

УДК 539.3

В.В.Божидарнік, Я.М.Пастернак, Г.Т.Сулим
Луцький національний технічний університет**МЕТОД ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ
ІЗОТРОПНИХ ТІЛ ІЗ ТОНКИМИ НЕОДНОРІДНОСТЯМИ**

У роботі розвинуто метод граничних елементів для вивчення стаціонарних теплових та термомеханічних полів у тілах із тріщинами та тонкими пружними включеннями. Останні моделюються виходячи із принципу спряження континуумів різної вимірності. Для розв'язування поставленої задачі використано модифікований дуальний метод граничних елементів разом із отриманими моделями теплопровідності та теплового розширення тонкого включення. Використано нові числові квадратури та нелінійні відображення, що дали можливість із високою точністю обчислювати сингулярні та гіперсингулярні інтеграли.

Ключові слова: метод граничних елементів, тонке включення, узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень, поліноміальні відображення, спеціальні базові функції.

Вступ. Одним із найпоширеніших типів дефектів неоднорідної будови матеріалу є тонкі неоднорідності, до яких слід віднести як тріщини (щілини), так і власне тонкі включення. Відповідно до [1], тонкі неоднорідності часто моделюють використовуючи принцип спряження континуумів різної вимірності. Виходячи з останнього тонка неоднорідність вилучається із розгляду як геометричний об'єкт, а контактні напруження, переміщення, температура та тепловий потік зносяться із межі поділу матеріалів на серединну поверхню дефекту. У такий спосіб поставлена проблема зводиться до вивчення двох незалежних задач: зовнішньої, в якій розглядається тіло із лініями стрибків напружень, переміщень, температури та теплового потоку, і внутрішньої, що враховує умови взаємодії тонкої неоднорідності із зовнішнім середовищем. Внутрішня задача полягає у побудові залежностей, що пов'язують напруження, переміщення, температуру та теплові потоки на протилежних берегах тонкого включення. У часткових випадках тріщини чи абсолютно жорсткого включення розв'язок внутрішньої задачі є тривіальним, тому, зазвичай, розв'язується лише зовнішня задача.

Принцип спряження континуумів різної вимірності успішно застосовується [1] при моделюванні термопружного стану тіл, що містять прямолінійні включення, використовуючи комплексні потенціали Колосова – Мухелішвілі. Окремі аналітичні та високоточні числові розв'язки отримано для безмежного середовища, півплощини, смуги та пакету шарів, що містять тонкі прямолінійні пружні включення. Однак, внаслідок своєї напіваналітичної природи, використана схема розв'язування породжує громіздкі системи рівнянь при розгляді тіл складної форми чи викривлених включень. Тому для двовимірних задач теорії пружності та електропружності [2] комбіновано метод граничних елементів та принцип спряження континуумів різної вимірності, що дало можливість подолати згадані вище ускладнення та ефективно розв'язувати ці задачі, а також із високою точністю обчислювати узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень для тріщин та включень різноманітної форми у скінченних тілах та необмеженому середовищі.

Метою цієї роботи є розробка підходу на основі методу граничних елементів, що дав би можливість досліджувати двовимірні задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності тіл із тонкими включеннями. При цьому розвивається метод граничних елементів [3] у напрямі покращення його числової процедури, а також поширення на задачі теорії тонких включень.

1. Інтегральні рівняння зовнішньої задачі. Розглянемо плоску деформацію лінійно пружного ізотропного тіла, переріз якого займає двовимірну область D із межею $\Gamma \equiv \partial D$. Одна частина $\Gamma_t \subset \Gamma$ межі Γ навантажена поверхневими зусиллями, а на її доповненні $\Gamma_u = \Gamma \setminus \Gamma_t$ задано поверхневі переміщення. Так само на кривій $\Gamma_q \subset \Gamma$ задано тепловий потік через поверхню, а на її доповненні $\Gamma_\theta = \Gamma \setminus \Gamma_q$ означено температуру межі. Вважатимемо, що серединною лінією включення є крива Γ_c . Використовуючи принцип спряження континуумів різної вимірності [1], замінимо вплив включення на термопружний стан тіла певними розривами

