

УДК 539.3

В.М.Флячок, У.В.Жидик

Українська академія друкарства,

Національний університет "Львівська політехніка"

ТЕРМОПРУЖНИЙ АНАЛІЗ НЕОДНОРІДНИХ АНІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИН

Для неоднорідних анізотропних прямокутних пластин записано нестационарні рівняння теплопровідності й термопружності з відповідними крайовими умовами. Методами інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа знайдено розв'язок нестационарної задачі теплопровідності та динамічної задачі термопружності шарнірно опертої ортогонально армованої пластини за локального нагріву. Числові результати наведено для графітоепоксидного композита.

Пластинки із композитних анізотропних матеріалів часто використовуються як елементи конструкцій у різних областях сучасної техніки. В процесі експлуатації вони зазнають дії нестационарних силових і температурних навантажень. Тому розрахунок таких конструкцій є важливою науково-технічною задачею. Анізотропні композитні пластинки найповніше досліджені для силових задач [1, 6, 9]. Температурні задачі як для однорідних, так і для неоднорідних матеріалів, розв'язувались, в основному, на основі класичних рівнянь [5, 7, 8]. Однак для використання композитних матеріалів з високою анізотропією фізико-механічних властивостей потрібні розширені моделі розрахунку пластин [2, 3, 10].

Мета статті – дослідити термопружний стан ортогонально армованої шаруватої анізотропної прямокутної пластинки за її локального нагріву. Для цього застосували модель неоднорідних анізотропних пластин [2, 3], яка враховує фізико-механічні характеристики анізотропного матеріалу у трансверсальному напрямку.

Основні рівняння теорії неоднорідних по товщині анізотропних пластин. Розглянемо прямокутну з розмірами $a_1 \times a_2$ пластинку сталі товщини $2h$, виготовлену з неоднорідного у поперечному напрямку анізотропного матеріалу. Точки простору пластини віднесемо до декартової системи координат x_1, x_2, z з початком у серединній поверхні і координатою z по товщині. Цим координатам надалі відповідатимуть індекси 1, 2, 3, а кома перед індексами 1, 2 позначатиме частинні похідні за координатами x_1, x_2 відповідно. Крапка над функцією позначатиме операцію диференціювання за часом τ .

Нехай пластинка перебуває під дією зовнішнього силового навантаження, а також нагрівається внутрішніми джерелами тепла і зовнішнім середовищем шляхом конвективного теплообміну через бокові поверхні $z = \pm h$. Для дослідження динамічної поведінки такої пластинки виведемо основні рівняння, приймаючи припущення про лінійний характер розподілу переміщень і температури по товщині [2].

$$\mathbf{U}(x_1, x_2, z, \tau) = \mathbf{u}(x_1, x_2, \tau) + z \boldsymbol{\Gamma}(x_1, x_2, \tau), \quad (1)$$

$$t(x_1, x_2, z, \tau) = T_1(x_1, x_2, \tau) + \frac{z}{h} T_2(x_1, x_2, \tau), \quad (2)$$

де $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ – вектор переміщення точок серединній поверхні; $\boldsymbol{\Gamma} = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ – вектор кутів повороту нормалі γ_1, γ_2 і поперечної нормальної деформації γ_3 ; T_n ($n = 1, 2$) – інтегральні

характеристики температури $T_n = \frac{2n-1}{2h^n} \int_{-h}^h t z^{n-1} dz$.

Тоді, виходячи із тривимірних рівнянь лінійної термопружності, одержимо такі основні рівняння і співвідношення теорії температурних напружень розглядуваних пластин.

