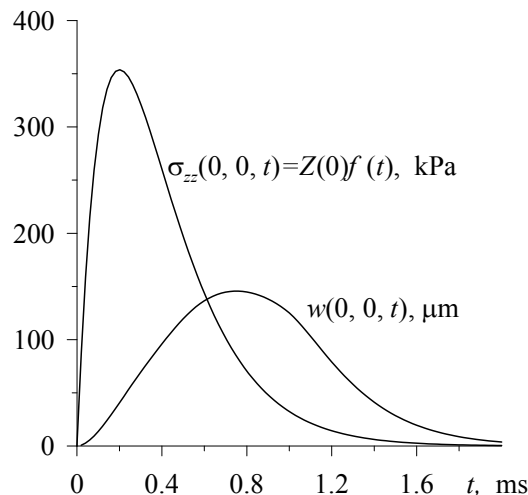


Рис. 3. Зміна в часі напруження $\sigma_{zz}(0,0,t)$ і переміщення $w(0,0,t)$ на поверхні півпростору під навантаженням

Результати розрахунку переміщення w подано на рис. 4 для різних пунктів спостереження.

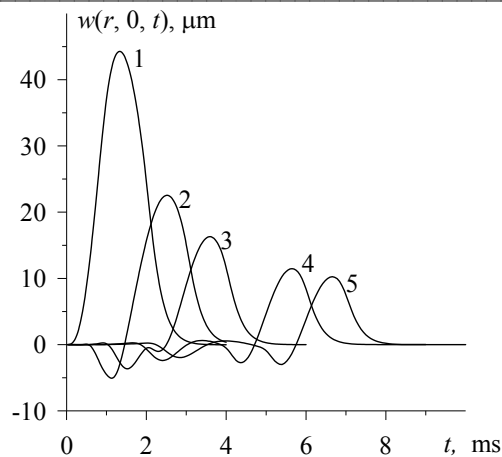


Рис. 4. Зміна в часі переміщень на поверхні в різних пунктах спостереження. 1: $r = r_1$; 2: $r = r_2$; 3: $r = r_3$; 4: $r = r_4$; 5: $r = r_5$

Отже, запропонований метод обчислення подвійного інтегрального перетворення дає можливість отримати числовий розв'язок задачі для півпростору при імпульсному навантаженні. Показана поведінка поверхні півпростору у різних точках спостереження. Аналіз числових результатів дає можливість зробити висновок, що в результаті інтерференції різних хвиль на відстані шести радіусів області збурення переміщення в часі має два від'ємних максимуми і один максимум додатній.

1. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пружності. – Львів: Світ, 1994. – 560 с.
2. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. – Ленинград: Судостроение, 1972. – 376 с.
3. Achenbach J. D. Wave propagation in elastic solids. – New York, American Elsevier Publishing Company, 1973. – 425 p.
4. Awrejcewicz J., Pyryev Yu. De Saint-Venant Principle and an Impact Load Acting on an Elastic Half Space / Journal of Sound and Vibration. – 2003. – V. 264, 1. – P. 245-251.
5. Dynatest FWD/HWD test Systems, http://www.dynatest.com/hardware/fwd_hwd.htm