напружень, переміщень, температури та теплового потоку при переході через лінію Γ_C . Таким чином, відповідно до [3] отримуємо таку систему рівнянь зовнішньої задачі

1) Теплопровідність

- коли точка колокації \mathbf{y} лежить на гладкій поверхні Γ тіла –

$$\frac{1}{2}\theta(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} [\theta^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})q_n(\mathbf{x}) - q_n^*\theta(\mathbf{x})]d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_C} [\theta^*\Sigma q_n - q_n^*\Delta\theta]d\Gamma; \quad (1)$$

- коли точка колокації \mathbf{y} лежить на гладкій серединній поверхні Γ_C^+ неоднорідності –

$$\frac{1}{2}\Sigma\theta(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} [\theta^*q_n - q_n^*\theta]d\Gamma + \int_{\Gamma_C} [\theta^*\Sigma q_n - q_n^*\Delta\theta]d\Gamma;$$

$$\frac{1}{2}\Delta q_n(\mathbf{y}) = n_i^+(\mathbf{y}) \left[\int_{\Gamma} [\theta_i^{**}q_n - q_i^{**}\theta]d\Gamma + \int_{\Gamma_C} [\theta_i^{**}\Sigma q_n - q_i^{**}\Delta\theta]d\Gamma \right]; \quad (2)$$

2) Термопружність

- коли точка колокації \mathbf{y} лежить на гладкій поверхні Γ тіла –

$$\frac{1}{2}u_i(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} [U_{ij}t_j - T_{ij}u_j + P_i\theta - Q_iq_n]d\Gamma + \int_{\Gamma_C} [U_{ij}\Sigma t_j - T_{ij}\Delta u_j + P_i\Delta\theta - Q_i\Sigma q_n]d\Gamma; \quad (3)$$

- коли точка колокації \mathbf{y} лежить на гладкій серединній поверхні Γ_C^+ неоднорідності –

$$\frac{1}{2}\Sigma u_i(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} [U_{ij}t_j - T_{ij}u_j + P_i\theta - Q_iq_n]d\Gamma + \int_{\Gamma_C} [U_{ij}\Sigma t_j - T_{ij}\Delta u_j + P_i\Delta\theta - Q_i\Sigma q_n]d\Gamma;$$

$$\frac{1}{2}\Delta t_i(\mathbf{y}) - \frac{1+\nu}{1-2\nu}G\alpha n_i^+\Sigma\theta(\mathbf{y}) = n_j^+ \left[\int_{\Gamma} [D_{ijk}t_k - S_{ijk}u_k + \bar{S}_{ij}\theta - V_{ij}q_n]d\Gamma + \right. \\ \left. + \int_{\Gamma_C} [D_{ijk}\Sigma t_k - S_{ijk}\Delta u_k + \bar{S}_{ij}\Delta\theta - V_{ij}\Sigma q_n]d\Gamma \right]. \quad (4)$$

Тут θ – температура; q_i – тепловий потік в напрямі осі x_i ; $q_n = q_i n_i$; n_i – компоненти одиничного вектора нормалі; u_i – компоненти вектора переміщень; t_i – компоненти вектора напружень; G , ν , α – відповідно модуль зсуву, коефіцієнт Пуассона та коефіцієнт теплового розширення; ядра θ^* , q_n^* , θ_i^{**} , q_i^{**} , U_{ij} , T_{ij} , D_{ijk} , S_{ijk} , \bar{S}_{ij} , V_{ij} ($i, j, k = 1, 2$) у розгорнутій формі подано в [3]; $\Sigma(\square) = (\square)^+ + (\square)^-$, $\Delta(\square) = (\square)^+ - (\square)^-$; символи «+» та «-» позначають величини, що відповідають поверхням Γ_C^+ та Γ_C^- утворених математичним розрізом Γ_C . У формулах використано правило Айнштайна підсумовування за індексом, що повторюється. Інтегральні рівняння (1)–(4) є гіперсингулярними.

