УДК 65.01
В.І.Тіхонов, С.Д.Радкевич, О.В.Красильнікова
Національний транспортний університет

ДО ПИТАННЯ АНАЛІЗУ ВІДКРИТИХ ЛОГІСТИЧНИХ СИСТЕМ

В роботі запропоновано тензорний підхід до аналізу моно-продуктових потоків у відкритій логістичній системі. Побудовано комплексну тензорну модель асиметричних потоків за критерієм мінімізації складських потужностей логістичної системи. Тензорна модель потоків призначена для структурної та функціональної оптимізації логістичної системи.

Ключові слова: *логістика, моно-продукт, тензор.*

Управління матеріальними, інформаційними та іншими потоками є важливою складовою частиною сучасного інтегрованого світу, яка досліджується в рамках логістики як науково-технічної дисципліни [1], актуальність якої обумовлена потенційними можливостями підвищення ефективності функціонування систем щодо виробляння та постачання ринкового продукту. Методологія оптимального управління логістичною системою базується на створенні адекватних математичних моделей процесів обігу матеріальних і нематеріальних ресурсів в розподілених комерційних мережах. Як відомо, логістичні системи поділяються на внутрішні (або замкнуті) моделі та відкриті (інтегровані) моделі [2-3]. Новим перспективним напрямком математичного моделювання логістичних систем є тензорний аналіз [4]. Однак відомі тензорні моделі логістичних систем потребують подальшого розвитку. Зокрема в літературі недостатньо публікацій по тензорним моделям відкритих систем логістики, тому метою роботи є побудова моделі тензорного аналізу моно-продуктових потоків у відкритій логістичній системі.

Розглянемо відкриту логістичну систему LS, яка має певну множину $\widetilde{T}$ складських терміналів $\widetilde{T}=\{T_n,\}$ n=1,2,…, N, розташованих на умовних кордонах системи (рис.1). Термінали T_n призначені для динамічного накопичення і постачання деякого моно-продукту p. Кожен з терміналів має зовнішні потоки p_n продукту p, а також внутрішні перехресні потоки p_{nm} між кожною парою терміналів T_n і T_m, $n, m=1,2,\dots, N;\ n\neq m$.

