В.В.Божидарнік, О.В.Максимович, А.Д.Іващук
Луцький національний технічний університет

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ШТАМПУ У ПІВПЛОЩИНІ З ТРІЩИНАМИ НА ОСНОВІ МОДИФІКОВАНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розроблено методику визначення напруженого стану біля тріщин у півплощині, що взаємодіє із жорстким гладким штампом. Методика базується на методі інтегральних рівнянь і враховує контакт берегів тріщин. Інтегральні рівняння побудовані таким чином, що умови на прямолінійній межі півплощини, в тому числі і під штампом, задовольняються тотожно. Отримані результати для деяких часткових випадків добре узгоджуються із відомими в літературі даними.

Розглянута задача визначення напружень у півплощині з тріщинами, яка перебуває під дією гладкого штампу. При дослідженнях враховано контакт берегів тріщин. Поставленій проблемі в літературі присвячено значна кількість робіт, детальний огляд яких наведено в [6]. Однак, в них, як правило, умови контакту задовольнялись наближено – наперед задавався розподіл контактних напружень (який справедливий для суцільної півплощини) або приймались певні допущення. Крім цього, в більшості робіт не враховувався контакт берегів тріщин.

Для визначення напруженого стану біля тріщин у пластинках складної форми широко застосовують метод граничних інтегральних рівнянь [1,5]. Значно підвищується ефективність цього методу при побудові інтегральних рівнянь, ядра в яких забезпечують автоматичне виконання умов на деяких із границь пластинки [1,2,5]. Таким чином у літературі досліджувались напруження біля тріщин у пластинках з еліптичним отвором, круговій та кільцевій пластинці, півплощині, смузі. У роботі побудовано аналогічні інтегральні рівняння для дослідження напруженого стану біля тріщин, що розміщені біля штампу у півплощині. Підкреслимо, що основною перевагою таких рівнянь є те, що вони записуються тільки відносно невідомих на кривих, на яких розміщені тріщини. При цьому граничні умови на прямолінійній межі, в тому числі і під штампом, задовольняються тотожно, що дозволяє підвищити точність розв’язку.

Постановка задачі. Розглянемо півплощину *y<0* із тріщинами, що взаємодіє при $|x-c|<a$ із штампом, до якого прикладена сила S_y та момент *M*. Приймемо, що півплощина навантажена на нескінченності зусиллями p, які діють паралельно до осі *Ox* та зосередженими силами (X_j, Y_j), які діють у внутрішніх точках області (a_j,b_j) $(j=1,...,J)$; зусиллями q_T, які прикладені до берегів тріщин, що приймаються однаковими на протилежних берегах. Тут і далі введено позначення $q_\Gamma = N_\Gamma + iT_\Gamma$ - вектор напружень у точках, що лежать на деякій неперервній кривій Γ, де N_Γ і T_Γ – проекції, вектора внутрішніх сил на зовнішню нормаль та дотичну до кривої.

Будемо розглядати штампи, що мають плоску або кругову форму, який перед навантаженням дотикається в початку координат. Приймемо, що відома сила S_y, яка прикладена до штампу та момент відносно центру – *M.* Будемо враховувати, що в процесі навантаження центр кругового штампу може зміститись в горизонтальному напрямку на деяку величину *c* (для плоского штампу $c=0$). В зв’язку з малістю області контакту в порівнянні з радіусом *R* основу штампу будемо описувати рівнянням $f(x)=(x-c)^2/(2R)$.

Для розв'язування задачі використаємо алгоритм, який ґрунтується на методі інтегральних рівнянь, що побудовані на ядрах, які автоматично задовольняють умовам на межі отвору.

