

УДК 539.3

А.О.Сяський, Н.В.Шинкарчук

Рівненський державний гуманітарний університет

## ДВОСТОРОННІЙ РОЗТЯГ-СТИСК КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНКИ З ДВОМА КРИВОЛІНІЙНИМИ РОЗРІЗАМИ

*Досліджується напружений стан кусково-однорідної пластинки з двома криволінійними розрізами на лінії розмежування матеріалів пластинки і жорсткого диска за умови контактування їх берегів. Величина і положення зон контакту визначаються методом механічних квадатур і колокації.*

**Вступ.** Роботоздатність деталей машин та елементів конструкцій у вигляді кусково-однорідних пластин в багатьох випадках визначається наявністю на лінії розмежування їх матеріалів розривів або тріщин.

Контактні задачі для кусково-однорідних пластин з розрізами по дузі кола, які перебувають в умовах узагальненого плоского напруженого стану, розглянуто в роботах [1,2].

Розв'язок задачі про напружений стан кусково-однорідної пластинки з одним криволінійним розрізом за умови контактування його берегів наведено в [3,4].

Значний теоретичний та практичний інтерес становить дослідження і аналіз розподілу напружень в околі системи таких розривів.

**Постановка задачі.** Нехай криволінійний отвір нескінченної ізотропної пластинки товщиною  $2h$ , обмежений гладким контуром  $\Gamma$  у вигляді правильного  $N$ -кутника із закругленими кутами. Середню площину пластинки віднесемо до системи прямокутних  $(x, y)$  і полярних  $(r, \delta)$  координат з полюсом в центрі отвору.

Раціональна функція [4]

$$z = \omega(\xi) = R \left( \xi + \frac{\varepsilon}{\xi^{N-1}} \right), \quad (1)$$

здійснює конформне відображення зовнішності  $S^-$  одиничного кола  $\gamma$  в площині  $\xi = \rho e^{i\lambda}$  на область, яку займає середня площина пластинки в комплексній площині. Тут  $R$  – характерний розмір отвору;  $\varepsilon$  – параметр, який характеризує відхилення форми криволінійного многокутника від кола;  $i = \sqrt{-1}$ .

Нехай в отвір пластинки без зазору і натягу вставлено абсолютно жорсткий диск, спаяний з нею на ділянках  $\Gamma_3 = [\pi/2 + \alpha_1^*, \pi/2 + \beta_1^*]$  та  $\Gamma_7 = [3\pi/2 + \alpha_3^*, 3\pi/2 + \beta_3^*]$ . Пластинка перебуває в умовах розтягу-стиску рівномірно розподіленими зусиллями  $p$  та  $q$ , прикладеними на нескінченності в напрямках координатних осей. Внаслідок дії заданого навантаження на проміжках  $\Gamma_1 = [\alpha_0^*, \beta_0^*]$  та  $\Gamma_5 = [\pi + \alpha_2^*, \pi + \beta_2^*]$  пластинка вступає в контактну взаємодію з диском, а на ділянках  $\Gamma_2 = [\beta_0^*, \pi/2 + \alpha_1^*]$ ,  $\Gamma_4 = [\pi/2 + \beta_1^*, \pi + \alpha_2^*]$ ,  $\Gamma_6 = [\pi + \beta_2^*, 3\pi/2 + \alpha_3^*]$ ,  $\Gamma_8 = [3\pi/2 + \beta_3^*, 2\pi + \alpha_0^*]$  контакт між ними відсутній (рис. 1).