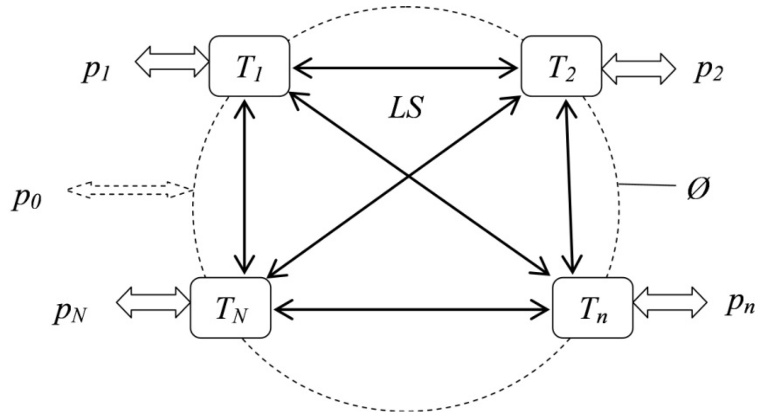


Рис.1. Топологічна схема відкритої логістичної системи

Доповнимо множину $\widetilde{T}$ відкритим пустим елементом Ø: $T=\widetilde{T}\cup Ø$. Будемо вважати, що елемент Ø певним чином взаємодіє з усіма терміналами $T_n\in\widetilde{T}$, а також із зовнішнім оточенням логістичної системи. Фізичний зміст пустого елементу Ø може бути різнім. Наприклад, елемент Ø символізує умовного спостерігача-адміністратора, що контролює функціонування логістичної системи. Для того, щоб отримати інформацію про стан системи, спостерігач повинен тим чи іншим шляхом взаємодіяти з усіма терміналами $T_n\in\widetilde{T}$. Ця взаємодія може бути достатньо слабкою, але вона відіграє принципову роль с точки зору забезпечення зв'язності всіх непустих елементів об'єднаної множини T [5]. Елемент Ø умовно позначимо на схемі логістичної системи (рис.1) у вигляді пунктирного кола, що перетинає усі термінали системи. Здатність елементу Ø взаємодіяти із зовнішнім оточенням логістичної системи позначимо на рис.1 у вигляді пунктирної стрілки. Назвемо пустий елемент Ø *нульовим терміналом* множини T, і позначимо його $T_0\in T$.

Домовимось, що потік, позначений як p_{nn}, $n=0,1,\ldots, N,$ відповідає потоку p_n, тобто $p_{nn}= p_n$. З урахуванням цього, відобразимо множину всіх зовнішніх і внутрішніх потоків логістичної системи LS у вигляді квадратної матриці потоків $P=\{p_{nm}\}$, $n, m=0,12,\ldots, N$, рис.2.

$P(n, m)=$

m / n	0	1	…	N
0	p_{00}	p_{01}	…	p_{0N}
1	p_{10}	p_{11}	…	p_{1N}
…	…	…	…	…
N	p_{N0}	p_{N1}	…	p_{NN}

Рис.2. Матриця потоків відкритої логістичної системи

Декомпозиція матриці потоків логістичної системи

Будемо вважати, що для кожної пари терміналів (T_n, T_m), $n, m=0,1,\ldots, N$ існують дві складові потоків: $(p_{nm} , p_{mn})=(\overleftarrow{p}_{nm} , \vec{p}_{nm})$, де $\overleftarrow{p}_{nm}$ – складова потоку в напрямку «до терміналу T_n від терміналу T_m», $\vec{p}_{nm}$– складова потоку в напрямку «від T_n до T_m». У випадку $m=n$ (діагональні елементи матриці P) $\overleftarrow{p}_{nn}$ означає «до терміналу T_n від зовнішнього оточення», а $\vec{p}_{nn}$ – «від T_n у зовнішнє оточення».

Відобразимо еквівалентним образом кожну пару $(p_{nm} , p_{mn})=(\overleftarrow{p}_{nm} , \vec{p}_{nm})$, $n, m=0,1,\ldots, N$ у комплексну пару (c_{nm},c_{mn}), де $c_{mn}=c^{*}_{nm}$, p^{S}_{nm} – симетрична складова пари (p_{nm} , p_{mn}), p^{A}_{nm}– антисиметрична складова пари (p_{nm} , p_{mn}). У разі $n=m$ замість комплексної пари (c_{nm},c^{*}_{mn}) достатньо мати одне з двох комплексних чисел, наприклад c_{nm}. Для цього розглянемо довільну пару невід'ємних дійсних чисел (α,β). Представимо (α,β) у вигляді:

$$f(\alpha,\beta)=(\eta,\xi);\qquad \eta=\min(\alpha,\beta);\qquad \xi=(\beta-\alpha)/2\,. \tag{1}$$

Нескладно довести, що відображення f є зворотним, тобто:

$$f^{-1}(\eta,\xi)=(\alpha,\beta);\;\; \beta=2\cdot\xi+\alpha;\;\; \alpha=\eta,\quad \xi\geq 0;\;\; \beta=\eta,\quad \xi\leq 0; \tag{2}$$

$$\begin{cases}(\alpha+\beta)/2=\eta+|\xi|,\\ (\alpha,\beta)\leftrightarrow[(\eta,\eta),(\xi,-\xi)].\end{cases} \tag{3}$$

Назвемо η та ξ відповідно симетричною та антисиметричною складовою пари (α, β). Має місце очевидна властивість:

$$\text{якщо } f(\alpha,\beta)=(\eta,\xi)\text{, то } f(\beta,\alpha)=(\eta,-\xi)\,. \tag{4}$$