Граничні умови на межі Γ тіла задають значення функцій θ чи q_n та u_i або t_i . Тобто, 10 із 12 крайових функцій θ , $\Sigma\theta$, $\Delta\theta$, q_n , Σq_n , Δq_n , u_i , Σu_i , Δu_i , t_i , Σt_i , Δt_i є невідомими. Тому, для визначення усіх крайових функцій все ще необхідно побудувати 4 рівняння (2 для теплопровідності та 2 для термопружності), що моделюють умови взаємодії неоднорідності із середовищем. Без утрати загальності їх можна записати у вигляді

$$\Delta q_n = F^q(\Delta\theta, \Sigma q_n), \quad \Sigma\theta = F^\theta(\Delta\theta, \Sigma q_n), \quad \Delta t_i = F_i^t(\Delta u_j, \Sigma t_j), \quad \Sigma u_i = F_i^u(\Delta u_j, \Sigma t_j). \quad (5)$$

Якщо вирази (5) матимуть явний вигляд, то система рівнянь (1)–(5) буде повною для розв'язування поставленої задачі.

2. Модель тонкої неоднорідності. Вважаючи, що напружений стан тіла не впливає на стаціонарне температурне поле, розглядатимемо окремо задачі теплопровідності та деформування тонкого включення.

Модель теплопровідності тонкого включення можна отримати, використовуючи аналогію між задачами теплопровідності та електростатики [2]:

$$\Delta q_n(\mathbf{y}) = \frac{\lambda^i}{h(\mathbf{y})} [\Delta\theta(\mathbf{y}) + \Delta\theta_c(\mathbf{y})], \quad \Sigma\theta(\mathbf{y}) = \Sigma\theta(\mathbf{y}_0) - \int_{\mathbf{y}_0}^{\mathbf{y}} \frac{Q(s) + Q_c(s)}{\lambda^i h(s)} ds. \quad (6)$$

Тут \mathbf{y}_0 – радіус-вектор лівого торця тонкого включення; $2h$ – товщина неоднорідності; λ^i – коефіцієнт теплопровідності матеріалу включення; $\Delta\theta_c$, Q_c – коригувальні функції (що зазвичай, приймаються нульовими);

$$Q(\mathbf{y}) = -Q(\mathbf{y}_0) + \int_{\mathbf{y}_0}^{\mathbf{y}} \Sigma q_n(s) ds. \quad (7)$$

Розглянемо тепер термопружну деформацію тонкого включення у локальній системі координат $Ox'_1x'_2$, вісь Ox'_1 якої спрямовано уздовж вектора нормалі $\mathbf{n} \sim \mathbf{n}^+$ до серединної поверхні неоднорідності. Середні значення напружень на серединній поверхні з нормаллю \mathbf{n} дорівнюють

$$\sigma'_{in} = \sigma'_{ij} n_j \approx \frac{1}{2} \Delta t'_i. \quad (8)$$

Унаслідок фізичної лінійності задачі, середні значення пружних деформацій можна записати у вигляді

$$\varepsilon'^{\text{elast}}_{in} = \frac{\partial (u'_i - u_i^{\text{therm}})}{\partial \mathbf{n}} \approx - \frac{\Delta u'_i - \Delta u_i^{\text{therm}}}{2h}. \quad (9)$$

Використовуючи закон Гука та рівняння (8) і (9) отримаємо такі зв'язки між крайовими функціями:

$$\Delta t_n = -E^i (\Delta u_n + \Delta u_n^{\text{therm}}) / h, \quad \Delta t_\tau = -G^i \Delta u_\tau / h, \quad (10)$$

де G^i – модуль зсуву матеріалу включення; $E^i = 2G^i / (1 - \nu^i)$; ν^i – коефіцієнт Пуассона для включення. Стрибок переміщень, зумовлений тепловими деформаціями, можна апроксимувати такою залежністю:

$$\Delta u_n^{\text{therm}} \approx \alpha^i (1 + \nu^i) h \Sigma \theta, \quad (11)$$

де α^i – коефіцієнт теплового розширення матеріалу включення.