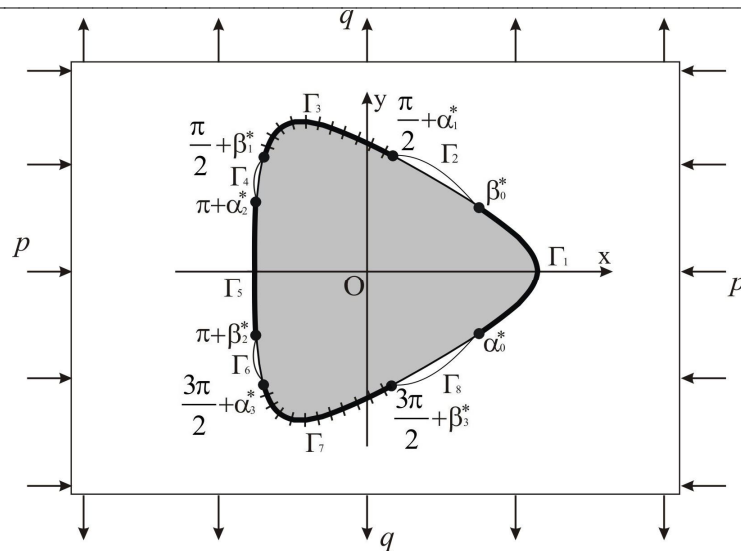


Рис. 1. Розрахункова схема задачі

Тут  $\alpha_0^*$ ,  $\beta_0^*$ ,  $\pi/2 + \alpha_1^*$ ,  $\pi/2 + \beta_1^*$ ,  $\pi + \alpha_2^*$ ,  $\pi + \beta_2^*$ ,  $3\pi/2 + \alpha_3^*$ ,  $3\pi/2 + \beta_3^*$  – полярні кути межових точок ділянок контакту та спаю.

Розв'язок поставленої задачі полягає у визначенні напруженого стану на контурі отвору пластинки, розмірів і положення зон контакту.

**Інтегральні рівняння задачі.** Вирази для компонентів вектора зміщення контурних точок пластинки та жорсткого диска при заданому навантаженні мають вигляд [3]

$$\begin{aligned}
 2Ehu &= (1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\gamma} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \\
 &\quad - (3p+q) \cos \lambda - (q-p) \varepsilon \cos((N-1)\lambda) + c_1; \\
 2Ehv &= (1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{\gamma} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \\
 &\quad - (3q+p) \sin \lambda + (q-p) \varepsilon \sin((N-1)\lambda) + c_2, \quad \lambda \in \gamma; \\
 (u+iv)_r^0 &= (U_0 + iV_0),
 \end{aligned} \tag{2}$$

де  $E$ ,  $\nu$  – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки;  $c_1$ ,  $c_2$  – сталі;  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\pi/2 + \alpha_1$ ,  $\pi/2 + \beta_1$ ,  $\pi + \alpha_2$ ,  $\pi + \beta_2$ ,  $3\pi/2 + \alpha_3$ ,  $3\pi/2 + \beta_3$  – образи кутів  $\alpha_0^*$ ,  $\beta_0^*$ ,  $\pi/2 + \alpha_1^*$ ,  $\pi/2 + \beta_1^*$ ,  $\pi + \alpha_2^*$ ,  $\pi + \beta_2^*$ ,  $3\pi/2 + \alpha_3^*$ ,  $3\pi/2 + \beta_3^*$  при відображенні (1);  $T_\rho$ ,  $S_{\rho\lambda}$  – нормальні та дотичні зусилля на контурі  $\Gamma$ ;  $U_0$ ,  $V_0$  – компоненти жорсткого лінійного зміщення диска;

$$f_1 + if_2 = i \int_{\alpha_0}^{\lambda} (T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^*) e^{it} dt; \quad T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^* = (T_\rho + iS_{\rho\lambda}) \omega'(\sigma); \quad \sigma = e^{i\lambda}.$$

Граничні умови задачі в зоні гладкого контакту обираємо у вигляді рівності нормальних зміщень пластинки і диска [3,5]

$$a(\lambda)u + b(\lambda)v = a(\lambda)U_0 + b(\lambda)V_0; \quad S_{\rho\lambda} = 0; \quad \lambda \in \gamma_1 \cup \gamma_5, \tag{3}$$

а в зоні спаю пластинки та диска – у вигляді рівності зміщень їх контурних точок

$$u = U_0; \quad v = V_0; \quad \lambda \in \gamma_3 \cup \gamma_7. \tag{4}$$

Тут  $\gamma_1$ ,  $\gamma_3$ ,  $\gamma_5$ ,  $\gamma_7$  – образи ділянок  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_3$ ,  $\Gamma_5$ ,  $\Gamma_7$  при відображенні (1);  $a(\lambda) + ib(\lambda) = \omega'(\sigma) e^{i\lambda}$ ;  $\alpha + i\beta = \omega'(\sigma)$ .

