УДК 539.37

В.В. Божидарнік, В.М. Садівський
Луцький національний технічний університет

ПРО ЗГИН ТОНКИХ КОМПОЗИТНИХ ПЛАСТИН З ДЕФЕКТАМИ ТИПУ ТРІЩИН

Розглядається задача про граничну рівновагу анізотропної пластини, ослабленої спочатку розкритою тріщиною. Пластина розтягується до нескінченності монотонно зростаючим зусиллям. Матеріал пластини має в кожній точці три взаємно перпендикулярні площини пружної і міцнісної симетрії. Визначається граничне зусилля, що викликає початковий ріст тріщини, а також напрямок початкового поширення тріщини.

Ключові слова: *анізотропна пластина, анізотропія, прямолінійна тріщина.*

Багато сучасних композиційних матеріалів розглядаються як однорідні з анізотропією пружних і міцнісних властивостей. Оцінка крихкої міцності таких матеріалів із позицій механіки руйнування припускає наявність у їх структурі дефектів типу тріщин. Оскільки локальний напружено-деформований стан поблизу гострокінцевих дефектів є визначальним при формуванні критеріїв крихкого руйнування, виникає питання про врахування анізотропії на коефіцієнти інтенсивності і розподіл напружень в околі точки звороту дефекту.

Розглянемо таку анізотропну пластину, що згинається рівномірно розподіленими вздовж зовнішнього краю моментами m. Пластина ослаблена отвором, зовнішній вигляд якого відображається на зовнішність одиничного круга площини $\zeta = \rho e^{i\theta}$ з допомогою функції ,

$$z = R\left(\zeta \left(1+d\right) \big/ 2 + \left(1-d\right) \big/ 2\zeta + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + ib_n\right)\zeta^{-n} \right), \ (1)$$

де ε – малий параметр, що разом із постійними d, a_n, b_n характеризує форму отвору ($0 \le d \le 1$). Задача розв'язується у рамках теорії Кірхгора-Пуасона. Для визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень використовуємо метод граничного переходу: спочатку знаходимо розв'язок для гладкого отвору, а потім у даному розв'язку здійснюємо граничний перехід до випадку отвору з точками звороту на контурі [1,2]. Зокрема розглядаються дефекти, контури яких змінюються від прямолінійного розрізу до $N+1$-кутної гіпоциклоїди. Граничні умови першої основної задачі на контурі отвору мають вигляд:

$$\mathrm{Re}\left[p_1\Phi_1(z_1)/s_1 + p_2\Phi_2(z_2)/s_2\right] = -\int_0^s m \cdot dy - cx\,,$$

$$\mathrm{Re}\left[g_1\Phi_1(z_1) + g_2\Phi_2(z_2)\right] = -\int_0^s m \cdot dx - cy\,, \ (2)$$

де $p_j, g_j, s_j \ \ (j=1,2)$– пружні постійні згину [3] згідно [3,4] функції напружень і постійну *c*, яка входить у граничні умови (2), представим у вигляді ряду по схемах 2:

$$\Phi_j\left(z_j\right) = \sum_{i-0}^{\infty} \varepsilon^i \Phi_{ji}\left(z_j\right), \ (3)$$

$$c = \sum_{i-0}^{\infty} \varepsilon^i c^i \ (4)$$

Представляючи вираз (3) на контурі отвору у формулу (2), визначаємо $\Phi_{ji}\left(z_j\right)$. Постійні знаходимо з умов однозначності прогину [3,4]. Коефіцієнти інтенсивності напружень k_I і k_{II} визначимо зі співвідношень [5]

$$s_1\left(k_I p_2 + k_{II} g_2 s_2\right) = -24\left(p_1 g_2 s_2 - p_2 g_1 s_1\right)\Phi_1(1) / h^2 \sqrt{\omega''(1)}\,,$$

$$s_2\left(k_I p_1 + k_{II} g_2 s_1\right) = -24\left(p_1 g_2 s_2 - p_2 g_1 s_1\right)\Phi_2(1) / h^2 \sqrt{\omega''(1)}\,. \ (5)$$

Якщо тріщина утворює деякий кут φ із достатнім напрямком осі абсцис центральної системи координат, то величини k_I і k_{II} також обчислюємо по співвідношеннях (5), але при цьому використовуємо формули перетворення пружних постійних згину (жорсткостей анізотропної пластини) при повороті системи координат.

