УДК 539.3

В.М.Трач, А.В.Подворний, М.М.Хоружий
Національний університет водного господарства та природокористування

ПОТЕНЦІАЛЬНА ЕНЕРГІЯ ДЕФОРМАЦІЇ ПРУЖНИХ АНІЗОТРОПНИХ НЕТОНКИХ ОБОЛОНОК

Наведено підхід стосовно отримання потенціальної енергії деформації нетонких анізотропних оболонок матеріал яких має пружні властивості, що знаходяться в одній площині. Отриманий потенціал є найбільш загальним для таких оболонок однорідних чи неоднорідних за товщиною. Його достатньо для побудови канонічної системи рівнянь нелінійної теорії оболонок при використанні перетворення Лагранжа та варіаційного принципу.

В роботах [1,2], напевне, вперше розроблялась ідея побудови варіаційних принципів та систем канонічних рівнянь нелінійної теорії анізотропних оболонок за допомогою методів аналітичної механіки. Згідно з нею, щоб побудувати всі необхідні співвідношення теорії достатньо мати одну скалярну функцію. Такою функцією є потенціальна енергія деформації оболонки як тривимірного тіла. Якщо прийняти гіпотези про розподіл переміщень за товщиною оболонки, то цього достатньо, щоб побудувати не лише кінематичні співвідношення, але й рівняння рівноваги. Такий підхід було застосовано в роботі [3] для побудови нелінійної теорії тонких анізотропних оболонок. Тому підемо цим шляхом і отримаємо потенціальну енергію деформації нетонких анізотропних оболонок.

Відомо [4], що енергія деформації довільного тіла при використанні умов закону Гука точно буде представлена у такому вигляді:

$$V=\frac{1}{2}\int_{\Omega}(\sigma_{11}\varepsilon_{11}+\sigma_{22}\varepsilon_{22}+\sigma_{33}\varepsilon_{33}+\sigma_{12}\varepsilon_{12}+\sigma_{13}\varepsilon_{13}+\sigma_{23}\varepsilon_{23})d\Omega, \tag{1}$$

де σ_{ij} – напруження на трьох взаємно перпендикулярних площадках елемента, виділеного з пружного тіла; ε_{ij} – відповідні до них відносні видовження та зсуви (деформації); $d\Omega$ – об'єм виділеного у вигляді паралелепіпеда елемента.

Згідно з теорією Тимошенко покладемо $\varepsilon_{i3}\neq 0, i=1,2$, а також $\sigma_{33}=0$. Це дає можливість записати (1) так

$$\begin{gathered}V=\frac{1}{2}\int\int\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\sigma_{11}\varepsilon_{11}+\sigma_{22}\varepsilon_{22}+\sigma_{12}\varepsilon_{12}+\sigma_{13}\varepsilon_{13}+\\+\sigma_{23}\varepsilon_{23})A_1A_2\left(1-\frac{z}{R_1}\right)\left(1-\frac{z}{R_2}\right)dzd\alpha_1d\alpha_2.\end{gathered} \tag{2}$$

Анізотропні оболонки виготовляються, як правило, методом намотування або викладки на оправку окремих шарів, що мають незначну товщину. Це дозволяє вважати, що найнижчий рівень симетрії матеріалу таких шарів складає наявність однієї площини, в якій механічні властивості симетричні. Нехай вісь z перпендикулярна до цієї площини. Тоді співвідношення закону Гука для анізотропного матеріалу з однією площиною симетрії мають вигляд [5]:

$$\begin{aligned}&\sigma_{11}=a'_{11}\varepsilon_{11}+a'_{12}\varepsilon_{22}+a'_{13}\varepsilon_{33}+a'_{16}\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{23}=a'_{44}\varepsilon_{23}+a'_{45}\varepsilon_{13},\\&\sigma_{22}=a'_{12}\varepsilon_{11}+a'_{22}\varepsilon_{22}+a'_{23}\varepsilon_{33}+a'_{26}\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{13}=a'_{45}\varepsilon_{23}+a'_{55}\varepsilon_{33},\\&\sigma_{33}=a'_{13}\varepsilon_{11}+a'_{23}\varepsilon_{22}+a'_{33}\varepsilon_{33}+a'_{36}\varepsilon_{12},\\&\sigma_{12}=a'_{16}\varepsilon_{11}+a'_{26}\varepsilon_{22}+a'_{36}\varepsilon_{33}+a'_{66}\varepsilon_{12}.\end{aligned} \tag{3}$$