Підстановкою (2) в граничні умови (3), (4), одержимо систему восьми сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами для визначення функцій  $f_1'$ ,  $f_2'$

$$\begin{aligned}
 & a(\lambda) \left[ (1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{2}{\pi_\gamma} \int_{\gamma} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - (3p+q) \cos \lambda - \right. \\
 & \left. -(q-p) \varepsilon \cos((N-1)\lambda) \right] + b(\lambda) \left[ (1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt - (3q+p) \sin \lambda - \right. \\
 & \left. - \frac{2}{\pi_\gamma} \int_{\gamma} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + (q-p) \varepsilon \sin((N-1)\lambda) \right] = a(\lambda) \tilde{c}_1 + b(\lambda) \tilde{c}_2, \\
 & f_1'(\lambda) a(\lambda) + f_2'(\lambda) b(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \gamma_1;
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 & (1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{2}{\pi_\gamma} \int_{\gamma} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt = \\
 & = \tilde{c}_1 + (3p+q) \cos \lambda + (q-p) \varepsilon \cos((N-1)\lambda); \\
 & (1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{2}{\pi_\gamma} \int_{\gamma} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt = \\
 & = \tilde{c}_2 + (3q+p) \sin \lambda - (q-p) \varepsilon \sin((N-1)\lambda), \quad \lambda \in \gamma_3;
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 & a(\lambda) \left[ (1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{2}{\pi_\gamma} \int_{\gamma} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - (3p+q) \cos \lambda - \right. \\
 & \left. -(q-p) \varepsilon \cos((N-1)\lambda) \right] + b(\lambda) \left[ (1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt - (3q+p) \sin \lambda - \right. \\
 & \left. - \frac{2}{\pi_\gamma} \int_{\gamma} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + (q-p) \varepsilon \sin((N-1)\lambda) \right] = a(\lambda) \tilde{c}_1 + b(\lambda) \tilde{c}_2, \\
 & f_1'(\lambda) a(\lambda) + f_2'(\lambda) b(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \gamma_5;
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 & (1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{2}{\pi_\gamma} \int_{\gamma} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt = \\
 & = \tilde{c}_1 + (3p+q) \cos \lambda + (q-p) \varepsilon \cos((N-1)\lambda); \\
 & (1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{2}{\pi_\gamma} \int_{\gamma} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt = \\
 & = \tilde{c}_2 + (3q+p) \sin \lambda - (q-p) \varepsilon \sin((N-1)\lambda), \quad \lambda \in \gamma_7;
 \end{aligned} \tag{8}$$

де  $\tilde{c}_1 = 2EhU_0 - c_1$ ,  $\tilde{c}_2 = 2EhV_0 - c_2$ . Тут  $f_1' + if_2' = \begin{cases} f_1^\circ + if_2^\circ, \lambda \in \gamma_1 \\ \tilde{f}_1 + i\tilde{f}_2, \lambda \in \gamma_3 \\ \bar{f}_1 + i\bar{f}_2, \lambda \in \gamma_5 \\ \hat{f}_1 + i\hat{f}_2, \lambda \in \gamma_7 \end{cases}$ .

Умови силової рівноваги диска [3]

$$\int_{\gamma} f_2'(t) dt = 0; \quad \int_{\gamma} f_1'(t) dt = 0 \tag{9}$$

служать для визначення сталих  $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ .

Контактні і кільцеві зусилля через функції  $f_1', f_2'$  визначаються за формулами [6].

