

УДК 539.03

Р.В. Пасічник, С.В. Ротко

Луцький національний технічний університет

ВИКОРИСТАННЯ СИМЕТРІЇ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ РЕЗЕРВУРА У ФОРМІ ОДНОПОРОЖНИННОГО ГІПЕРБОЛОЙДА МЕТОДОМ СІТОК

В статті виконано розрахунок резервуара у формі однопорожнинного гіперboloїда методом сіток. Отримано епюри переміщень та епюри моментів.

Ключеві слова: Однопорожнинний гіперboloїд, оболонки, симетрія, скінченні різниці, моменти, переміщення, збіжність.

В статті розглядається розрахунок однопорожнинного гіперboloїда при гідростатичному навантаженні за моментною теорією методом сіток. Система рівнянь теорії оболонок записана в переміщеннях має вигляд:

$$\begin{aligned} \nabla^4 W + \frac{12}{h^2} \left[\frac{1}{R_1} \frac{\partial U}{\partial \theta} (K_1 + \mu K_2) + \frac{1}{R_1 r} \frac{\partial r}{\partial \theta} U (K_2 + \mu K_1) + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \theta} U (K_2 + \mu K_1) + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} (K_2 + \mu K_1) + (K_1^2 + 2\mu K_1 \times \times K_2 + K_2^2) \right] W = \frac{g_n}{D}; \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{r}{R_1} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r K_1 W) + \mu \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial r}{\partial \theta} U \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} (K_2 r W) \right] + \frac{(1-\mu)}{2} \frac{R_1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{(1-\mu)}{2} r \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) - \\ \frac{\partial r}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{1}{R_1 r} \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 U - K_2 W \frac{\partial r}{\partial \theta} - \mu \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial r}{\partial \theta} + \right. \\ \left. K_1 W \frac{\partial r}{\partial \theta} \right) = \frac{R_1 r}{B} g_1 \\ \frac{R_1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + R_1 (K_2 + \mu K_1) \frac{\partial W}{\partial \varphi} + \frac{1-\mu}{2} \times \\ \times \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{r^2}{R_1} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{V}{r} \right) \right] + \\ + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial r}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial r}{\partial \theta} \frac{r}{R_1} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{V}{r} \right) = - \frac{R_1 r}{B} g_2; \end{aligned} \quad (1)$$

В статті прийнято, що зміна кривини і кручення, обумовлені компонентами переміщень дотичними до серединної поверхні, як правило, приймаються несуттєвими. Обґрунтування використання цього методу було введено в науку Х.М.Муштарі і Л.Донеллом [1], та широко використовується в задачах стійкості оболонок обертання.

В (1) прийняті позначення:

$$\begin{aligned} \nabla^4 W &= \frac{1}{R_1 r} \left[\frac{r}{R_1} \frac{\partial^2 (\nabla^2 W)}{\partial \theta^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{r}{R_1} \right) \frac{\partial (\nabla^2 W)}{\partial \theta} + \frac{R_1}{r} \frac{\partial^2 (\nabla^2 W)}{\partial \varphi^2} \right]; \\ \nabla^2 W &= \frac{1}{R_1 r} \left[\frac{r}{R_1} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{r}{R_1} \right) \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{R_1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right]; \end{aligned}$$

U, V, W – компоненти зміщення (мал. 5)

h – товщина оболонки; D, B – циліндрична жорсткість на розтяг елемента оболонки; r, R – коефіцієнти першої квадратичної форми Гауса; K_1, K_2 – кривини поверхні; $\mu = 0,15$ – коефіцієнт Пуассона;

g_1, g_n, g_2 – компоненти інтенсивності навантаження.