З умови $\sigma_{33}\approx 0$ знайдемо:

$$\varepsilon_{33}=-\frac{a'_{13}}{a'_{33}}\varepsilon_{11}-\frac{a'_{23}}{a'_{33}}\varepsilon_{22}-\frac{a'_{36}}{a'_{33}}\varepsilon_{12}. \tag{4}$$

Підставимо цей вираз в співвідношення (3). Тоді стосовно співвідношень пружності для оболонок, згідно з теорією Тимошенко, для кожного шару будемо мати:

$$\begin{aligned} &\sigma_{11} = a_{11}\varepsilon_{11} + a_{12}\varepsilon_{22} + a_{16}\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = a_{44}\varepsilon_{23} + a_{45}\varepsilon_{13}, \\ &\sigma_{22} = a_{12}\varepsilon_{11} + a_{22}\varepsilon_{22} + a_{26}\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{13} = a_{45}\varepsilon_{23} + a_{55}\varepsilon_{33}, \\ &\sigma_{12} = a_{16}\varepsilon_{11} + a_{26}\varepsilon_{22} + a_{66}\varepsilon_{12}, \end{aligned} \tag{5}$$

де

$$\begin{aligned} a_{11} &= a'_{11} - \frac{(a'_{13})^2}{a'_{33}},\ a_{12} = a'_{12} - \frac{a'_{13}a'_{23}}{a'_{33}},\ a_{44} = -\frac{a'_{44}}{a'_{44}a'_{55} - (a'_{45})^2}, \\ a_{22} &= a'_{22} - \frac{(a'_{23})^2}{a'_{33}},\ a_{26} = a'_{26} - \frac{a'_{23}a'_{36}}{a'_{33}},\ a_{45} = -\frac{a'_{45}}{a'_{44}a'_{55} - (a'_{45})^2}, \\ a_{16} &= a'_{16} - \frac{a'_{13}a'_{36}}{a'_{33}},\ a_{66} = a'_{66} - \frac{(a'_{36})^2}{a'_{33}},\ a_{55} = -\frac{a'_{55}}{a'_{44}a'_{55} - (a'_{45})^2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Якщо переміщення u, υ, w представити, згідно з гіпотезами Тимошенко, у вигляді лінійних розкладів за координатою *z:*

$$u = u_0 + z\theta_1,\ \upsilon = \upsilon_0 + z\psi_1,\ w = w_0 + z\psi_2, \tag{7}$$

то для деформацій з точністю до квадратичних членів в [4] отримано:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{11} = \hat{\varepsilon}_{11} + zk_{11} + z^2\nu_{11}, \quad \varepsilon_{22} = \hat{\varepsilon}_{22} + zk_{22} + z^2\nu_{22}, \\ &\varepsilon_{12} = \hat{\varepsilon}_{12} + zk_{12} + z^2\nu_{12}. \end{aligned} \tag{8}$$

В цих виразах приймемо, що

$$\hat{\varepsilon}_{11} = \varepsilon_{11} + \frac{1}{2}\theta_1^2, \quad \hat{\varepsilon}_{22} = \varepsilon_{22} + \frac{1}{2}\theta_2^2,$$

$$k_{11} = \chi_1 + \varepsilon_1\chi_1 + \theta_1\chi_{13}, \quad k_{22} = \chi_2 + \varepsilon_2\chi_2 + \theta_2\chi_{23}, \quad k_{12} = \tau_1^* + \tau_2^*,$$

$$\nu_{11} = \frac{1}{R_1}k_{11} + \frac{1}{2}(\chi_1^2 + \tau_1^2 + \chi_{13}^2),\ \nu_{22} = \frac{1}{R_2}k_{22} + \frac{1}{2}(\chi_2^2 + \tau_2^2 + \chi_{23}^2),$$

$$\nu_{12} = \frac{1}{R_1}\tau_1^* + \frac{1}{R_1}\tau_2^* + \chi_1\tau_2 + \chi_{13}\tau, \tag{9}$$