Таким чином, кожна пара (α,β) взаємно зворотно відображується у комплексну пару $(\eta+i\cdot\xi)$. З урахуванням формул (1÷4), маємо відображення:

$$(p_{nm} , p_{mn}) = (\overleftarrow{p}_{nm} , \vec{p}_{nm})\leftrightarrow (c_{nm},c_{mn})=[(p^{S}_{nm}+i\cdot p^{A}_{nm}),\ (p^{S}_{nm} - i\cdot p^{A}_{nm})] \tag{5}$$

Матрицю $C=C(n,m)=\{c_{nm}\}$ назвемо *комплексною матрицею потоків* відкритої логістичної системи. Нехай $diagV=D$ – функція, яка створює діагональну матрицю D, що має на головній діагоналі елементи вектору V, а всі інші елементи рівні нулю. Позначимо $diag^{-1}M=V$ функцію, яка виконує зворотну операцію, тобто утворює вектор V з діагональних елементів матриці M. Застосуємо функцію $diag^{-1}$ до матриці C: $V= (diag^{-1}C)$. Комплексний вектор V назвемо *вектором зовнішніх потоків* відкритої логістичної системи. Комплексну діагональну матрицю $D(C)= diag(V)$назвемо *тензором зовнішніх потоків* відкритої логістичної системи. Дійсна частина тензору D – це симетрична складова, а умовна частина $Im(D)$ – це антисиметрична складова тензору D. Тензор D в загальному випадку визначає ортогональний комплексний ($N+1$)-мірний базис з неевклідовою метрикою. Комплексну матрицю Q з нульовою діагоналлю виду $Q=C-D(C)$назвемо *матрицею внутрішніх потоків* відкритої логістичної системи. Матриця Q, очевидно, є самоспряженою і має нульову головну діагональ (тобто є ермітовою). Дійсна частина матриці $Re(Q)$ – симетрична складова, а умовна частина $Im(Q)$ – це антисиметрична складова.

Перетворимо матрицю Q на тензор. Для цього знайдемо таку невироджену систему комплексних векторів $A=\{A_n\}$, $n=0,1,\dots, N$, для якої ермітова матриця H скалярних добутків $H=A\cdot A^*$ (де A^* − комплексно спряжена система векторів) співпадає з матрицею Q по всіх елементах, окрім діагональних. Невиродженість системи векторів $=\{A_n\}$ означає, що всі власні значення $\lambda^H{}_n$, $n=0,1,\dots, N$ матриці $H=A\cdot A^*$ є додатними дійсними числами, тобто матриця H є *позитивно обумовленою* [6].

Нормалізація спектру внутрішніх потоків логістичної системи

Позначимо вектор власних значень $\lambda^H=\{\lambda^H{}_n\}$, і назвемо цей вектор *спектром матриці H*. Діагональну матрицю $\Lambda^H= diag(\lambda^H{}_n)$ назвемо *спектральним тензором* ермітової матриці $H=A\cdot A^*$. Має місце властивість: $Tr(H)=Tr(\Lambda^H)$ [6], де Tr – функція «слід матриці» (додаток усіх діагональних елементів матриці). З у рахуванням вище сказаного, для перетворення комплексної матриці Q в тензор, треба перетворити Q в деяку позитивно обумовлену ермітову матрицю H, що не суперечить матриці Q (тобто матриця H співпадає з матрицею Q в усіх недіагональних елементах).