Геометричні співвідношення, які пов'язують на серединній поверхні компоненти деформації ε_{ij} , γ_j з компонентами узагальнених переміщень u_i , γ_i

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= u_{1,1}, \varepsilon_{22} = u_{2,2}, \varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1}, \varepsilon_{13} = \gamma_1 + u_{3,1}, \\ \varepsilon_{23} &= \gamma_2 + u_{3,2}, \varepsilon_{33} = \gamma_3, \mathcal{K}_{11} = \gamma_{1,1}, \mathcal{K}_{22} = \gamma_{2,2}, \\ \mathcal{K}_{12} &= \gamma_{2,1} + \gamma_{1,2}, \mathcal{K}_{13} = \gamma_{3,1}.\end{aligned}\quad (3)$$

С п і в і д н о ш е н н я п р у ж н о с т і для матеріалу, який має в кожній точці одну площину пружної і теплової симетрії, паралельну серединній поверхні запишемо у матричному вигляді

$$N = AE + BK - N^t, \quad M = B^* E + DK - M^t, \quad Q = k'G \Psi, \quad (4)$$

де k' - коефіцієнт зсуву; N, M, Q - матриці-стовпчики зусиль N_{ij} і моментів M_{ij} ; E, K, Ψ - матриці-стовпчики компонентів деформації серединної поверхні пластини; A, D, B, B^*, G - матриці жорсткості відповідно на розтяг, на згин та взаємозв'язку між розтягом і згином; N^t, M^t - матриці температурних членів. Компоненти матриць жорсткості і температурних членів через коефіцієнти пружності $c_{ij}(z)$ і термopужності $\beta'_{ij}(z) = c_{ij}(z)\alpha'_{ij}(z)$ анізотропного матеріалу виражаються формулами

$$\begin{aligned}\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\} &= \int_{-h}^h \{1, z, z^2\} c_{ij}(z) dz, \\ \{A'_{ij}, B'_{ij}, D'_{ij}\} &= \int_{-h}^h \{1, z, z^2\} \beta'_{ij}(z) dz.\end{aligned}$$

Рівняння руху

$$\begin{aligned}N_{11,1} + N_{12,2} + q_1 &= \rho_1 \ddot{u}_1 + \rho_2 \ddot{\gamma}_1, \quad N_{12,1} + N_{22,2} + q_2 = \rho_1 \ddot{u}_2 + \rho_2 \ddot{\gamma}_2, \\ N_{13,1} + N_{23,2} + N_1^0 u_{3,1,1} + N_2^0 u_{3,2,2} + q_3 &= \rho_1 \ddot{u}_3 + \rho_2 \ddot{\gamma}_3, \\ M_{11,1} + M_{12,2} - N_{13} + m_1 &= \rho_2 \ddot{u}_1 + \rho_3 \ddot{\gamma}_1, \\ M_{12,1} + M_{22,2} - N_{23} + m_2 &= \rho_2 \ddot{u}_2 + \rho_3 \ddot{\gamma}_2, \\ M_{13,1} + M_{23,2} - N_{33} + m_3 &= \rho_2 \ddot{u}_3 + \rho_3 \ddot{\gamma}_3,\end{aligned}\quad (5)$$

де $\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\} = \int_{-h}^h \rho(z) \{1, z, z^2\} dz$ - інтегральні характеристики густини $\rho(z)$; N_1^0, N_2^0 - сталі нормальні зусилля в серединній поверхні, які характеризують початковий напружений стан пластини; q_i, m_i - віднесені до серединної поверхні компоненти векторів зусилля і момента зовнішнього навантаження.

Рівняння теплопровідності без врахування членів з деформаціями [5]

$$\begin{aligned}\Delta_{(1)} T_1 + \Delta_{(2)} T_2 - C^{(1)} \dot{T}_1 - C^{(2)} \dot{T}_2 &= -F_1^t, \\ \Delta_{(2)} T_1 + \Delta_{(3)} T_2 - \Lambda_{33}^{(1)} T_2 / h^2 - C^{(2)} \dot{T}_1 - C^{(3)} \dot{T}_2 &= -F_2^t,\end{aligned}\quad (6)$$

де $\Delta_{(k)} = \Lambda_{11}^{(k)} ()_{,11} + \Lambda_{22}^{(k)} ()_{,22} + 2 \Lambda_{12}^{(k)} ()_{,12}$; $F_n^t = W_n^t - F_n^c$;
 $\{W_k^t, \Lambda_{ij}^{(k)}, C^{(k)}\} = \int_{-h}^h \{w^t, \lambda_{ij}, c_\varepsilon\} \left(\frac{z}{h}\right)^{k-1} dz$ ($k = 1, 2, 3$) - інтегральні характеристики відповідно