де $\chi_1 = k_1 + \dfrac{\varepsilon_1}{R_1},\ \chi_2 = k_2 + \dfrac{\varepsilon_2}{R_2},\ \tau_1 = t_1,\ \tau_2 = t_2,$

$$\tau_1^* = \tau_1 + \varepsilon_2\tau_1 + \theta_2\chi_{13},\ \tau_2^* = \tau_2 + \varepsilon_1\tau_2 + \theta_1\chi_{23},$$

$$\chi_{13} = k_{13} + \frac{1}{R_1}\theta_1,\ \chi_{23} = k_{23} + \frac{1}{R_2}\theta_2.$$

Якщо вважати, як це прийнято в лінійній теорії, що квадратами всіх величин в наведених співвідношеннях можна знехтувати, то отримаємо для деформацій та приростів кривин і кручення відомі вирази, приведені в [6].

Функція χ_2, яка присутня в деяких виразах, для деформацій та приростів кривин, може бути визначена з рівняння, якщо врахувати, що

$$\varepsilon_{33} = \chi_2 + \frac{1}{2}(\chi_2^2 + \theta^2 + \chi_1^2) = 0 \tag{10}$$

В теорії оболонок Тимошенко прийнято, що $\varepsilon_{33} << \varepsilon_{ij}\ (i, j = 1,2)$. Тому в усіх інших співвідношеннях, крім (5), $\varepsilon_{33} = 0$. Як показали дослідження [8] в задачах стійкості можна обмежитись нелінійністю виразів для тангенціальних деформацій, зберігаючи у виразах кривин і кручення лише лінійні складові.

Маючи представлення (8) з визначеними коефіцієнтами $\hat{\varepsilon}_{ij}$, k_{ij}, ν_{ij} через переміщення, можемо отримати співвідношення пружності для оболонок, підставивши їх в співвідношення (5) та проінтегрувавши за товщиною. В роботі [9] показано, що для цієї мети краще використати вираз потенціальної енергії. Йдучи таким шляхом, після підстановки розкладів (8) в співвідношення (5), то останні використаємо в запису потенціальної енергії (2) та здійснимо інтегрування за координатою z. Представимо наведені вище залежності в векторно-матричному вигляді. Введемо вектори

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix}, \ \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{bmatrix} \text{ і матрицю } a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} & & \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} & & \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} & & \\ & & & a_{44} & a_{45} \\ & & & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Тоді співвідношення (5) матимуть вигляд

$$\sigma = a\varepsilon, \tag{12}$$

а потенціальну енергію деформацій (2) запишемо так

$$V = \frac{1}{2}\iint\int_z \varepsilon^T a\varepsilon \left(1 - \frac{z}{R_1}\right)\left(1 - \frac{z}{R_2}\right) A_1 A_2 dz d\alpha_1 d\alpha_2, \tag{13}$$

де символ “T” позначає операцію транспонування. Вектор ε з урахуванням розкладів компонентів деформації за координатою z також можна представити у вигляді

$$\varepsilon = \hat{\varepsilon} + z\chi + z^2\nu, \tag{14}$$

де $\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{11} \\ \hat{\varepsilon}_{22} \\ \hat{\varepsilon}_{12} \\ \hat{\varepsilon}_{23} \\ \hat{\varepsilon}_{13} \end{bmatrix}, \ \chi = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \nu = \begin{bmatrix} \nu_{11} \\ \nu_{22} \\ \nu_{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Якщо ввести такі позначення окремих частин потенціальної енергії

$$Э_0 = \frac{1}{2}\hat{\varepsilon}^T a\hat{\varepsilon} + \frac{1}{2}\hat{\varepsilon}_3^T a\hat{\varepsilon}_3, \ Э_1 = 2\hat{\varepsilon}^T a\chi, \ Э_2 = 2\hat{\varepsilon}^T a\nu + \chi^T a\chi, \tag{15}$$

то енергія деформації (13) може бути подана у вигляді

$$V = \frac{1}{2}\iint\int_z (Э_0 + zЭ_1 + z^2Э_2)(1 - 2Hz + kz^2) dz d\alpha_1 d\alpha_2, \tag{16}$$

де $H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ – середня кривина, $k = \frac{1}{R_1R_2}$ – гауссова кривина поверхні, від якої йде відлік координати z.