Перейшовши у виразах (10) та (11) до глобальної системи координат Ox_1x_2 , отримаємо

$$\Delta t_i = -\Omega_{pi} \Omega_{qj} A_{pq} (\Delta u_j - \delta_{1j} h \alpha^i (1 + \nu^i) \Sigma \theta), \quad (12)$$

де компоненти Ω_{ij} тензора повертання дорівнюють $\Omega_{11} = n_1$, $\Omega_{12} = n_2$, $\Omega_{21} = -n_2$, $\Omega_{22} = n_1$, а відповідно до рівняння (10) коефіцієнти A_{ij} рівні $A_{11} = E^i / h$, $A_{22} = G^i / h$, $A_{12} = A_{21} = 0$.

Перейдемо до розгляду деформацій тонкого включення уздовж його серединної лінії. Унаслідок фізичної лінійності задачі

$$\Sigma u_i = \Sigma u_i^{\text{elast}} + \Sigma u_i^{\text{therm}}, \quad (13)$$

тому використовуючи розвинуту в роботі [2] модель тонкого включення матимемо

$$\Sigma u_i^{\text{elast}}(\mathbf{y}) = \Sigma u_i^{\text{elast}}(\mathbf{y}_0) + \int_{\mathbf{y}_0}^{\mathbf{y}} \frac{W_{ij} P_j(s)}{h(s)} ds. \quad (14)$$

Тут $W_{ij} = \Omega_{pi} \Omega_{qj} B_{pq}$; $B_{12} = B_{21} = 0$, $B_{11} = 1 / (2hG^i)$, $B_{22} = 1 / (2hE^i)$;

$$P_i(\mathbf{y}) = -P_i(\mathbf{y}_0) + \int_{\mathbf{y}_0}^{\mathbf{y}} \Sigma t_i(s) ds. \quad (15)$$

Середні значення зумовлених тепловим розширенням включення переміщень дорівнюють

$$\Sigma u_i^{\text{therm}}(\mathbf{y}) = \Sigma u_i^{\text{therm}}(\mathbf{y}_0) + \alpha^i (1 + \nu^i) \int_{\mathbf{y}_0}^{\mathbf{y}} \Omega_{2i}(s) \Sigma \theta(s) ds. \quad (16)$$

При розгляді викривлених включень чи прямолінійних тонких неоднорідностей за дії складного навантаження у моделі тонкого включення необхідно враховувати ефект згину. Відповідні співвідношення для тонкого пружного включення подані у роботі [2].

Система рівнянь (1)–(4), (6), (12)–(16) є повною для розв’язування термопружної задачі для тіла, що містить тонке включення.

4. Схема числового розв’язування задачі. Для числового розв’язування отриманої системи інтегральних рівнянь використано модифікацію [2] дуального методу граничних елементів [3]. Пропонований підхід використовує базові функції у формі поліномів Лагранжа для граничних елементів, що апроксимують межу Γ тіла, та елементів кривої Γ_C , що не прилягають до вершин тонкої неоднорідності. Коренева особливість поля напружень враховується завдяки використанню спеціальних граничних елементів. Це дає можливість підвищити точність методу та отримати значні переваги у безпосередньому визначенні узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень. Однак, у цьому випадку виникає необхідність числового визначення інтегралів від добутку спеціальних базових функцій та сингулярних ядер, оскільки аналітичне інтегрування видається громіздким або навіть неможливим.

У цьому дослідженні для моделювання приторцевої частини тонкого включення за допомогою тривузлових розривних граничних елементів згідно з [1, 2] введено такі системи базових функцій

- для розривів переміщень та температури

$$\phi_p^{\Delta u} = \Phi_{p1}^{\Delta u} \sqrt{\rho} + \Phi_{p2}^{\Delta u} \rho + \Phi_{p3}^{\Delta u} \rho^{3/2} \quad (p=1,2,3) \quad (17)$$

- та для стрибків векторів напружень та теплового потоку

$$\phi_p^{\Sigma t} = \Phi_{p1}^{\Sigma t} \rho^{-1/2} + \Phi_{p2}^{\Sigma t} + \Phi_{p3}^{\Sigma t} \sqrt{\rho} \quad (p=1,2,3). \quad (18)$$

Тут $\rho = 1 \pm t$; $-1 \leq t \leq 1$ – нормована дуга координата граничного елемента; $\Phi_{pj}^{\Delta u}$, $\Phi_{pj}^{\Sigma t}$ – матриці сталих, що визначаються з рівнянь

$$\phi_p(t_p) = 1, \quad \phi_p(t_{j \neq p}) = 0,$$

де t_p – координати вузлових точок на граничному елементі.