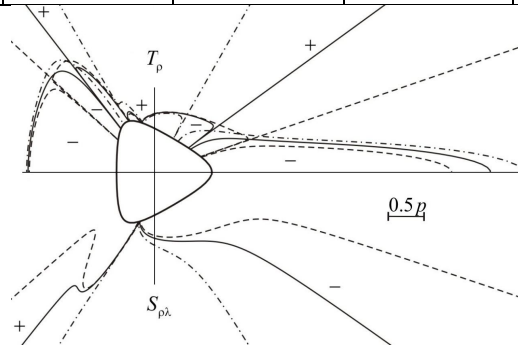
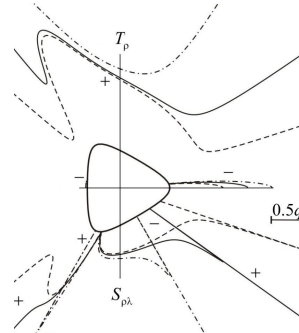
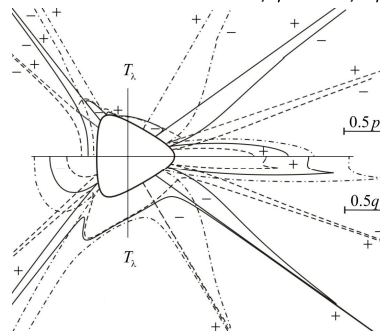
**Наближений розв'язок задачі.** Система (5) – (9) має таку ж структуру, як і відповідна система для випадку одного розрізу [3,4], тому її наближений розв'язок знаходиться методом механічних квадратур та колокації.

Для пластинки з трикутним ( $N=3, \varepsilon=0.2$ ) отвором досліджено вплив на контактні та кільцеві зусилля величини зони спаю. В таблиці 1 наведено значення граничних полярних кутів, які визначають зону контакту  $\Gamma_1$  та  $\Gamma_5$  при  $p=1, q=0; p=0, q=1; \alpha_1=\alpha_3, \beta_1=\beta_3$ . Результати числового розрахунку проілюстровано на рис. 2-4.

Таблиця 1.

Граничні величини зон контакту  $\Gamma_1$  та  $\Gamma_5$ 

$\beta_1 = -\alpha_1$ (град)	$\varepsilon = 0.2$			
	$\beta_0^* = -\alpha_0^*$ (град)		$\beta_2^* = -\alpha_2^*$ (град)	
	$p=1; q=0$	$p=0; q=1$	$p=1; q=0$	$p=0; q=1$
30	52.53	5.05	56.87	13.27
45	32.43	4.80	51.84	0.00
60	17.76	4.40	41.28	0.00

Рис. 2. Епюри розподілу зусиль  $T_\rho/p, S_{\rho\lambda}/p$  при  $\varepsilon=0.2$ Рис. 3. Епюри розподілу зусиль  $T_\rho/q, S_{\rho\lambda}/q$  при  $\varepsilon=0.2$ Рис. 4. Епюри розподілу зусиль  $T_\lambda/p, T_\lambda/q$  при  $\varepsilon=0.2$ 

©А.О.Сяський, Н.В.Шинкарчук

Аналіз результатів розрахунку приводить до таких **висновків**:

- із збільшенням розмірів ділянок спаю пластинки і диска зони контакту зменшуються;
  - максимальні нормальні зусилля в зонах контакту виникають у точках контуру з найбільшою кривиною;
  - контактні і кільцеві зусилля на кінцях зон спаю приймають необмежені значення.
1. Грилицький Д.В. Основные граничные задачи теории упругости для бесконечной изотропной пластинки со впаянной круглой изотропной шайбой с разрезами на линии спаю. / Д.В. Грилицький // В кн. : Питання механіки та математики. Львов: Изд-во Львов.ун-та, 1969, с.15-24.
  2. Грилицький Д.В. Напруження в пластинках з коловою лінією розмежування граничних умов / Д.В. Грилицький, Р.М. Луцишин. – Львів: Вид-во “Вища школа” при ЛДУ, 1975. – 111 с.
  3. Сяський А. Мішана контактна задача для ізотропної пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска / А. Сяський, Н. Шинкарчук // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – Тернопіль, 2011. – Т.16, № 1. – С. 16-21.
  4. Сяський А.О. Мішана контактна задача для пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска / А.О. Сяський, Н.В. Шинкарчук // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 7 (16). – Рівне : РДГУ, 2010. – С. 199–209.
  5. Комбель С. Посадка жорсткого диска в еліптичний отвір нескінченної ортотропної пластинки / С. Комбель // Машинознавство. – 2003. – № 8. – С. 25–31.
  6. Батишкіна Ю.В. Часткове підкріплення криволінійного отвору в нескінченній пластинці тонким пружним стержнем / Ю.В. Батишкіна, А.О. Сяський // Волинський математичний вісник. – 2002. – Вип 9. – С. 4 – 11.