джерел тепла $w^t(x_1, x_2, z, \tau)$, тензора теплопровідності $\lambda_{ij}(z)$ і теплоємності $c_\varepsilon(z)$; F_1^c, F_2^c – функції, які залежать від граничних умов на поверхнях $z = \pm h$. У випадку конвективного теплообміну з навколишнім середовищем з температурою $t_c^\pm(x_1, x_2, \tau)$ і коефіцієнтами тепловіддачі $\alpha_z^\pm(x_1, x_2)$ на поверхнях $z = \pm h$ маємо

$$F_n^c = (T_1 - t_1^c)\varepsilon_n^t + (T_2 - t_2^c)\varepsilon_{3-n}^t,$$

де $\varepsilon_n^t = (\alpha_z^+ - (-1)^n \alpha_z^-)$, $t_n^c = \frac{1}{2}(t_c^+ - (-1)^n t_c^-)$, $(n = 1, 2)$.

Рівняння теплопровідності (6) разом з рівняннями руху (5), фізичними (4) і геометричними (3) співвідношеннями складають повну систему рівнянь теорії температурних напружень неоднорідних анізотропних пластин. Для однозначного розв'язання цієї системи на краях пластини $x_1 = 0$, $x_1 = a_1$ і $x_2 = 0$, $x_2 = a_2$ потрібно задати механічні і температурні граничні умови. Для механічних умов задається по одній величині з кожної пари $(N_{11}, u_1), (N_{12}, u_2), (N_{13}, u_3), (M_{11}, \gamma_1), (M_{12}, \gamma_2), (M_{13}, \gamma_3)$ при $x_1 = 0$, $x_1 = a_1$, і по одній величині з кожної пари $(N_{22}, u_2), (N_{12}, u_1), (N_{23}, u_3), (M_{22}, \gamma_2), (M_{12}, \gamma_1), (M_{23}, \gamma_3)$ при $x_2 = 0, x_2 = a_2$. Для температурних умов на кожному краю потрібно задати по дві комбінації величин виду $c_1 T_1 + c_2 T_2 + c_3 \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + c_4 \frac{\partial T_2}{\partial x_1} + c_5 \frac{\partial T_1}{\partial x_2} + c_6 \frac{\partial T_2}{\partial x_2}$, де c_i - сталі, значення яких залежать від роду граничних умов і краю, на якому вони задані. Для нестационарних задач повинні бути задані також початкові умови: $u_k(x_1, x_2, 0), \dot{u}_k(x_1, x_2, 0), \gamma_k(x_1, x_2, 0), \dot{\gamma}_k(x_1, x_2, 0) (k = 1, 2, 3), T_1(x_1, x_2, 0), T_2(x_1, x_2, 0)$.

Підставляючи рівняння пружності (4) у рівняння руху (5) і враховуючи кінематичні співвідношення (3), одержимо систему рівнянь руху в узагальнених переміщеннях, яку запишемо в операторній формі

$$\sum_s^6 L_{js} y_s = b_j \quad (s, j = 1, 2, \dots, 6), \quad (7)$$

де $y_k = u_k; y_{3+k} = \gamma_k (k = 1, 2, 3)$; L_{js} - симетричні диференціальні оператори, які легко можуть бути визначені але з метою скорочення запису тут не наведені. Вільні члени b_j виражаються через температурні характеристики і поверхневе навантаження.

Система рівнянь (7) разом з граничними умовами складає крайову задачу динамічної теорії температурних напружень для неоднорідних анізотропних пластинок у переміщеннях. За відомими переміщеннями визначаємо деформації серединної поверхні зі співвідношень (3), а зусилля і моменти – за рівняннями пружності (4). Температурні напруження в пластинці знаходимо за формулами Дюамеля-Неймана.

Загальний розв'язок динамічної задачі температурних напружень для шаруватої ортогонально армованої шарнірно опертої пластинки.