Геометрія поверхні визначається наступними параметрами:

$$r = \frac{a}{c} \sqrt{z^2 + c^2} \quad \alpha, c \text{ – параметри гіперболи;}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dr}{dz} = \frac{a}{rc} \sqrt{r^2 - a^2}, \quad r = a(1 - \alpha^2 \operatorname{tg}^2 \theta)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{a\alpha^2}{\cos^2 \theta \sqrt{(1 - \alpha^2 \operatorname{tg}^2 \theta)^3}},$$

$$R_1 = \frac{\alpha}{c^2} \sqrt{[(1 + \alpha^2)r^2 - a^2]^3} \quad (3)$$

$$K_1 = -\frac{1}{R_1}; \quad K_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{r}{\cos \theta}.$$

Співвідношення Кодаці:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{r}{R_1} \right) = -\frac{1}{R_1} \frac{\partial r}{\partial \theta}, \quad \text{або} \quad \frac{\partial r}{\partial \theta} = R_1 \sin \theta. \quad (4)$$

Складність розв'язку поставленої задачі обумовлюється великою розмірністю задачі, високим порядком диференціювання рівнянь в часткових похідних. Їх коефіцієнти являються складними функціями координат на поверхні оболонки. Тому при розв'язку поставленої задачі переходять до дискретних методів алгебраїзації рівнянь серед яких найбільш ефективним є метод кінцевих елементів і метод сіток [2].

Для дискретизації задачі на серединній поверхні, зазвичай, будують координатні лінії, що співпадають з лініями кривини поверхні. Рівняння континуальної системи (1) апроксимуються кінцево-різницеви аналогами в центральних різницях першого порядку точності, використовуючи при цьому цілочисельні координати, що відповідають номерам вузлів різнисної сітки в напрямку θ і φ . Для визначення коефіцієнтів рівнянь (першої і другої квадратичної форми) використовуються вузли між лініями основної сітки.

Кінцево-різницеви аналоги рівнянь для вузла сітки (i, k) мають вигляд:

$$\begin{aligned} & - \left[\left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+0.5} + \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} + (1 - \mu) \lambda^2 \left(\frac{R_1}{r} \right)_{i,k} + \right. \\ & \left. + \frac{\nabla \theta^2}{R_1 r} \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)_{i,k}^2 \right] U_{i,k} + \left[\left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+0.5} + \frac{\mu}{2} \Delta \theta \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial r}{\partial \theta} \right)_{i,k+1} - \frac{\mu}{2} \Delta \theta \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial r}{\partial \theta} \right)_{i,k} \right] U_{i,k+1} + \\ & \left. + \left[\left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} - 0.5 \mu \Delta \theta \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial r}{\partial \theta} \right)_{i,k-1} + \right. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 & \left. +0.5\mu\Delta\theta\left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)_{i,k}\right]U_{i,k-1}+0.5(1-\mu)\lambda^2\left(\frac{R_1}{r}\right)_{i,k}\times \\
 & \times(U_{i+1,k}+U_{i-1,k})+0.25\lambda\left(\mu+(1-\mu)0.5\frac{r_{i,k}}{r_{i,k+1}}\right)\times \\
 & \times(V_{i+1,k+1}+V_{i-1,k+1})+0.25\lambda\left[\mu+0.5(1-\mu)\frac{r_{i,k}}{r_{i,k-1}}\right]\times \\
 & \times(V_{i-1,k-1}-V_{i+1,k-1})-0.25\lambda\Delta\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)_{i,k}(V_{i+1,k}- \\
 & -V_{i-1,k})-\Delta\theta^2\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)_{i,k}(K_2+\mu K_1)_{i,k}W_{i,k}+ \quad (5) \\
 & +0.5\Delta\theta r_{i,k+1}(K_1+\mu K_2)_{i,k+1}W_{i,k+1}-0.5\Delta\theta r_{i,k-1}\times \\
 & \times(K_1+\mu K_2)_{i,k-1}W_{i,k-1}=-\frac{\Delta\theta^2}{B}(R_1rg)_{i,k}; \\
 & -\left[2\left(\frac{R_1}{r}\right)_{i,k}+\frac{1-\mu}{2\lambda^2}\left(\frac{r^2}{R_1}\right)_{i,k+0.5}\left(\frac{1}{r}\right)_{i,k}+\frac{1-\mu}{2\lambda^2}\times\right. \\
 & \times\left.\left(\frac{r^2}{R_1}\right)_{i,k-0.5}\left(\frac{1}{r}\right)_{i,k}\right]V_{i,k}+\left(\frac{R_1}{r}\right)_{i,k}(V_{i+1,k}+ \quad (6) \\
 & +V_{i-1,k})+\left[\frac{1-\mu}{2\lambda^2}\left(\frac{r^2}{R_1}\right)_{i,k+0.5}\left(\frac{1}{r}\right)_{i,k+1}+\frac{1-\mu}{4\lambda}\Delta\varphi\times\right. \\
 & \times\left.\left(\frac{r}{R_1}\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)_{i,k}\left(\frac{1}{r}\right)_{i,k+1}\right]V_{i,k+1}+\left[\frac{1-\mu}{2\lambda^2}\left(\frac{r^2}{R_1}\right)_{i,k-0.5}\times\right. \\
 & \times\left.\left(\frac{1}{r}\right)_{i,k-1}-\frac{1-\mu}{4\lambda}\Delta\varphi\left(\frac{r}{R_1}\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)_{i,k}\left(\frac{1}{r}\right)_{i,k-1}\right]V_{i,k-1}+ \\
 & +0.5\Delta\varphi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)_{i,k}(U_{i+1,k}-U_{i-1,k})\frac{3-\mu}{2}+ \\