Інтегральні рівняння задач теорії пружності для пластинок з тріщинами будують шляхом введення комплексних потенціалів для суцільної пластинки, які враховують стрибки переміщень вздовж кривих, що лежать на тріщинах. Такі інтегральні представлення для комплексних потенціалів для нескінченних пластинок з тріщинами можна звести до вигляду [5]

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_L \frac{Q(t)}{t-z}ds+\Phi_\infty(z),\quad \Psi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_L\left(\frac{\overline{Q}}{t-z}-\frac{\bar{t}Q}{(t-z)^2}\right)ds+\Psi_\infty(z), \qquad (1)$$

де функцій Φ_∞, Ψ_∞ - комплексні потенціали для нескінченної суцільної пластинки, що відповідають прикладеному до неї навантаженню, $L=L_1+L_2+...+L_I$, $L_1, L_2, ..., L_I$ – тріщини.

Функція Q визначається через невідомі стрибки переміщень берегів тріщини за формулою [3]

$$Q=-\frac{2Gi}{(\chi+1)}\frac{d}{ds}([u]+i[v]) \qquad (2)$$

де $[u]=u^{+}-u^{-},[v]=v^{+}-v^{-}$, величини зі значками (+) і (–) відносяться відповідно до лівого і правого берегів тріщини стосовно до вибраного напрямку на тріщині.

Для побудови аналогічного до (1) інтегрального представлення для площини з отвором (півплощини, що взаємодіє із штампом) знайдемо спочатку комплексні потенціали $\Phi_D(z),\Psi_D(z)$ для суцільної пластинки з отвором (півплощини), коли ці потенціали мають особливості в довільній точці пластинки

$$\Phi_D(z)\sim\frac{P}{z_0-z},\quad \Psi_D(z)=\frac{\overline{P}}{z_0-z}-\frac{\overline{z_0}P}{(z_0-z)^2}, \qquad (3)$$

де P, z_0 – довільні комплексні сталі. Очевидно, що ці потенціали можна записати у вигляді $\Phi_D=\Phi_D(z,z_0;P),\ \Psi_D=\Psi_D(z,z_0;P)$,

де

$$\Phi_D(z,z_0;P)=PF_0(z,z_0)+\overline{P}F_1(z,z_0),\ \Psi_D(z,z_0;P)=PP_0(z,z_0)+\overline{P}P_1(z,z_0), \qquad (4)$$

де F_j, P_j – відомі функції. Тоді комплексні потенціали для пластинки з отвором і тріщинами запишуться [1]

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_L\left[Q(t)F_0(z,t)+\overline{Q(t)}F_1(z,t)\right]ds+\Phi_p(z),$$
$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_L\left[Q(t)P_0(z,t)+\overline{Q(t)}P_1(z,t)\right]ds+\Psi_p(z), \qquad (5)$$

де $\Phi_p(z),\Psi_p(z)$ – комплексні потенціали для суцільної пластинки з отвором, що відповідають прикладеному навантаженню. Підінтегральні функції в формулах (1) і (5) мають однакові особливості. Звідси випливає, що переміщення на кривих L, які визначаються потенціалами (1) і (5) будуть мати однакові стрибки, що описуються функцією Q.

Для забезпечення умов однозначності переміщень необхідно, щоби виконувалась умова $\int\limits_{L_j} Qds=0$ на кожній з тріщин.

Під час розрахунків зручно перейти до дійсних невідомих. Для цього зобразимо

$$Q=2\pi\left(-ig_1^{'}+g_2^{'}\right),\ \text{ де } g_1^{'}=\frac{G}{\pi(\chi+1)}\frac{d[u]}{ds},\ g_2^{'}=\frac{G}{\pi(\chi+1)}\frac{d[v]}{ds}.$$

Тоді (5) перепишемо так:

$$\Phi(z)=\int_L\left[g_2^{'}(t)\Phi_2(z,t)+g_1^{'}(t)\Phi_1(z,t)\right]ds+\Phi_p(z),$$
$$\Psi(z)=\int_L\left[g_2^{'}(t)\Psi_2(z,t)+g_1^{'}(t)\Psi_1(z,t)\right]ds+\Psi_p(z), \qquad (6)$$

де $\Phi_2(z,t)=\Phi_D(z,t;1)$; $\Psi_2(z,t)=\Psi_D(z,t;1)$; $\Phi_1(z,t)=-\Phi_D(z,t;i)$; $\Psi_1(z,t)=-\Psi_D(z,t;i)$.