Із введенням базових функцій (17), (18) у числовій схемі методу граничних елементів необхідно обчислювати такі сингулярні та гіперсингулярні інтеграли:

$$I_1 = \int_{-1}^1 \ln|t-t_p| f(t) \phi^{\Sigma t}(t) dt, \quad I_2 = \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t-t_p} \phi^{\Delta u}(t) dt,$$

$$I_3 = \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t-t_p} \phi^{\Sigma t}(t) dt, \quad I_4 = \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{(t-t_p)^2} \phi^{\Delta u}(t) dt,$$

де $f(t)$ – регулярна функція.

При обчисленні інтегралів типу I_1 доволі продуктивним виявився клас нелінійних відображень, запропонований у роботі [4]. Проте вони згладжують підінтегральний вираз лише в особливій точці t_p , а не на кінцях проміжку інтегрування, що необхідне при використанні базових функцій (18). Тому при обчисленні інтеграла I_1 доцільно інтервал розбити особливою точкою на два, і утворені проміжки інтегрування нормувати до інтервалу $(0;1)$ так, щоб особлива точка потрапляла в точку $t = 0$. Після цього проміжок інтегрування відображається в себе за допомогою перетворення

$$t = 3s^2 - 2s^3, \quad dt = 6(s - s^2) ds,$$

що згладжує підінтегральний вираз на обох кінцях проміжку інтегрування.

Для обчислення сингулярних інтегралів I_2 , I_3 , I_4 побудовано спеціальні квадратури інтерполяційного типу із чебишевськими вузлами [2]

$$\int_{-1}^1 \frac{f(s)}{s} ds = \sum_{k=1}^n A_k^{CPV} f(\sigma_k), \quad \int_{-1}^1 \frac{f(s)}{s^2} ds = \sum_{k=1}^n A_k^{HPV} f(\sigma_k), \quad (19)$$

де $\sigma_k = \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]$ – нулі поліномів Чебишева; n – парне додатне ціле число; інтеграли записані в сенсі головного значення чи скінченної частини. Квадратури (19) є точними, коли $f(t)$ є поліномом степеня, меншого за n .

При обчисленні сингулярних і гіперсингулярних інтегралів за квадратурами (19) для згладжування підінтегрального виразу запропоновано використовувати нелінійне відображення

$$\mu(s) = t_p + (1 + (-2t_p + (1/2 + (t_p - s/2)s)s)s)s,$$

яке завдяки своїм властивостям

$$\mu(\pm 1) = \pm 1, \quad \mu(0) = t_p, \quad \mu'(s)|_{s=\pm 1} = 0, \quad |\mu(s)| < 1 \quad (-1 < s < 1, \quad t_p = [-2/3; 0; 2/3])$$

дає можливість не тільки згладити підінтегральний вираз біля кінців проміжку інтегрування, а й перенести особливу точку t_p в точку $s = 0$. Із використанням відображення $\mu(s)$ та спеціальних квадратур (19) інтеграли I_2, I_3, I_4 обчислюються так:

$$I_{2,3} = \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t-t_p} \phi(t) dt = \int_{-1}^1 \frac{f(\mu(s))}{\mu(s)-t_p} \phi(\mu) \mu'(s) ds \approx \sum_{k=1}^n A_k^{CPV} \frac{f(\mu(\sigma_k)) \sigma_k}{\mu(\sigma_k)-t_p} \phi(\mu(\sigma_k)) \mu'(\sigma_k),$$

$$I_4 = \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{(t-t_p)^2} \phi(t) dt = \int_{-1}^1 \frac{f(\mu)}{(\mu-t_p)^2} \phi(\mu) \mu' ds \approx \sum_{k=1}^n A_k^{HPV} \frac{f(\mu(\sigma_k)) \sigma_k^2}{(\mu(\sigma_k)-t_p)^2} \phi(\mu(\sigma_k)) \mu'(\sigma_k).$$

5. Узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень. Відповідно до [1, 2] сингулярний член поля напружень поблизу вершин тонкого включення цілковито означений чотирма дійсними величинами, які називають узагальненими коефіцієнтами інтенсивності напружень. Два з них відповідають стрибкам переміщень, а інші два – стрибкам нормальних напружень при переході через серединну поверхню дефекту. Ці величини визначаються за крайовими функціями у такий спосіб [1]:

$$K_{i1} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{G}{1-\nu} \frac{\Delta u_j}{\sqrt{r}} \quad (j \neq i), \quad K_{i2} = (-1)^{i+1} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \Sigma t_i \sqrt{r}.$$

У випадку тріщини $K_{11} = K_1, K_{21} = K_{II}, K_{12} = K_{22} = 0$, де K_1 та K_{II} – класичні КІН механіки руйнування.

Відповідно до співвідношень (17) та (18), обрані базові функції дають можливість безпосередньо визначати узагальнені КІН за коефіцієнтами при $\sqrt{\rho}$ та $\rho^{-1/2}$.

5. Числовий аналіз прикладів.

5.1. Аналіз задач, що мають аналітичний розв'язок. Числові результати при визначенні узагальнених КІН за допомогою запропонованого підходу мають високу точність. Наприклад, розглянемо теплоізолювану тріщину в безмежному середовищі за дії на нескінченності теплового потоку q^∞ , спрямованого перпендикулярно до серединної поверхні дефекту. Відповідно до [5] у цьому випадку єдиним ненульовим КІН є K_{II} , котрий дорівнює

$$K_{II}^\pm = \mp \frac{G\alpha(1+\nu)}{2\lambda(1-\nu)} q^\infty a \sqrt{\pi a}.$$

Похибка числового визначення КІН K_{II} із використанням запропонованого підходу не перевищує 0,2 % для розбиття, що складається із 20 тривузлових граничних елементів, включаючи два спеціальні елементи для моделювання вершин тріщини.

При розгляді абсолютно жорсткого теплопровідного включення за дії такого ж навантаження відповідно до [1] єдиним ненульовим узагальненим КІН є K_{22} :

$$K_{22}^\pm = \pm \frac{G\alpha(1+\nu)(1-2\nu)}{\lambda(3-4\nu)} q^\infty a \sqrt{\pi a}.$$

Похибка числового визначення коефіцієнта K_{22} запропонованим числовим підходом не перевищує 0,4 % за такого самого розбиття, як і в попередньому прикладі.

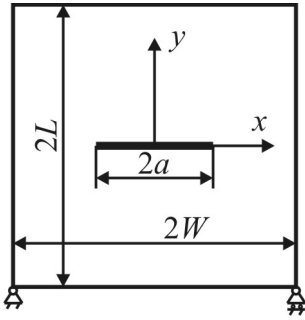


Рис. 1. Схема задачі

5.2. Тріщина в скінченному тілі. Розглянемо плоску задачу термопружності для квадратного ($W/L=1$) в плані тіла з центральною тріщиною, паралельною до основи квадрата (рис. 1). Розв'язуватимемо задачу для двох типів крайових умов на поверхнях тіла та тріщини:

1. на поверхнях тріщини температура підтримується нульовою ($\theta=0$), а на всій зовнішній межі тіла задане її сталие значення $\theta=10$;
2. тепловий потік дорівнює нулю ($q=0$) на берегах тріщини (теплоізольована тріщина) та на поверхнях $x=\pm W$, $|y|<L$, а на поверхнях $|x|<W$, $y=\pm L$ задане сталие значення температури $\theta=\pm 10$.

Матеріал тіла має такі властивості: модуль Юнга $E=2,184 \cdot 10^5$ Па; коефіцієнт Пуассона $\nu=0,3$; коефіцієнт теплового розширення $\alpha=1,67 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. Теплопровідність матеріалу тіла вважалася рівною $\lambda=1$. Результати розрахунку запропонованим підходом нормованих КІН $K_I^* = K_I / F$, $K_{II}^* = K_{II} / F$, де $F = \alpha \theta E \sqrt{W}$, у порівнянні із даними [3, 6] подано в табл. 1.