 & +\frac{1+\mu}{8\lambda}(U_{i+1,k+1}-U_{i+1,k-1}+U_{i-1,k-1}-U_{i-1,k+1})+ \\
 & +0.5\Delta\varphi(R_1)_{i,k}(K_2+\mu K_1)_{i,k}(W_{i+1,k}-W_{i-1,k})= \\
 & =-\frac{\Delta\varphi^2}{B}(R_1rg_2)_{i,k}; \\
 & \left\{\left[\left(\frac{r}{R_1}\right)_{i,k+0.5}^2\left(\frac{1}{R_1r}\right)_{i,k+1}+\rho_{i,k}^2\left(\frac{1}{R_1r}\right)_{i,k}+\right.\right. \\
 & \left.\left.+\left(\frac{r}{R_1}\right)_{i,k-0.5}^2\left(\frac{1}{R_1r}\right)_{i,k-1}+2\left(\frac{R_1}{r^3}\right)_{i,k}\lambda^4\right]W_{i,k}-\right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\rho \left(\frac{1}{R_1 r} \right)_{i,k} \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+0.5} + \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+0.5} \left(\frac{1}{R_1 r} \right)_{i,k+1} \right. \\
& \quad \times \rho_{i,k+1} \left. \right] W_{i,k+1} - \left[\rho \left(\frac{1}{R_1 r} \right)_{i,k} \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} + \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} \left(\frac{1}{R_1 r} \right)_{i,k-1} \right. \\
& \quad \times \rho_{i,k-1} \left. \right] W_{i,k-1} - \\
& - 2\rho \left(\frac{1}{r^2} \right)_{i,k} \lambda^2 (W_{i+1,k} + W_{i-1,k}) + \left[\left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+0.5} \right. \\
& \quad \times \left. \left(\frac{1}{r^2} \right)_{i,k+1} \lambda^2 + \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+0.5} \left(\frac{1}{r^2} \right)_{i,k} \lambda^2 \right] \times \\
& \quad \times (W_{i+1,k+1} + W_{i-1,k-1}) + \left[\left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} \left(\frac{1}{r^2} \right)_{i,k-1} \right. \\
& \quad \times \lambda^2 + \left. \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} \left(\frac{1}{r^2} \right)_{i,k} \lambda^2 \right] (W_{i+1,k-1} + \\
& \quad + W_{i-1,k-1}) + \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+0.5} \left(\frac{1}{R_1 r} \right)_{i,k+1} \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+1.5} \times \\
& \quad \times W_{i,k+2} + \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} \left(\frac{1}{R_1 r} \right)_{i,k-1} \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-1.5} W_{i,k-2} + \\
& \quad + \left(\frac{R_1}{r^3} \right)_{i,k} \lambda^4 (W_{i+2,k} + W_{i-2,k}) \left. \right\} + \frac{12}{h^2} (K_1^2 + \\
& + 2\mu K_1 K_2 + K_2^2)_{i,k} (r R_1)_{i,k} \Delta \theta^4 W_{i,k} + \frac{6}{h^2} \Delta \theta^3 \times \\
& \quad \times r_{i,k} (U_{i,k+1} - U_{i,k-1}) (K_1 + \mu K_2)_{i,k} + \frac{12}{h^2} \Delta \theta^4 \times \\
& \quad \times \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)_{i,k} (K_2 + \mu K_1)_{i,k} U_{i,k} + \frac{6}{h^2} \Delta \theta^4 (K_2 + \\
& + \mu K_1)_{i,k} (R_1)_{i,k} \frac{V_{i+1,k} - V_{i-1,k}}{\Delta \varphi} = \left(\frac{R_1 r g_n}{D} \right)_{i,k} \Delta \theta^4;
\end{aligned}$$