Для знаходження невідомих на контурі L функцій необхідно підставити потенціали (6) у формулу для знаходження вектора напружень q на берегах тріщини. Цей вектор у точці, що лежить на заданій кривій Γ на дотичній до неї площинці знаходиться через комплексні потенціали за формулою [1]

$$q_\Gamma(z)=\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}+w(z)[z\overline{\Phi'(z)}+\overline{\Psi(z)}], \qquad (7)$$

де $w(z)=d\overline{z}/dz=e^{-2i\theta}$, dz – диференціал дуги, θ – кут між дотичною до кривої в точці z і віссю Ox.

Використовуючи формули Племеля-Сохоцького, одержуємо інтегральне рівняння для визначення невідомої функції Q

$$\int_L\left[g_1^{'}(t)q_1(z,t)+g_2^{'}(t)(t)q_2(z,t)\right]ds=q_T(z)-q_p(z),\ z\in L\ , \qquad (8)$$

де $q_1(z, a)$, $q_2(z, a)$, $q_p(z)$ – вектори напружень q_L в точці z кривої L, які визначаємо за формулою (7) через відповідно комплексні потенціали $(\Phi_1(z, a), \Psi_1(z, a))$, $(\Phi_2(z, a), \Psi_2(z, a))$, $(\Phi_p(z), \Psi_p(z))$.

Зазначимо, що вираз зліва у співвідношенні (8) містить регулярні інтеграли та інтеграли типу Коші, які розглядаються в сенсі головного значення. Для розв'язування отриманого рівняння може бути ефективно використано метод механічних квадратур, який розроблено в роботах [1,5].

Розглянемо півплощину $y<0$ до границі якої при $|x-c|<a$ прикладено гладкий штамп. Для розв'язування задачі згідно запропонованого підходу необхідно побудувати дислокаційний розв'язок, знайти напруження під дією штампу в суцільній півплощині та врахувати можливість контакту берегів тріщини.

Дислокаційний розв'язок типу для півплощини, що знаходиться під дією штампу. За дислокаційний приймемо розв'язок задачі теорії пружності для суцільної півплощини, який задовольняє умови на її межі

$$\tau_{xy}=0,\ \text{при } |x|<\infty;\ \partial v/\partial x=\varepsilon \text{ при } |x-c|<a;\ \ \sigma_{yy}=0 \text{ при } |x-c|>a, \tag{9}$$

ε – стала (кут повороту штампу, який необхідно визначити), причому напруження під штампом задовольняють умовам $\int\limits_{a_1}^{a_2}\sigma_y(x)dx=S_y$, $\int\limits_{a_1}^{a_2}(x-c)\sigma_y(x)dx=M$, $a_{1,2}=c\mp a$, S_y і M – сила та момент, що прикладені до штампу, які при визначенні дислокаційного розв'язку покладаємо рівними нулю.

Потенціали Мусхелішвілі Φ_D, Ψ_D, які відповідають дислокаційній задачі мають полюси в точці z_0 нижньої півплощини

$$\Phi_D \sim -\frac{A}{z-z_0},\ \ \Psi_D \sim -\gamma\frac{\overline{A}}{z-z_0}-\overline{z}_0\frac{A}{\left(z-z_0\right)^2} \tag{10}$$

де для дислокаційної задачі $A=P-$ комплексна стала, $\gamma=1$. Поклавши введений дійсний параметр γ рівним $-\chi$ та $A=\frac{1}{2\pi(1+\chi)}(X+iY)$, приходимо до випадку навантаження півплощини зосередженою силою *(X,Y)* в точці z_0 та штампом.