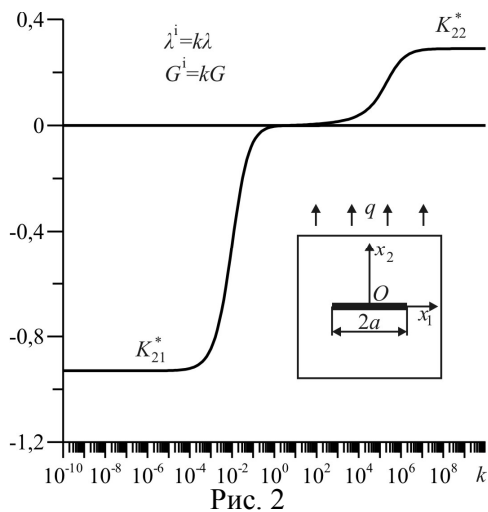
Табл. 1.

КІН тріщини в квадратному в плані тілі

a/W	K_I^* (Крайові умови 1)			K_{II}^* (Крайові умови 2)		
	[3]	[6]	Запропонований підхід	[3]	[6]	Запропонований підхід
0,1	0,268	0,271	0,272	0,018	0,021	0,020
0,2	0,347	0,347	0,350	0,054	0,053	0,054
0,3	0,401	0,406	0,405	0,095	0,094	0,096
0,4	0,448	0,453	0,453	0,141	0,141	0,142
0,5	0,491	0,491	0,495	0,190	0,188	0,191
0,6	0,525	0,526	0,530	0,243	0,247	0,246

Табл. 1 засвідчує добру узгодженість результатів розрахунку КІН тріщин трьома різними методами, що свідчить про ефективність використання запропонованого підходу. Відносне відхилення даних не перевищує 1 %.

5.3. Тонке пружне включення. Розглянемо ізотропне середовище з тонким чужорідним включенням, розташованим уздовж відрізка $[-a, a]$ осі Ox_1 (див. вірзку до рис. 2). Вважатимемо, що коефіцієнт теплового розширення матеріалу включення α^i дорівнює нулю, а відносна жорсткість та теплопровідність є однаковими, тобто, $G^i/G = \lambda^i/\lambda = k$. Коефіцієнти Пуассона матеріалів середовища та включення вважаються однаковими і рівними 0,3. На безмежності заданий вектор теплового потоку, паралельний до осі Ox_2 . Нормовані значення узагальнених КІН $K_{21}^* = K_{21}/K$, $K_{22}^* = K_{22}/K$, де $K = qG\alpha\sqrt{\pi a}/\lambda$ зображено на рис. 2. При числовому розв'язуванні задачі використано 20 тривузлових граничних елементів. У граничних випадках теплоізольованої тріщини ($k \rightarrow 0$) та жорсткого теплопровідного включення ($k \rightarrow \infty$) відносна похибка результату не перевищує 0,4 %, що засвідчує ефективність запропонованого підходу.



Висновки. Отримано інтегральні рівняння та модель тонкого включення, необхідні для розв'язування задач термопружності тіл із тонкими неоднорідностями. Використана при розв'язуванні цих рівнянь числова схема методу граничних елементів дає можливість розглядати різноманітні задачі для безмежних середовищ і скінченних тіл, що містять як прямолінійні, так і викривлені тонкі включення. Запропоновані спеціальні елементи для моделювання приторцевих частин неоднорідностей дають можливість як безпосередньо визначати узагальнені КІН, так і значно підвищити точність отриманих результатів.

1. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г.Т. Сулим. – Львів: дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
2. Pasternak Ia. Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities / Ia. Pasternak // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2011. – 35. – No. 4. – P. 678–690.
3. Prasad N.N.V. The dual boundary element method for thermoelastic crack problems / N.N.V. Prasad, M.H. Aliabadi, D.P. Rooke // Int. J. Fract. – 1994. – 66. – P. 255-272.
4. Johnston P.R. Transformations for evaluating singular boundary element integrals / P.R. Johnston, D. Elliott // J. Comp. Appl. Math. – 2002. – 146. – P. 231–251.
5. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М.П. Саврук. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
6. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х томах. / под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – 1016 с.