В (16) проведемо інтегрування за координатою z. У виразах для $Э_i$, $i = 0, 1, 2$, залежним від координати z можуть бути лише константи пружності a_{ij}. Проінтегруємо відповідні матриці за цією координатою. Отримаємо матриці жорсткості на розтяг-стиск, взаємного впливу тангенціальних і згинальних деформацій, згину та кручення відповідно

$$C = \int_z a dz, \quad B = \int_z z a dz, \quad D = \int_z z^2 a dz. \tag{17}$$

Потенціальна енергія деформації оболонки у двовимірному представленні набуває вигляду функціонала

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{2}\iint \big[& \varepsilon^T (C - 2HB + kD)\varepsilon + \hat{\varepsilon}_3^T (C - 2HB + kD)\hat{\varepsilon}_3 + \\ & + 2\hat{\varepsilon}^T (B - 2HD)\chi + \chi^T D\chi + 2\varepsilon^T D\nu \big] A_1 A_2 dz d\alpha_1 d\alpha_2. \end{aligned} \tag{18}$$

Компоненти вектора V виражаються через компоненти вектора χ_2, який є складовою ε_{33}

$$V = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} k_{11} \\ \dfrac{1}{R_2} k_{12} \\ \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} \right) \tau \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \gamma_m \chi_2 \text{, де } \gamma_m = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} & & & & \\ & \dfrac{1}{R_1} & & & \\ & & H & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Враховуючи цей факт, запишемо

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{2} \int\int \big[& \varepsilon^T (C - 2HB + kD)\varepsilon + \hat{\varepsilon}_3^T (C - 2HB + kD)\hat{\varepsilon}_3 + \\ & + 2\hat{\varepsilon}^T (B - 2HD + D\gamma_m)\chi + \chi^T D\chi \big] A_1 A_2 dz d\alpha_1 d\alpha_2 . \end{aligned} \tag{20}$$

Вираз потенціальної енергії (20) може бути використаний для отримання основних співвідношень теорії анізотропних оболонок. В роботах [4,9] як міра деформації згину і кручення використовуються параметри k_{11}, k_{22}, k_{12}. Врахуємо, що

$$\chi = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} & \varepsilon_{11} \\ \dfrac{1}{R_2} & \varepsilon_{22} \\ 2H & \varepsilon_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{\chi} + \rho_m \varepsilon \text{, де } \rho_m = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} & & & & \\ & \dfrac{1}{R_1} & & & \\ & & 2H & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Тоді тримаємо

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{2} \int\int \big[& \varepsilon^T (C - 2HB + kD + 2(B - 2HD)\rho_m + \\ & + \hat{\varepsilon}_3^T (C - 2HB + kD)\hat{\varepsilon}_3 + 2D\alpha_m + \rho_m^T D\rho_m \big] \varepsilon + \\ & + \big[2\varepsilon^T (B - 2HD + D\gamma_m + \rho_m D)\tilde{\chi} + \tilde{\chi}_m^T D\chi \big] A_1 A_2 dz d\alpha_1 d\alpha_2 , \end{aligned} \tag{22}$$

де, окрім введених позначень, маємо

$$\alpha_m = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1^2} & & & & \\ & \dfrac{1}{R_2^2} & & & \\ & & 4H^2 - 2k & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Перейдемо до представлення потенціальної енергії деформації в координатному вигляді. Виконавши в (22) всі операції над компонентами векторів і матриць, отримаємо