Введемо далі зручнішу для викладок функцію $\Omega_D(z)=\Phi_D(z)+z\Phi_D'(z)+\Psi_D(z)$, яка матиме особливість вигляду

$$\Omega_D(z)\sim -\gamma\frac{\overline{A}}{z-z_0}+\frac{\left(z_0-\overline{z_0}\right)}{(z-z_0)^2}A\,. \tag{11}$$

Знайдемо комплексні потенціали так, щоби вони мали особливості вигляду (10), (11) та задовольняли умовам (9). Зобразимо їх у вигляді суми

$$\Phi_D(z)=\Phi(z)+\Phi_\Delta(z),\ \Omega_D(z)=\Omega(z)+\Omega_\Delta(z)\,. \tag{12}$$

За комплексні потенціали $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ приймемо такі, які є розв'язком задачі (9) при $c=0$. Їх шукаємо у вигляді

$$\Phi(z)=f_1(z)+f_2(z),\ \ \Omega(z)=-f_1(z)+f_2(z)\,, \tag{13}$$

де $f_1(z)=\frac{C(z)+\overline{C}(z)}{2}$, $f_2(z)=\frac{B(z)-\overline{B}(z)}{X(z)}$, $X(z)=\sqrt{(z-c)^2-a^2}$,

$$C(z)=\frac{\alpha_1}{z-z_0}+\frac{\alpha_2}{(z-z_0)^2},\ \ B(z)=\frac{\beta_1}{z-z_0}+\frac{\beta_2}{(z-z_0)^2}\,, \tag{14}$$

$\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2}$ – довільні сталі.

Підставимо формули (13) у вирази для знаходження напружень і переміщень на границі півплощини

$$\sigma_y-i\tau_{xy}=\Phi(z)+\overline{\Omega(z)};\ \ 2G(u'+iv')=\chi\Phi(z)-\overline{\Omega(z)} \tag{15}$$

Легко переконатись, що умови (9) тотожно виконуються при довільних сталих $\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2}$.

Вимагаючи, щоби функції (13) мали задані особливості (10), (11), знаходимо введені сталі

$$\alpha_1 = -A + \overline{A},\ \alpha_2 = -b_2,\ \beta_1 = -\frac{A + \overline{A}}{2} X_0 + \frac{b_2}{2} X_1,\ \ \beta_2 = \frac{b_2}{2} X_0,$$

де $X_0 = X(z_0),\ X_1 = X'(z_0) = \dfrac{z_0 - c}{X_0}$, $b_2 = (z_0 - \overline{z_0})A$.

Додаткові потенціали запишемо у вигляді

$$\Phi_\Delta = -iD_1 + i\frac{D_0 + D_1(z-c)}{X(z)},\ \Omega_\Delta = -iD_1 + i\frac{D_0 + D_1(z-c)}{X(z)} \quad ,$$

(16)

де D_0, D_1 – дійсні сталі, які визначимо із умови рівноваги штампу.

Переміщення та напруження, що відповідають потенціалам Φ_D, Ψ_D при $y=0$, $|x-c| < a$ будуть

$$2Gv'(x,-0) = -(\chi+1)D_1,\ \sigma_y(x,-0) = 2\frac{B(x) - \overline{B}(x)}{X^-(x)} + 2i\frac{D_0 + D_1(x-c)}{X^-(x)} \quad , \qquad (17)$$

де $X^-(x)$ граничне значення функції $X(z)$ при $\operatorname{Im} z < 0,\ y \to 0$.