Сформульована вище задача, очевидно, не має однозначного рішення, оскільки існує безліч позитивно обумовлених ермітових матриць, що не суперечать матриці Q. Дійсно, якщо деяка матриця H_0 вирішує сформульовану вище задачу, то будь яка інша матриця $H=H_0+diag(V)$, де V – довільний вектор додатних дійсних чисел, також задовольняє усі умови сформульованої задачі. Тому конкретизуємо задачу перетворення матриці Q на тензор: будемо шукати таку позитивно обумовлену ермітову матрицю $H(Q)$ як функцію від матриці Q, що співпадає з усіма недіагональними елементами матриці Q, але при цьому має мінімальну потужність спектру:

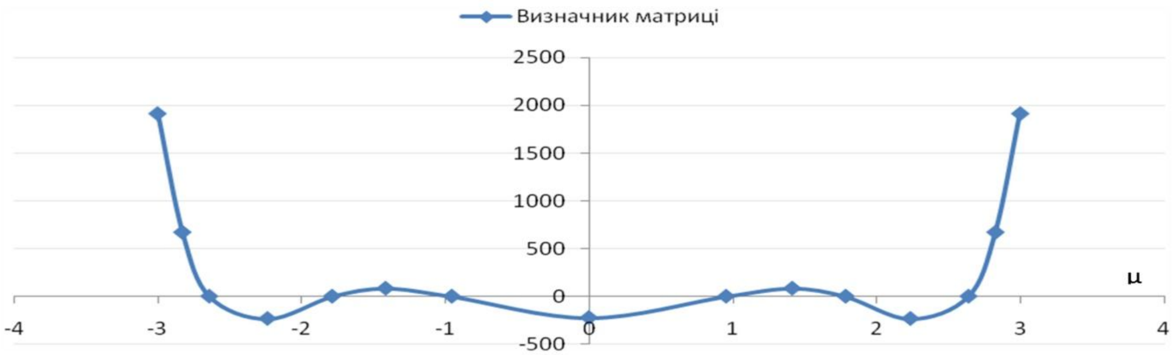
$$\begin{cases} H - diag(diag^{-1}H)=Q, \\ Tr(\Lambda^H)=Tr(H(Q))=min\,. \end{cases} \tag{6}$$

В якості початкового шагу для вирішення задачі (9) приймемо гіпотезу, що всі вектори A_n системи $A=\{A_n\}$, $n=0,1,\dots, N$ мають однакову довжину, яка задана параметром μ. Тоді на діагоналі матриці $H=A\cdot A^*$ повинні бути однакові числа μ^2. Нехай $\mu^2\cdot I$ – діагональна матриця, де I – одинична діагональна матриця, $H=H(\mu, Q)=\mu^2\cdot I+Q$. Розглянемо функцію виду:

$$f(\mu,Q)=det\,(H)= det(\mu^2\cdot I+Q), \tag{7}$$

де det – функція детермінанту матриці H. Нехай $\lambda^Q{}_{min}$ – мінімальне власне число матриці Q (воно обов'язково від'ємне, оскільки матриця Q має нульову діагональ, а додаток усіх власних чисел цієї матриці має дорівнювати нулю). На рис.3 зображено типовий вид функції $f(\mu,Q)$.

Оберемо вектори A_n таким чином, щоб мало місце $|A_n|=\mu_0>|\lambda^Q{}_{min}|^{0.5}$, $n=0,1,\dots, N$. При цьому всі власні числа λ^H у спектрі матриці H збільшаться на величину μ_0^2 порівняно зі спектром матриці Q. Звідси отримаємо $\lambda^H{}_{min} = \lambda^Q{}_{min} + \mu_0^2 >0$. Множину λ додатних власних чисел у спектрі λ^H матриці $H(\mu_0,Q)$ назвемо *нормалізованим спектром внутрішніх потоків* логістичної системи.



