

УДК 539.3

А.О.Сяський, В.В.Кот

Рівненський державний гуманітарний університет

## КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ З ЕЛІПТИЧНИМ ОТВОРОМ І ДВОХ ПРУЖНИХ РЕБЕР ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ

*Побудована математична модель у вигляді системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь з логарифмічними ядрами для визначення контактних моментів в задачі про часткове підсилення контуру еліптичного отвору в ортотропній пластинці при її циліндричному згині.*

**Вступ.** Для зменшення концентрації згинальних напружень в пластинках з отворами їх контури підсилюють тонкими пружними ребрами. Часткове підсилення контурів дозволяє розсіяти найбільшу концентрацію напружень і зменшити металомісткість конструкції.

Задачі згину ізотропних пластин з частково підсиленими криволінійними контурами досліджувалися в [1-3] за умови відсутності у підсилень жорсткості на кручення. Для оцінки напруженого стану і міцності сучасних пластинчастих конструкцій з ребрами жорсткості необхідно врахувати неоднорідність матеріалу пластинки, нові моделі та дискретність розміщення ребер.

**Постановка задачі.** Нехай нескінченна ортотропна пластинка товщиною  $2h$  з еліптичним отвором перебуває в умовах циліндричного згину рівномірно розподіленими на нескінченності моментами інтенсивності  $M_1$  та  $M_2$ . Контур отвору  $L$  на ділянках  $L_1 = [\alpha_0^*; \beta_0^*]$  та  $L_2 = [\alpha_1^* + \pi; \beta_1^* + \pi]$  підсилено системою двох ізотропних тонких пружних ребер, розміщених симетрично відносно середньої площини пластинки. Зовнішнє навантаження на підсилення відсутнє. Систему декартових  $(x, y)$  та полярних координат в середній площині пластинки оберемо так, як показано на рис. 1.

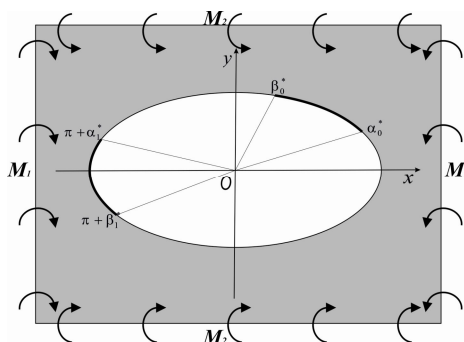


Рис.1. Розрахункова схема пластинки

Вважаємо, що головні напрямки ортотропії матеріалу пластинки співпадають з напрямками координатних осей.

Розв'язок задачі полягає у визначенні контактних моментів  $M_p$ ,  $P$  в зонах підсилення та кільцевих  $M_\lambda$  і крутних  $H_{\rho\lambda}$  моментів на контурі отвору.

**Основні рівняння задачі.** Моделюючи підсилення пружними лініями із змінними жорсткостями на згин  $g_1(s)$  та кручення  $g_2(s)$  ( $s$  - дуга на  $L$ ), граничні умови задачі на підставі [4] можна записати у вигляді

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1} \left\{ f_2(t) \left[ R_2^2(t) + \frac{g_1}{g_2} R_1^2(t) \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + f_1(t)R_1(t)R_2(t)\left(1 - \frac{g_1}{g_2}\right)dt + C_1; \\
 \frac{\partial w}{\partial y} = & \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1} \left\{ f_2(t)R_1(t)R_2(t)\left(\frac{g_1}{g_2} - 1\right) - \right. \\
 & \left. - f_1(t)\left[R_1^2(t) + \frac{g_1}{g_2}R_2^2(t)\right] \right\} dt + C_2, \\
 & \lambda \in [\alpha_0; \beta_0] \cup [\alpha_1 + \pi; \beta_1 + \pi].
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Тут введено позначення

$$\begin{aligned}
 f_1 + if_2 = i \int_{\alpha_0}^{\lambda} \{M_{\rho}^* + iP^*\} e^{it} dt = & \begin{cases} f_1^0 + if_2^0, \lambda \in [\beta_0; \theta_0] \\ \tilde{f}_1 + i\tilde{f}_2, \lambda \in [\beta_1 + \pi; \theta_1 + \pi] \end{cases}; R_1 + iR_2 = e^{i\theta}; \\
 g_1 + ig_2 = & \begin{cases} g_1^0 + ig_2^0, \lambda \in [\alpha_0; \beta_0] \\ \tilde{g}_1 + i\tilde{g}_2, \lambda \in [\alpha_1 + \pi; \beta_1 + \pi] \end{cases}; C_1 = \begin{cases} C_1^0, \lambda \in [\beta_0; \theta_0] \\ \tilde{C}_1, \lambda \in [\beta_1 + \pi; \theta_1 + \pi] \end{cases}.
 \end{aligned}$$

$$C_2 = \begin{cases} C_2^0, \lambda \in [\beta_0; \theta_0] \\ \tilde{C}_2, \lambda \in [\beta_1 + \pi; \theta_1 + \pi] \end{cases}; \quad z = \omega(\xi) = R_0\left(\xi + \frac{\varepsilon}{\xi}\right) - \text{функція, що здійснює конформне}$$