Розглянемо багатошарову пластинку, складену зі скінченного числа ідеально скріплених між собою тонких армованих волокнами ортотропних шарів з однаковою товщиною і властивостями, матеріальні осі яких орієнтовані під кутом 0° або 90° до осей пластинки. У цьому випадку деякі коефіцієнти, що входять у рівняння термопружності і теплопровідності будуть рівні нулю, а саме:

$$A_{i6} = B_{i6} = D_{i6} = 0 \quad (i = 1, 2, 3); \quad A_{45} = B_{45} = D_{45} = 0;$$

$$A_{12}^t = B_{12}^t = D_{12}^t = \alpha_{12}^t = \lambda_{12} = \Lambda_{33}^{(2)} = C^{(2)} = 0.$$

Нехай краї пластинки шарнірно оперті і підтримуються при нульовій температурі. Тоді граничні умови мають такий вигляд:

при $x_1 = 0$ і $x_1 = a_1$:

$$u_2 = u_3 = \gamma_2 = \gamma_3 = N_{11} = M_{11} = 0, \quad (8)$$

$$T_1 = T_2 = 0; \quad (9)$$

при $x_2 = 0$ і $x_2 = a_2$:

$$u_1 = u_3 = \gamma_1 = \gamma_3 = N_{22} = M_{22} = 0, \quad (10)$$

$$T_1 = T_2 = 0. \quad (11)$$

Задамо також однорідні механічні і температурні початкові умови

$$u_k(x_1, x_2, 0) = \dot{u}_k(x_1, x_2, 0) = 0, \quad \gamma_k(x_1, x_2, 0) = \dot{\gamma}_k(x_1, x_2, 0) = 0, \\ (k = 1, 2, 3), \quad T_1(x_1, x_2, 0) = 0, \quad T_2(x_1, x_2, 0) = 0. \quad (12)$$

Розв'язок системи рівнянь теплопровідності (6) відповідно до граничних (9), (11) і початкових (12) умов знаходимо методом скінчених інтегральних перетворень Фур'є за координатами x_1, x_2 і Лапласа за часом τ . В результаті для трансформант T_{1mn}, T_{2mn} одержимо

$$T_{1mn}(\tau) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^2 \frac{(\theta_i - g_4) Q_{1mn} Z_{1i}(\tau) + g_2 Q_{2mn} Z_{2i}(\tau)}{\theta_i - \theta_l}, \\ T_{2mn}(\tau) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^2 \frac{(\theta_i - g_1) Q_{2mn} Z_{2i}(\tau) + g_3 Q_{1mn} Z_{1i}(\tau)}{\theta_i - \theta_l}. \quad (13)$$

Тут введені позначення

$$\theta_i = \frac{g_1 + g_4}{2} + (-1)^i \sqrt{\frac{(g_1 - g_4)^2}{4} + g_2 g_3}, \\ g_1 = \frac{\Lambda_{11}^{(1)}}{\Lambda_{33}^{(1)}} \mu_m'^2 + \frac{\Lambda_{22}^{(1)}}{\Lambda_{33}^{(1)}} \beta_n'^2 + Bi_1, \quad g_2 = \left(\frac{\Lambda_{11}^{(2)}}{\Lambda_{33}^{(1)}} \mu_m'^2 + \frac{\Lambda_{22}^{(2)}}{\Lambda_{33}^{(1)}} \beta_n'^2 + Bi_2 \right), \\ g_3 = \frac{C^{(1)}}{C^{(3)}} \left(\frac{\Lambda_{11}^{(2)}}{\Lambda_{33}^{(1)}} \mu_m'^2 + \frac{\Lambda_{22}^{(2)}}{\Lambda_{33}^{(1)}} \beta_n'^2 + Bi_2 \right), \quad Bi_i = \frac{\varepsilon_i' h^2}{\Lambda_{33}^{(1)}}, \quad \tau' = \frac{\Lambda_{33}^{(1)} \tau}{C^{(1)} h^2}, \\ g_4 = \frac{C^{(1)}}{C^{(3)}} \left(\frac{\Lambda_{11}^{(3)}}{\Lambda_{33}^{(1)}} \mu_m'^2 + \frac{\Lambda_{22}^{(3)}}{\Lambda_{33}^{(1)}} \beta_n'^2 + Bi_1 + 1 \right), \quad \mu_m' = \frac{\pi m h}{a_1}, \quad \beta_n' = \frac{\pi n h}{a_2},$$