Підставляючи в умови

$$\int_{a_1}^{a_2} \sigma_y(x,-0)dx = S_y \ ,\ \int_{a_1}^{a_2} (x-c)\sigma_y(x,-0)dx = M \ ,\ a_{1,2} = c \mp a\ ,$$

напруження (17), отримуємо

$$4\operatorname{Re}\int_{a_1}^{a_2} \frac{B(x)}{X^-(x)}dx + 2D_0 i\int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{X^-(x)} = S_y \ ,\ \ 4\operatorname{Re}\int_{a_1}^{a_2} \frac{B(x)(x-c)}{X^-(x)}dx + 2D_1 i\int_{a_1}^{a_2} \frac{(x-c)^2 dx}{X^-(x)} = M \ .$$

Звідси знаходимо

$$D_0 = -\frac{S_y}{2\pi} + (\gamma - 1)\operatorname{Im} A\ ,\ a^2\pi D_1 = -4\pi \operatorname{Im}\left[\beta_1\left(1 - \frac{z_0 - c}{X_0}\right) + \beta_2 \frac{a^2}{X_0^3}\right] - M.$$

Знайдені величини є справедливими для дислокаційного розв’язку, якщо в них покласти $S_y = M = 0$ та $\gamma = 1$.

Крім цього, приймемо, що півплощина, крім штампу, навантажена ще зосередженою силою (X,Y), що прикладена в т. z_0. Тоді справедливі потенціали (13) при $A = \dfrac{1}{2\pi(1+\chi)}(X + iY)$ та $\gamma = -\chi$.

Розв’язок для суцільної півплощини за дії штампу. Приймемо відомими S_y і M – сила та момент, що прикладені до штампу. Тоді комплексні потенціали для плоского штампу будуть [4]

$$\Phi_p = -iD_1 + i\frac{D_0 + D_1(z-c)}{X(z)},\ \Omega_p = -iD_1 + i\frac{D_0 + D_1(z-c)}{X(z)} \qquad (18)$$

де $D_0 = -\dfrac{S_y}{2\pi}$, $D_1 = -\dfrac{M}{a^2\pi}$.

Розглянемо ще випадок параболічного штампу. Умови на прямолінійній межі мають вигляд

$$\tau_{xy} = 0 \ \text{ при } |x| < \infty;\ \partial v / \partial x = \varepsilon + x / R \ \text{ при } |x-c| < a;\ \ \sigma_{yy} = 0 \ \text{ при } |x-c| > a\ ,$$

де R – радіус закруглення.

Тоді комплексні потенціали будуть

$$\Phi_p = Ci(z-c) - iD_1 + i\frac{D_0 + D_1(z-c) - C(z-c)^2}{X(z)},$$

$$\Omega_p = Ci(z-c) - iD_1 + i\frac{D_0 + D_1(z-c) - C(z-c)^2}{X(z)} \ ,$$

де $D_0 = -\frac{S_y}{2\pi} + \frac{a^2}{2}C$, $D_1 = -\frac{M}{a^2\pi}$, $C = \frac{2G}{(\chi+1)R}$.

Невідомі значення c і a визначаються із умови, що повні контактні напруження на кінцях штампу дорівнюють нулю.

Результати розрахунків. Розглянемо півплощину $y<0$, послаблену тріщиною, на яку при $-c < x < c$ втискається без тертя плоский штамп. Приймемо, що головний вектор і момент сил, які прикладені до штампу рівні P і M. Розглянемо детальніше випадок, коли тріщина прямолінійна, півдовжина її l, нахилена під кутом α до вісі Ox, координати центру (x_c, y_c).

Інтегральне рівняння розв'язувалось чисельно за допомогою методу механічних квадратур [1,5]. При знаходженні коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) необхідно врахувати контакт берегів тріщин. Алгоритм розв'язування такої задачі викладений в [3].

Розрахунки виконані для випадку, коли тріщина горизонтальна і розміщена симетрично відносно центру штампу при $M=0$, відносних довжинах тріщинах $l/c = 0{,}05; 0{,}1; 0{,}2; 0{,}25; 0{,}5; 0{,}75; 1$. Результати розрахунків відносних КІН $F_{II}(B) = K_{II}(B)\sqrt{c}/(P\sqrt{\pi})$ залежно від відносних відстанях тріщин h/c $(h = -y_c)$ наведено на рис. 1.а,б, на яких біля кривих вказано значення l/c.