відображення зовнішності  $S^-$  одиничного кола  $\gamma$  в площині  $\xi = \rho e^{i\lambda}$  на область  $z = x + iy$ , яку займає середня площа пластинки;  $R_0 = \frac{a+b}{2}$  - характерний розмір отвору;  $a, b$  - півосі еліпса;

$\varepsilon = \frac{a+b}{a-b}$ ;  $[\alpha_0; \beta_0] \cup [\alpha_1 + \pi; \beta_1 + \pi]$  образ ділянки  $[\alpha_0^*, \beta_0^*] \cup [\alpha_1^* + \pi; \beta_1^* + \pi]$  при відображенні  $\omega(\xi)$ ;  $\theta$  - кут між нормаллю до  $L$  і додатним напрямком осі  $Ox$ ;  $M_{\rho}^* + iP^* = (M_{\rho} + iP)\omega'(\sigma)$ ;  $\omega'(\sigma) = \alpha + i\beta$ .

Розв'язок першої граничної задачі для ортотропної пластинки з еліптичним отвором [5], контур якого навантажений контактними моментами  $M_{\rho}$  і  $P$  [6] можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
 \varphi(\xi_1) = & \frac{k}{(\beta_2 - \beta_1)\tilde{\Delta}} \left\{ \frac{-(\beta_2^2 - \nu_x)}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{f_2(\tau)d\tau}{\tau - \xi_1} + \frac{\beta_2(\beta_1^2 - \nu_1)i}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{f_1(\tau)d\tau}{\tau - \xi_1} - \right. \\
 & \left. - \frac{i\tilde{C}}{2\xi_1}(\varepsilon d_2 - c_2) + \frac{1}{4\xi_1}[d_2(l_1 + l_3) - c_2(l_2 + l_4)] \right\} + a_1 \frac{a + \beta_1 b}{2} \xi_1;
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 \psi(\xi_2) = & \frac{k}{(\beta_2 - \beta_1)\tilde{\Delta}} \left\{ \frac{(\beta_1^2 - \nu_x)}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{f_2(\tau)d\tau}{\tau - \xi_2} + \frac{i\beta_1(\beta_2^2 - \nu_x)}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{f_1(\tau)d\tau}{\tau - \xi_2} - \right. \\
 & \left. - \frac{i\tilde{C}}{2\xi_2}(c_1 - \varepsilon d_1) + \frac{1}{4\xi_2}[c_1(l_2 + l_4) - d_1(l_1 + l_3)] \right\} + a_2 \frac{a + \beta_2 b}{2} \xi_2,
 \end{aligned}$$

де  $l_1 = a(d_1 a_1 + d_2 a_2)$ ;  $l_3 = b(d_1 a_1 \beta_1 + d_2 a_2 \beta_2)$ ;  $l_2 = a(c_1 a_1 + c_2 a_2)$ ;

$$l_4 = b(c_1 a_1 \beta_1 + c_2 a_2 \beta_2); a_1 = \frac{-M_1 q_2 + M_2 p_2}{2(p_1 q_2 - p_2 q_1)}; a_2 = \frac{M_1 q_1 - M_2 p_1}{2(p_1 q_2 - p_2 q_1)};$$

$\tilde{\Delta} = \beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)^2 - (\beta_1\beta_2 + v_x)$ ;  $\tau = e^{it}$ ;  $\beta_1, \beta_2$  - корені характеристичного рівняння [5];  
 $k = \frac{\beta_1^2\beta_2^2}{D_{11}}$ ;  $D_{11}$  - циліндрична жорсткість пластинки в напрямку осі  $Ox$ ;  $\tilde{C}$  - дійсна стала.