$$Q_{kmn} = \frac{4}{a_1 a_2} \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} F_k^c(x_1, x_2) \sin \mu_m x_1 \sin \beta_n x_2 dx_1 dx_2, \quad (14)$$

$$Z_{kj}(\tau) = \int_0^{\tau'} F_{kj}^c(v) e^{-\theta_j(\tau'-v)} dv, \quad (k, j = 1, 2) \quad (15)$$

де $\mu_m = \pi m / a_1$; $\beta_n = \pi n / a_2$; $m, n = 1, 2, \dots, \infty$; $F_k^c(x_1, x_2)$ і $F_{kj}^c(\tau)$ – функції відповідно координат і часу зовнішнього температурного навантаження.

Вирази для інтегральних характеристик температури через трансформанти матимуть вигляд

$$\{T_1, T_2\} = \sum_m \sum_n \{T_{1mn}, T_{2mn}\}(\tau) \sin \mu_m x_1 \sin \beta_n x_2. \quad (16)$$

Розв'язок системи рівнянь руху (7), який задовольняє механічним граничним умовам (8), (10) і нульовим початковим умовам при відомому температурному полю (16), знаходимо також

методами перетворень Фур'є і Лапласа. В результаті одержимо систему алгебраїчних рівнянь для визначення зображень шуканих функцій \bar{y}_{jmn} . Розв'язки цієї системи запишемо у вигляді

$$\bar{y}_{jmn}(p) = \frac{1}{D(p)} [D_j(p)\bar{T}_{1mn}(p) + D_j^*(p)\bar{T}_{2mn}(p)] \quad (17)$$

Тут рихкою зверху позначено лапласові зображення; p - параметр перетворення Лапласа; $D(p), D_j(p), D_j^*(p)$ - многочлени відносно параметра p , які одержуються при розв'язуванні системи рівнянь методом Крамера.

Оскільки характеристичне рівняння $D(p) = 0$ має шість пар спряжених уявних коренів $p_j = \pm i\omega_j$ ($i = \sqrt{-1}; j = 1, 2, \dots, 6$), то, застосовуючи обернене перетворення Лапласа до (17), знайдемо вирази коефіцієнтів Фур'є для шуканих узагальнених переміщень, а також і самі переміщення. Для прикладу наведемо вираз для прогину

$$u_3(x_1, x_2, \tau) = \sum_m \sum_n \sum_{j=1}^6 \frac{\sin \mu_m x_1 \sin \beta_n x_2}{\omega_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^6 (\omega_k^2 - \omega_j^2)} \times \\ \times \int_0^{\tau} [Q_3(\omega_j)T_{1mn}(v) + Q_3^*(\omega_j)T_{2mn}(v)] \sin \omega_j(\tau - v) dv, \quad (18)$$

де ω_j - безрозмірні власні частоти; $Q_3(\omega_j), Q_3^*(\omega_j)$ - відомі многочлени відносно цих частот.

Числовий приклад. Нехай поверхня $z = h$ пластинки нагрівається зовнішнім середовищем з температурою $t_c^+(x_1, x_2, \tau) = t_c(x_1, x_2)t^+(\tau)$. Поверхня $z = -h$ омивається середовищем з нульовою температурою $t_c^- = 0$. Коефіцієнти тепловіддачі з обох поверхонь $z = \pm h$ приймаємо рівними між собою $\alpha_z^+ = \alpha_z^-$. Поверхневі сили і джерела тепла відсутні.

У випадку рівномірного нагріву зовнішнім середовищем зі сталою температурою $t_c(x_1, x_2) = t^*$ коефіцієнти Фур'є, обчислені за формулою (14), мають вигляд

$$Q_{mn} = \frac{4t^*}{m\pi^2} (1 - \cos \pi m)(1 - \cos \pi n).$$

Для обчислення функцій $Z_{kj}(\tau)$ за формулою (15) розглянемо декілька випадків залежності температури зовнішнього середовища $t^+(\tau)$ від часу.