Прийнято позначення : $\lambda = \frac{\Delta \theta}{\Delta \varphi}$;

$$\begin{aligned}
\rho_{i,k} &= \left(\left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+0.5} + \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} + 2\lambda^2 \left(\frac{R_1}{r} \right)_{i,k} \right); \\
\rho_{i,k+1} &= \left(\left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+1.5} + \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+0.5} + 2\lambda^2 \left(\frac{R_1}{r} \right)_{i,k+1} \right);
\end{aligned}$$

$$\rho_{i,k-1} = \left(\left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-1.5} + \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} + 2\lambda^2 \left(\frac{R_1}{r} \right)_{i,k-1} \right);$$

Розглядається розрахунок резервуара (рис.1) з параметрами : $a=1м$, $c=2м$, $h=0.1м$, $\alpha = c/a = 2$ при різному кроці сітки n . Навантаження прийнято від гідростатичного тиску.

Граничні умови : верхнє сїчення оболонки при $\theta_{\min} = -14.6^\circ$ вільне від в'язів $S=0$, $N_I=0$, $R_I=0$, $M_I=0$. $\theta = 20.6^\circ$. Нижній край оболонки – повне зашцимлення $a = V = W = \frac{\partial W}{\partial \theta} = 0$.

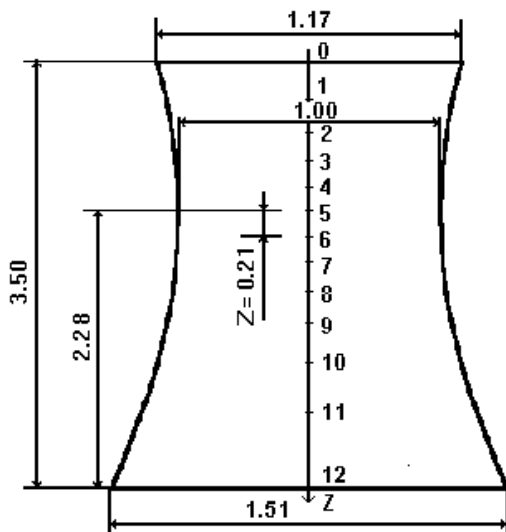


Рис. 1. Резервуар

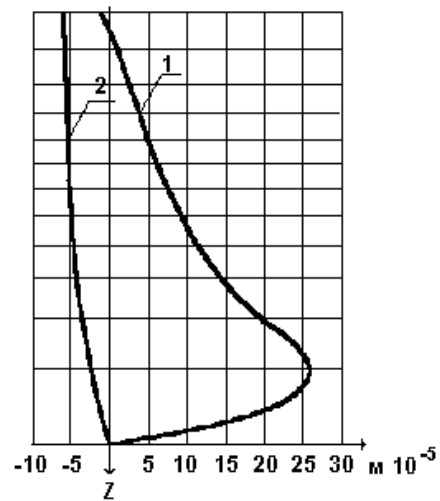


Рис. 2. Епюра переміщень 1-W, 2-U

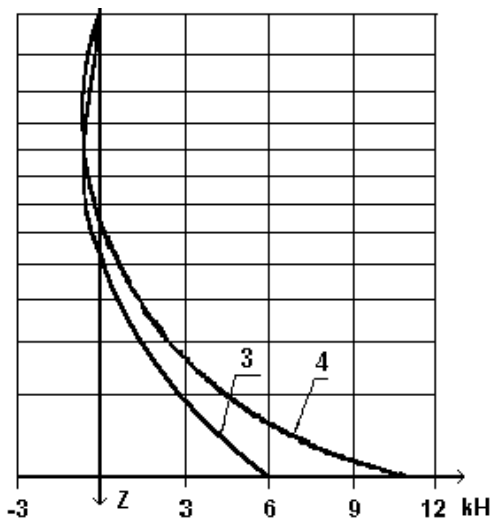


Рис. 3. Епюра N1
3- безмоментна теорія
4- метод сіток

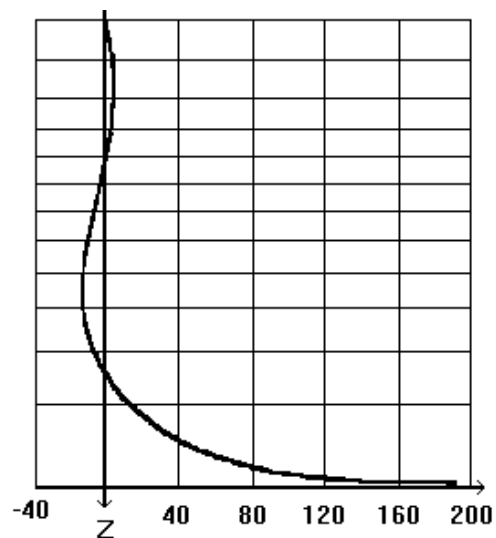


Рис. 4. Епра M1 $kH \cdot m \cdot 10^{-4}$

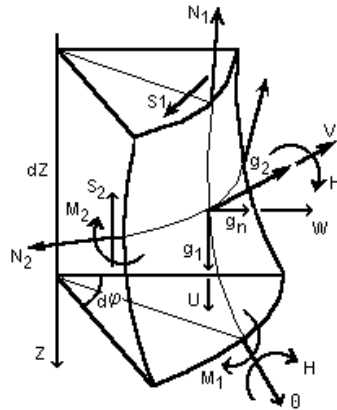


Рис. 5. Схема зусиль

Враховуючи симетрію задачі, розглядається напружений стан лише в напрямку координати θ рис.(5) при $n=12$. При цьому крок $\Delta\theta = 0.0511$ рад. приймається постійним.

Для внутрішніх вузлів сітки записуються різницеві аналоги (5, 6, 7), відповідні контурні рівняння (9, 10, 11).

Результати подані на рис.(2) – рис.(4) в вигляді епюр переміщень та зусиль. Розв'язок показує що прогини від власної ваги W та U одного порядку. Порівнюючи зусилля N_1 знайдені за безмоментною теорією і N_1 в нашому розв'язку, бачимо що найбільше розходження виникає біля нижнього защемленого краю. Таку розбіжність можна пояснити значним краєвим ефектом. M_1 по всій висоті резервуару величина дуже мала . Вийняток становлять точки розміщені в безпосередній близькості до нижнього защемленого краю, де значення моментів різко зростають, досягаючи екстремуму в зацимленні в наслідок значного краєвого ефекту.

Тавлиця 1

Збіжність значень $W, U, N1$ при різному кроці координатної сітки

Кількість розбиттів	Січення $Z=0,21$ м		
	W (мм)	U (мм)	$N1$ (мм)
6	0,0752	-0,0453	-0,3142
12	0,0753	-0,0519	-0,3295
24	0,0754	-0,0528	-0,3295

Для встановлення точності розв'язку, задача розв'язана при різних кроках сітки для $n=6, 12, 24$, розбиттях. Результати дослідження представлені в таблиці 1.

1. Муштары Х.М., Галимов К.З.: Нелинейная теория оболочек. – Казань : Таткнигоиздат., 1957-432с.

2. Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Гайдачук В.В.: Расчет оболочек сложной формы. – К.: Будівельник, 1990. – 192с.