Підставляючи (2) з використанням формул Сохоцького-Племеля в граничну умову другої основної задачі [5]

$$\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} = (1 - \beta_1)\varphi(\sigma) + (1 - \beta_2)\psi(\sigma) + (1 + \beta_1)\overline{\varphi(\sigma)} + (1 + \beta_2)\overline{\psi(\sigma)}, \quad (3)$$

знаходимо після певних перетворень

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} = & \frac{k}{\tilde{\Delta}} \left\{ (\beta_1\beta_2 + v_x)(f_1 + if_2) + \frac{i(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\gamma} [\beta_1\beta_2 f_1'(t) + \right. \\ & \left. + if_2'(t)] \ln \sin \frac{\lambda - t}{2} dt + \tilde{C}i[(a(\beta_1\beta_2 + v_x) + b\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2))\cos \lambda + \right. \\ & \left. + i(a(\beta_1 + \beta_2) + b(\beta_1\beta_2 + v_x))\sin \lambda] - \frac{M_1(\beta_1 + \beta_2)}{\tilde{\Delta}_1} [(a\tilde{\Delta} + b\tilde{\Delta}_1)\cos \lambda + \right. \\ & \left. + i\beta_1\beta_2\tilde{\Delta}_2 b \sin \lambda] - \frac{M_2\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)}{\tilde{\Delta}_1} [a\tilde{\Delta}_2 \cos \lambda + i(\beta_1\beta_2\tilde{\Delta}b + \tilde{\Delta}_1 a)\sin \lambda] + (C_1^* + iC_2^*), \lambda \in \gamma. \right. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут  $\tilde{\Delta}_1 = (\beta_1 + \beta_2)(\beta_1\beta_2 - v_x)(\beta_1\beta_2 + v_x)$ ;  $\tilde{\Delta}_2 = (\beta_1^2 - v_x)(\beta_2^2 - v_x)$ ;  
 $C_1^*, C_2^*$  - сталі.

Шляхом підстановки (4) в (1) отримуємо систему чотирьох інтегро-диференціальних рівнянь для визначення функцій  $f_1^0, f_2^0, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2$

$$\begin{aligned} \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1} \left\{ f_2(t) \left[ R_2^2(t) + \frac{g_1}{g_2} R_1^2(t) \right] + f_1(t) R_1(t) R_2(t) \left( 1 - \frac{g_1}{g_2} \right) \right\} dt = \\ = \frac{k}{\tilde{\Delta}} \left\{ (\beta_1\beta_2 + v_x) f_1(\lambda) - \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\gamma} f_2'(t) \ln \sin \frac{\lambda - t}{2} dt - \right. \\ - \frac{M_1(\beta_1 + \beta_2)}{\tilde{\Delta}_1} (a\tilde{\Delta} + b\tilde{\Delta}_1) \cos \lambda - \frac{M_2\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)}{\tilde{\Delta}_1} a\tilde{\Delta}_2 \cos \lambda - \\ \left. - \tilde{C}(a(\beta_1 + \beta_2) + b(\beta_1\beta_2 + v_x)) \sin \lambda \right\} + C_1^* - C_1; \quad (5) \\ \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1} \left\{ f_2(t) R_1(t) R_2(t) \left( \frac{g_1}{g_2} - 1 \right) - f_1(t) \left[ R_1^2(t) + \frac{g_1}{g_2} R_2^2(t) \right] \right\} dt = \\ = \frac{k}{\tilde{\Delta}} \left\{ (\beta_1\beta_2 + v_x) f_2(\lambda) + \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\gamma} \beta_1\beta_2 f_1'(t) \ln \sin \frac{\lambda - t}{2} dt + \right. \\ - \frac{M_1(\beta_1 + \beta_2)}{\tilde{\Delta}_1} \beta_1\beta_2\tilde{\Delta}_2 b \sin \lambda - \frac{M_2\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)}{\tilde{\Delta}_1} (\beta_1\beta_2\tilde{\Delta}b + \tilde{\Delta}_1 a) \sin \lambda + \\ \left. + \tilde{C}(a(\beta_1\beta_2 + v_x) + b\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)) \cos \lambda + \tilde{C}_2(\beta_1\beta_2 - v_x) \right\} + C_2^* - C_2; \\ \lambda \in [\alpha_0; \beta_0] \cup [\alpha_1 + \pi; \beta_1 + \pi]. \end{aligned}$$

Для визначення довільних  $C_1^* - C_1^0$ ,  $C_1^* - \tilde{C}_1$ ,  $C_2^* - C_2^0$ ,  $C_2^* - \tilde{C}_2$ ,  $\tilde{C}$  сталих систему (5) доповнюємо умовами рівноваги підсилення [4]

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1^{r0}(t)dt = 0; \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2^{r0}(t)dt = 0; \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}_1'(t)d\tilde{t} = 0; \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{f}_2'(t)d\tilde{t} = 0 \quad (6)$$

та умовою однозначності прогину пластинки [6]

$$\frac{2\varepsilon(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\gamma} [f_2'(t) \sin t - \beta_1\beta_2 f_1'(t) \cos t] dt = \tilde{C} [2ab(\beta_1\beta_2 + \nu_x) + (\beta_1 + \beta_2)(a^2 + \beta_1\beta_2 b^2)]. \quad (7)$$

Якщо функції  $f_1^0, f_2^0, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2$  стануть відомі, то компоненти напруженого стану на контурі  $L$  можна визначити за формулами, наведеними в [4].