1. Температура зовнішнього середовища раптово піднімається до значення t^* , залишаючись надалі сталою:

$$t^+(\tau) = t^* S_+(\tau). \quad (19)$$

2. Температура зовнішнього середовища раптово піднімається до t^* , залишаючись сталою протягом відрізка часу $0 < \tau \leq \tau_*$, а потім раптово падає до нуля (спосіб "прямокутника")

$$t^+(\tau) = t^* [S_+(\tau) - S_+(\tau - \tau_*)]. \quad (20)$$

3. Температура зовнішнього середовища протягом відрізка часу $0 < \tau \leq \tau_*$ змінюється по закону синуса.

$$t^+(\tau) = t^* \sin \frac{\pi \tau}{\tau_*} [S_+(\tau) - S_+(\tau - \tau_*)]. \quad (21)$$

4. Температура зовнішнього середовища лінійно протягом відрізка часу $0 < \tau \leq \tau_*$ піднімається до значення t^* , а далі протягом відрізка часу $\tau_* \leq \tau \leq 2\tau_*$ лінійно зменшується до нуля (спосіб "рівнобедреного трикутника").

$$t^+(\tau) = \frac{2t^*}{\tau_*} [\tau S_+(\tau) - 2(\tau - \tau_*) S_+(\tau - \tau_*) + (\tau - 2\tau_*) S_+(\tau - 2\tau_*)]. \quad (22)$$

Обчислення проводилися для квадратної двошарової пластинки ($0^\circ/90^\circ$). За матеріал кожного шару взято графітоепоксидний композит армований волокнами з такими фізико-механічними властивостями [4]: $\nu_{21} = \nu_{31} = \nu_{23} = 0.25$, $E_2 = E_3 = 0.025E_1$, $\alpha'_{22} = \alpha'_{33} = (3 \div 15)\alpha'_{11}$, $\lambda_{22} = \lambda_{33} = 0.5\lambda_{11}$, $G_{23} = 0.2E_3$, $G_{12} = G_{13} = 0.5E_3$. Тут індексом 1 позначено властивості матеріалу у напрямку вздовж волокон, а індексами 2, 3 – у перпендикулярному напрямку. При обчисленнях приймалися такі значення геометричних параметрів: $a_1/a_2 = 1$, $h/a_1 = 0.05$, а також значення коефіцієнта Біо $Bi = 1$ і коефіцієнта зсуву $k' = 5/6$.

Для вказаних параметрів проведено обчислення відношення прогинів шаруватої до однорідної оболонки w'/w'_0 при раптовому прикладанні температури зовнішнього середовища (19) і коефіцієнта динамічності $K_d = w'_{\max}/w'_{\max}{}^{st}$ (відношення максимального динамічного прогину до максимального квазістатичного) при способах (20), (21) і (22) залежності температури від часу.

На рисунку 1 проілюстровано вплив неоднорідності матеріалу (відношення максимального прогину неоднорідної оболонки w' до максимального прогину однорідної w'_0) в залежності від ступеня анізотропії (відношення модулів пружності E_1/E_3 і коефіцієнтів лінійного теплового розширення $\alpha'_{33}/\alpha'_{11}$).

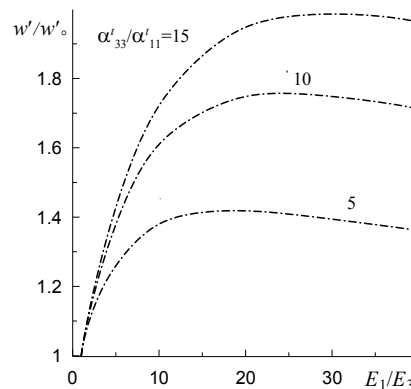


Рис. 1. Залежність відносного прогину від параметрів анізотропії.