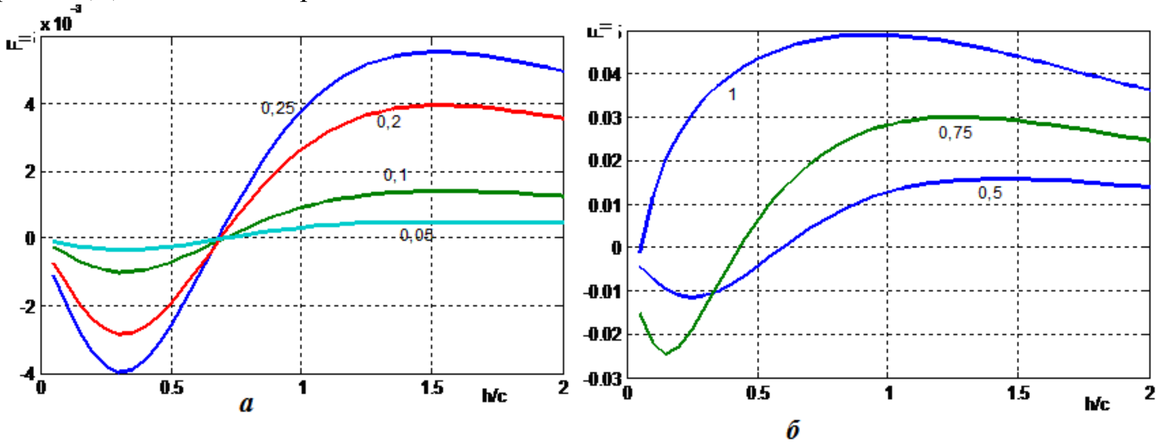

Рис.1. КІН для горизонтальної тріщини

Криві на рисунках при значеннях $l/c = 0{,}05;\ 0{,}25$ практично збігаються із відповідними даними, які отримані в [6] для цього випадку іншим методом.

Результати розрахунків КІН для випадку вертикальної тріщини у нижній вершині при $l/c = 0{,}05; 0{,}25$ наведено на рис.2.а. Тут кривій 1 відповідають значення $l/c = 0{,}25;\ y_c/c = -0{,}2$, кривій 2 – $l/c = 0{,}25;\ y_c/c = -0{,}5$, кривій 3 – $l/c = 0{,}05;\ y_c/c = -0{,}2$, кривій 4 – $l/c = 0{,}05;\ y_c/c = -0{,}5$. Аналогічні результати для верхньої вершини наведено на рис.2.б. Наведені тут результати практично збігаються із графіками, які отримані в [6]. Зазначимо, що в [6] розрахунки проведено для штампу, який не повертається.