Вирази коефіцієнтів інтенсивності напружень у другому наближенні для вирізу, контур якого змінюється від прямолінійного розрізу $(\varepsilon = 0)$ до гіпоциклоїдального вирізу з трьома точками звороту $(\varepsilon = 1/3)$, мають такий вигляд:

$$k_I = R\left(\left(1+2\varepsilon\right)m - 4\varepsilon^2 \operatorname{Re}\left(g_1\lambda_1^2\omega^2 A_{01} + g_2\lambda_2^2\omega^2 B_{01}\right)\right) \Big/ \sqrt{1+4\varepsilon}\,,$$

$$k_{II} = Rm\left(c_0\left(1+2\varepsilon\right) + 4\varepsilon^2 \operatorname{Re}\left(p_1\lambda_1^2\omega^2 A_{01}/s_1 + p_2\omega^2\lambda_2^2 B_{01}\right)\right) \Big/ \sqrt{1+4\varepsilon}\,, \quad (6)$$

де

$$A_{01} = Rs_1\left(\left(2\varepsilon mi + c_0\right)g_2 s_2 - p_2\left(m + 2\varepsilon c_{01}\right)\right)/2\left(p_1 g_2 s_2 - p_2 g_1 s_1\right),$$

$$B_{01} = -Rs_2\left(\left(2\varepsilon di - c_0\right)g_1 s_1 - p_1\left(m - 2\varepsilon c_{02}\right)\right)/2\left(p_1 g_2 s_2 - p_2 g_1 s_1\right),$$

$$c_0 = \left(2\varepsilon \operatorname{Re} s - JmL\right)/\left(z_m F - d \operatorname{Re} N\right),$$

$$L = \left(2\varepsilon i\left(g_2 - g_1\right) + p_1 s_2 - p_2 s_1\right)/\left(p_1 g_2 s_2 - p_2 g_1 s_1\right),$$

$$F = \left(\left(g_1 - g_2\right)s_1 s_2 + 2\varepsilon i\left(p_1 s_2 - p_2 s_1\right)\right)/\left(p_1 g_2 s_2 - p_2 g_1 s_1\right), \quad (7)$$

$$S = \left(2\varepsilon i s_1 s_2\left(g_2 s_1 - g_1 s_2\right) + p_1 s_2^2 - p_2 s_1^2\right)/\left(p_1 g_2 s_2 - p_2 g_1 s_1\right),$$

$$N = \left(s_1 s_2\left(g_1 s_2 - g_2 s_1\right) + 2\varepsilon i\left(p_1 s_2^2 - p_2 s_1^2\right)\right)/\left(p_1 g_2 s_2 - p_2 g_1 s_1\right).$$

При цьому у функції (1) потрібно прийняти $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_n = 0$, $a_2 = 1$, $b_n = 0$, $d = 2\varepsilon$.
Якщо полярна вісь локальної системи координат співпадає з одним із головних напрямків пружності, то $k_{II} = 0$, а вираз для k_I дещо спрощується:

$$k_I = Rm\left(1 + 2\varepsilon^2\left(g_2\beta_2 h_2^2\left(1 + 2\varepsilon g_1\beta_1\right) - g_1\beta_1 h_1^2\left(p_2 - 2\varepsilon g_2\beta_2\right)\right)\right) \Big/ \left(p_1 g_2\beta_2 - p_2 g_1\beta_1\right);$$

$$0 \le \varepsilon \le 1/2\,, \quad (8)$$

де

$$p_j = D_{11} - D_{12}\beta_j^2;\; g_j = D_{12} - D_{22}\beta_j^2;$$

$$D_{11} = a_{22}/12\left(a_{11}a_{12} - a_{12}^2\right);\; D_{22} = a_{11}/12\left(a_{12}a_{22} - a_{12}^2\right);$$

$$D_{12} = a_{12}/12\left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right);\; D_{66} = 1/12a_{66};\; h_j = \left(1-\beta_j\right)/\left(1+2\varepsilon\beta_j\right); \quad (j = 1,2).$$

Тут a_{k_I} $(k,i = 1,2,6)$, β_j – пружні постійні ортотропного матеріалу [3].

Розрахунки проведені за виразами (6), (8).

Досліджували залежність k_I/k_I^T (k_I^T – коефіцієнт інтенсивності напружень для прямолінійної тріщини) від розкриття дефекту ε для матеріалів із різним ступенем ортотропії.

Із отриманих результатів можна зробити висновок, що вплив ортотропії біля вершини гострокінцевого вирізу, полярна вісь якого співпадає з напрямком більшої жорсткості матеріалу, значно сильніший, ніж у напрямку мінімальної жорсткості.

1. Бережницкий Л.Т., Садивский В.М. К теории остроконечных концентраторов напряжений в анизотропных пластинах // Физ.-хим. механика материалов. – 1977. – №3. – С. 82-90.
2. Бережницкий Л.Т., Садивский В.М., Онышко Л.И. Изгиб анизотропной пластины с трещиной // Прикл. механика. – 1978. – №2. – С. 42-49.
3. Ермолаев Б.И. Приближенный метод определения напряжений при изгибе анизотропных пластин с отверстием // Изв. вузов СССР. Стр-во и архитектура. – 1960. –№1. – С. 35-44.
4. Панасюк В.В., Бережницкий Л.Т., Садивский В.М. О влиянии анизотропии материала на коэффициенты интенсивности напряжений возле дефектов типа трещин // Проблемы прочности. – 1977. – №4. – С. 16-21.
5. Савин Г.Н. Концентрация напряжений около отверстий. – М.- Л.: ГИТТЛ, 1956. – С. 496 .