Із аналізу числових результатів і рисунка видно, що неоднорідність структури пластинки збільшує прогини, тобто зменшує ефективну жорсткість. Цей вплив також зростає зі збільшенням модуля пружності у напрямку волокон армування і збільшенням коефіцієнта лінійного теплового розширення у перпендикулярному напрямку. Так, при $E_1/E_3 = 10$, $\alpha'_{33}/\alpha'_{11} = 5$ прогин двошарових пластини у порівнянні з однорідною збільшився на 38%, а при $E_1/E_3 = 40$, $\alpha'_{33}/\alpha'_{11} = 15$ – на 96%. В таблиці 1 наведено значення коефіцієнта динамічності K_d для максимального прогину в центрі пластинки для різних значень безрозмірного розтягуючого зусилля $\tilde{N}_1^0 = N_1^0/E_1h$ для трьох варіантів залежності температури зовнішнього середовища від часу.

Таблиця 1.

Залежність коефіцієнта динамічності прогину $K_d = w'_{max}/w'_{max}{}^{st}$ від безрозмірного розтягуючого зусилля \tilde{N}_1^0 для різних способів нагрівання від часу

\tilde{N}_1^0	Спосіб (20)	Спосіб (21)	Спосіб (22)
0	2,05	1,89	1,78
0,2	2,26	1,19	1,86
0,4	2,72	2,53	2,19
0,6	2,94	2,72	2,45

Із аналізу числових результатів і таблиці видно, що початкове зусилля в площині пластинки суттєво впливає на коефіцієнт динамічності. Конкретний характер впливу залежить від кількості та орієнтації шарів, а також від способу нагрівання пластинки.

Висновки. Розвинута теорія динамічної термопружності неоднорідних анізотропних пластин, яка враховує фізико-механічні характеристик матеріалу у поперечному напрямку. Методами скінченного перетворення Фур'є і інтегрального перетворення Лапласа розв'язано динамічну задачу для ортогонально армованої пластинки шаруватої структури, що нагрівається зовнішнім середовищем шляхом конвективного теплообміну. Досліджено вплив динамічних ефектів, вплив попереднього напруження, ступеня анізотропії та ефектів від неоднорідності на прогини пластини. Показано, що неоднорідність призводить до зменшення ефективної жорсткості пластинки. Величина цього впливу залежить від ступеня анізотропії матеріалу, кількості шарів та порядку їх розміщення. Динамічні ефекти залежать від геометричних параметрів пластинки, величини і знаку попереднього напруження та від способу прикладання температурного навантаження. Як перспективні напрямки відзначимо дослідження термопружних пластинок з неперервною неоднорідністю по товщині та із залежними від температури фізико-механічними властивостями.

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967.– 268 с.
2. Жидик У. В. Математичне моделювання термомеханічної поведінки неоднорідних анізотропних оболонок // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. Вип. 57. – С. 72-75.
3. Никилишин М.М., Жидик У.В. Дослідження термопружного стану неоднорідних анізотропних пластинок // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: в 2-х т. – Львів. 2006 – Т.1. – С. 146-149.
4. Композиционные материалы. Справочник. –М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
5. Подстригач Я. С., Ломакин Р.Н., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры.– М.: Наука, 1984. – 368 с.
6. Уитни, Пэйгано Деформация сдвига в неоднородных анизотропных пластинках // Прикладная механика. Изд-во "Мир". – 1970, № 4. – С. 131-136.
7. Keene F. W., Hetnarsky R. B. Bibliography on thermal stresses in shells // J.. Thermal Stresses. – 1990. V. 13, No. 4. – P. 341-531.
8. Wu C.H., Tauchert T. R. Thermoelastic analysis of laminated plates. 2: Antisymmetric cross-ply and angle-ply laminates // J. Thermal Stresses. – 1980. V. 3, No. 3. – P. 365-378.
9. Sun C.T., Whitney J.M. Dynamic response of laminated composite plates under initial stress // AIAA Journal. – 1976. V.14, No. 2. – P. 268-269.
10. Zukas J. A. Effects of transverse normal and shear strains in orthotropic shells // AIAA Journal. – 1974. V.12, No. 12. – P. 1753-1755.