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{2} \iint \big[& C_{11}^* \varepsilon_{11}^2 + 2C_{12}^* \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + C_{22}^* \varepsilon_{22}^2 + 2C_{16}^* \varepsilon_{11}\varepsilon_{12} + 2C_{26}^* \varepsilon_{22}\varepsilon_{12} + C_{16}^* \varepsilon_{12}^2 + \\ & + 2B_{11}^* \varepsilon_{11}\kappa_1 + 2B_{12} \left(\varepsilon_{11}\kappa_{22} + \varepsilon_{22}\kappa_{11} \right) + 2B_{22}^* \varepsilon_{22}\kappa_{22} + 2B_{16}^* \varepsilon_{11} k_{12} + \\ & + 2B_{26}^* \varepsilon_{22} k_{12} + 2B_{26}^{*'} \varepsilon_{12}\kappa_{22} + 2B_{16}^{*'} \varepsilon_{12}\kappa_{11} + 2B_{66}^* \varepsilon_{12} k_{12} + \\ & + 2D_{11} k_{11}^2 + 2D_{12} k_{11} k_{12} + 2D_{16} \kappa_{11} k_{12} + 2D_{26} \kappa_{22} k_{12} + D_{22} \kappa_{22}^2 + D_{66} k_{12}^2 + \big] \\ & + C_{44}^* \varepsilon_{23}^2 + C_{45}^* \varepsilon_{23}\varepsilon_{13} + C_{55}^* \varepsilon_{13}^2 \big] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 . \end{aligned} \tag{24}$$

Жорсткості в цьому виразі залежать від геометричних параметрів оболонки. Це є наслідком того, що при побудові (24) враховувались залежність метрики оболонки від координати *z*.

Вираз (24) в лінійному варіанті співвідношень для ізотропних оболонок співпадає з залежністю (9.10) монографії [9]. Спрощення виконані в [9], дозволяють отримати найбільш простий варіант співвідношень пружності, що задовольняють шостому рівнянню рівноваги. При побудові пружного потенціалу анізотропних оболонок в [7] проведені аналогічні спрощення. Якщо у виразі (24) знехтувати складовими впливу поперечних зсувів, то потенціальна енергія деформації збігається з такою, що отримана у [3].

Пружний потенціал вигляду (24) є найбільш загальним для анізотропних оболонок однорідних чи неоднорідних за товщиною. Його достатньо [1,2] для побудови канонічної системи рівнянь нелінійної теорії оболонок при використанні перетворення Лагранжа та побудові варіаційного принципу, що є гамільтоновою формою принципу мінімуму потенціальної енергії.

1. Кильчевский Н.А. Основы аналитической механики оболочек /Кильчевский Н.А.//- Киев: Изд-во АН УССР. - 1963. – 354 с.
2. Кильчевский Н.А. Аналитическая механика континуальних систем / Кильчевский Н.А., Кильчевская Г.А., Ткаченко Н.Е.//-К.: Наук. Думка, 1979. -188 с.
3. Баженов В.А. /Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок/Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М.//-К.: Каравела, 2010. – 352 с.
4. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости/ Новожилов В.В.// — М.Л. ОГИЗ, 1948. — 211 с.
5. Лехницкий А.К. Теория упругости анизотропного тела /Лехницкий А.К.//-М.: Наука, 1977. - 416 с.
6. Ванин Г.А. Устойчивость оболочек из композиционных материалов с несовершенствами/ Ванин Г.А., Семенюк Н.П.//—К.: Наук. думка, 1987.—200 с.
7. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек /Амбарцумян С.А.//–М.: Наука, 1974.– 448 с.
8. Семенюк Н.П. Уточненный вариант нелинейной теории оболочек типа Тимошенко и его приложение к расчету начального закритического поведений длинных цилиндрических оболочек/ Семенюк Н.П.// Прикл. механика. — 1990. — 26, № 8. — С. 47 — 53.
9. Алфутов Н.А. Моделирование процессов деформирования волокнистых металлокомпозитов/ Алфутов Н.А., Дымников И. А.// Композиционные материалы: Справочник / В.В.Васильев, В.Д.Протасов, В.В.Болотин и др.; Под общ. ред. В.В.Васильева, Ю.М.Тарнопольского. – М.: Машиностроение ние, 1990. – 512 с.