**Числова реалізація** задачі проведена методами механічних квадратур і колокації. На рис. 2. наведено результати розрахунку контактних, кільцевих і крутних моментів на контурі еліптичного ( $\varepsilon = 0.2$ ) отвору, частково підсиленого двома однаковими центральносиметричними ребрами сталі жорсткості з параметрами  $\alpha_0 = -60^\circ$  (град),  $\beta_0 = 60^\circ$  (град),  $h_0/h = 1$ ,  $b_0/R_0 = 1/20$ ,  $b_0/h_0 = 1/3$ ,  $E_0/E = 1$  при  $M_1 = 0$ ,  $M_2 = 1$ .

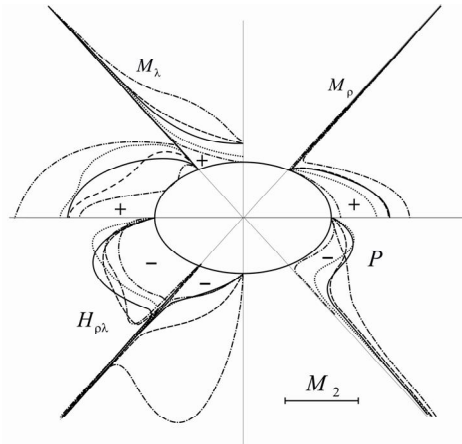


Рис. 2. Графіки розподілу моментів  $M_\rho, P, M_\lambda, H_{\rho\lambda}$

Характеристики досліджуваних ортотропних матеріалів і лінії, які відповідають їм на рис. 2, наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

Характеристики матеріалів і ліній на рисунку

Матеріал пластинки	$\beta_1$	$\beta_2$	$\nu_x$	$E_x/E_y$	Лінії
ізотропний матеріал	1	1	0.300	1	—————
скло-епоксид	2.2712	0.7626	0.250	3	-----
графіт-епоксид	6.9992	0.7144	0.250	25	-·-·-·-·-
епоксид-скло	0.4400	1.3100	0.083	1/3	··········
епоксид-графіт	0.1430	1.4010	0.010	1/25	-·-·-·-·-

**Висновки.** Із наведених результатів випливає, що із збільшенням  $\frac{E_x}{E_y}$  контактні моменти  $M_\rho$  і  $P$  на ділянках підсилення збільшуються, а кільцеві  $M_\lambda$  - зменшуються. В околі торців підсилення всі моментні напруження приймають необмежені значення.

Запропонований метод без суттєвих змін може бути перенесений на задачі про передачу зосередженого моментного навантаження до контуру отвору пластинки через систему тонких пружних ребер змінної жорсткості.

1. Сяський А. Основні інтегральні співвідношення в технічній теорії згину пластин з отворами/ А. Сяський, С. Гаврюсев // Вісник Тернопільського державного технічного університету. 2006. Т. 11, №1. – с. 12-17
2. Сяський А. Контактна взаємодія пластин з криволінійними отворами і розімкнених несиметричних ребер змінної жорсткості/ А. Сяський, Н. Шевцова// Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2006. – Т. 11, №3. – С. 20-26.
3. Сяський А. А. Упругое равновесие пластинки с частично подкрепленным криволинейным отверстием / Сяський А. А. // Прикл. математика и механика. – 1986. Т. 50, №2. – С. 247-254.
4. Кот В. Згин нескінченної ізотропної пластинки з частково підсиленням криволінійним контуром/ В. Кот // Матеріали чотирнадцятої всеукраїнської студентської наукової конференції з прикладної математики та інформатики СНКПМІ-2011. – Львів, 2011. С. 124-126.
5. Лехницький С. Г. Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницький.- М.: Гостехиздат, 1957.-464 с.
6. Сяський А. Основні інтегральні залежності в технічній теорії згину ортотропних пластин з еліптичним отвором / А. Сяський, Н. Шевцова // Вісник Тернопільського державного технічного університету. - 2006. - Т. 11, №4. – с. 23-29