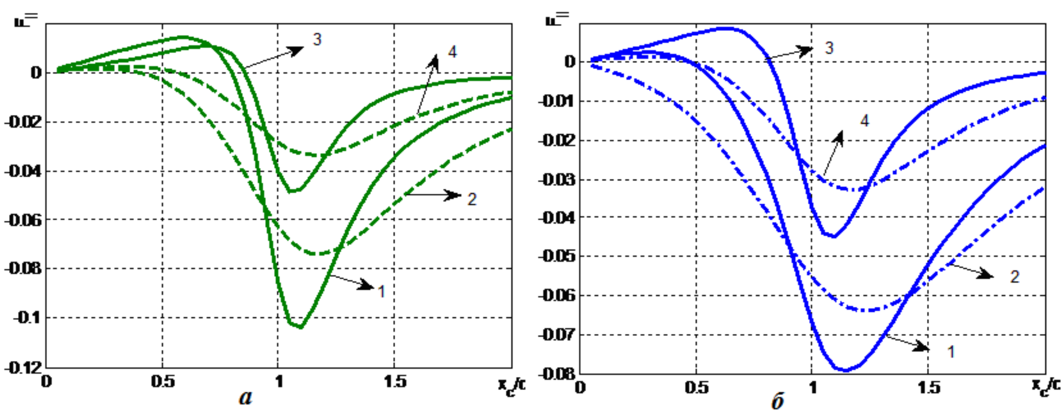

Рис.2. КІН для вертикальної тріщини

Результати розрахунків відносних КІН у лівій (A) та правій (B) вершинах тріщини півдовжиною $l = 0,25c$ з центром в точці $(0,\ 0,5c)$ залежно від кута нахилу тріщини до вісі Ох наведено на рис. 3.а. Аналогічні результати для випадку, коли центр тріщини зміщено в точку $(0,5c, -0,5c)$ наведено на рис. 3.б.

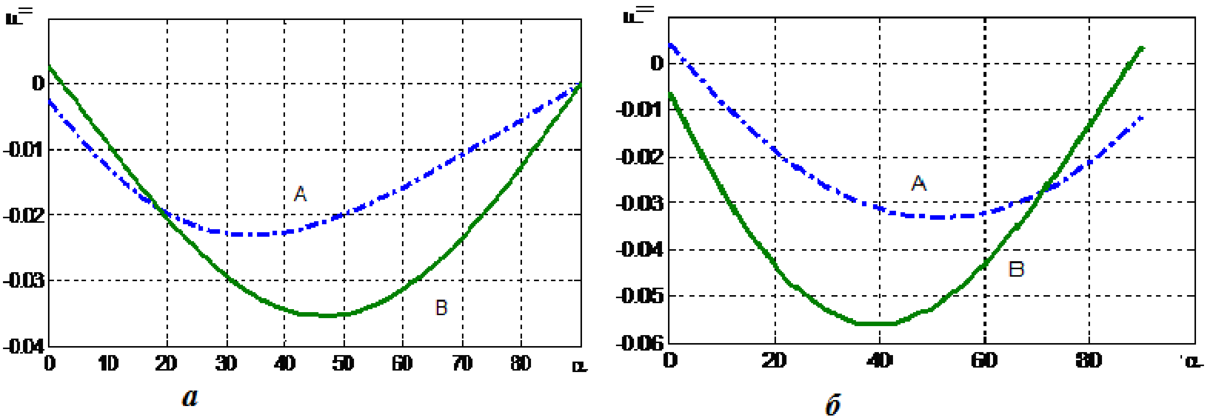

Рис.3. КІН для нахиленої тріщини

Для всіх вище розглянутих випадків мав місце контакт берегів тріщин в околі вершин.

Висновок. Розроблено методику визначення напруженого стану біля тріщин у півплощині, що взаємодіє із жорстким гладким штампом, яка базується на методі інтегральних рівнянь і враховує контакт берегів тріщин. Отримані результати для деяких часткових випадків добре узгоджуються із відомими в літературі даними. Максимальні КІН виявились для нахилених $\sim 45^0$ тріщин.

1. Божидарнік В.В. Визначення напруженого стану біля крайових тріщин у пластині з отвором складної форми / В.В. Божидарнік, О.В. Максимович // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – № 1. – С. 19-26.
2. Кит Г.С., Кривцун М.Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1983. – 280 с.
3. Максимович О. Розрахунок напруженого стану анізотропних пластинок з отворами і криволінійними тріщинами при врахуванні контакту їхніх берегів / О. Максимович // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2009. – № 3. – С. 36-42.
4. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. –М.: Наука, 1966. –708 с.
5. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках. –Киев: Наук. думка, 1984. –344 с.
6. Панасюк В.В., Дацышин А.П., Марченко Г.П. Контактна задача про дію штампу на границю півплощини, послабленої системою криволінійних тріщин // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1995. - №6. – С.7-16.