μ (горизонт. вісь)	-3	-2.8	-2.6	-2.2	-1.8	-1.4	-1	0	1	1.4	1.8	2.2	2.6	2.8	3
det(R) (вертик. вісь)	1918	672	0	-234	0	84	0	-224	0	84	0	-234	0	672	1918

Рис.3. Залежність детермінанту матриці H від параметру μ

Побудова тензорів для внутрішніх і зовнішніх потоків логістичної системи

Нехай $\lambda=\{\lambda_n\}$, $n=0,1,2,\ldots, N$ – нормалізований спектр внутрішніх потоків логістичної системи. Діагональну матрицю $\Lambda= diag(\lambda)$ назвемо *нормалізованим спектральним тензором* матриці H. Нехай $Z=\{Z_n\}$, $n=0,1,\ldots, N$ – система власних (комплексних) векторів ермітової матриці H. Представимо матрицю H у вигляді [6]:

$$\begin{cases} H=Z^*\cdot\Lambda\cdot Z= (Z^*\cdot\Lambda^{0.5})\cdot(Z\cdot \Lambda^{0.5})=A \cdot A^*, \\ A= Z^*\cdot\Lambda^{0.5};\ \ A^*= Z\cdot \Lambda^{0.5} . \end{cases} \tag{8}$$

<u>*Визначення*</u>.

1. Матрицю $H=Z^*\cdot\Lambda\cdot Z$ назвемо *комплексним тензором внутрішніх потоків* логістичної системи.

2. Дійсну частину $Re(H)$ тензора $H=Z^*\cdot\Lambda\cdot Z$ назвемо *дійсним рімановим метричним тензором* (або *метрикою*) *внутрішніх потоків* логістичної системи. Тензор $Re(H)$ задовольняє всі вимоги метричного тензору Рімана [6].

3. Умовну частину $Im(H)$ тензора $H=Z^*\cdot\Lambda\cdot Z$ назвемо *комплексним тензором плоского кручення* (або *крученням*) *внутрішніх потоків* логістичної системи.

4. Симетричну (дійсну) складову $Re(D(C))$ комплексного тензора зовнішніх потоків назвемо *метричним тензором* (або *метрикою*) *зовнішніх потоків* логістичної системи.

5. Антисиметричну (умовну) складову $Im(D(C))$ комплексного тензора зовнішніх потоків назвемо *тензором кривизни зовнішніх потоків* логістичної системи.

6. Систему $S=(D(C), H)$ з двох комплексних тензорів: неермітової діагональної комплексної матриці $D(C)$ і ермітової комплексної матриці $H=Z^*\cdot\Lambda\cdot Z$ – назвемо *комплексним метричним тензором з кривизною і крученням для зовнішніх і внутрішніх потоків* логістичної системи.

Висновки

В роботі побудовано модель тензорного аналізу моно-продуктових потоків у відкритій системі логістики. Модель представляє собою *комплексний метричний тензор з кривизною і крученням для зовнішніх і внутрішніх потоків* логістичної системи. Запропонована модель дозволяє використовувати математичний апарат тензорного аналізу для дослідження моно-продуктових потоків у відкритій логістичній системі. Подальші дослідження у даному напрямку передбачають створення прикладних комп'ютерних алгоритмів і програм для практичного використання запропонованої моделі тензорного аналізу моно-продуктових потоків, а також дослідження спектрів потоків для реальних систем логістики.

1. Гаджинский А.М. Логистика: Учебник. - М: Маркетинг 1998 - 228 с.
2. H. Donald Ratliff, William G. Nulty. Logistics Composite Modeling. The Logistics Inst. Georgia Tech. Technical White Paper Series. 1996 – 47 p.
3. R. Farr. Internal Logistics Modelling. – Univ. of Nottingham.
4. www.vivaceproject.com/content/.../5-2.pdf
5. Петров А. Е.Двойственные сетевые модели больших систем. «Сетевые модели в управлении» -Специальный выпуск 30.1. С.76−90. Режим доступа:
6. ubs.mtas.ru/search/redirect.php?xml_id=18080...
7. Тихонов В.И. Фрактальная топологическая модель открытой телекоммуникационной сети. – Наукові праці ОНАЗ ім. О.С.Попова, 2010, №1. с.49-58.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). − М.: Наука, 1973. − 832 с.