

УДК 539.03

Р.В. Пасічник

Луцький національний технічний університет

РОЗРАХУНОК ОДНОПОРОЖНИННОГО ГІПЕРБОЛОЇДА ЗА МОМЕНТНОЮ ТЕОРІЄЮ МЕТОДОМ СІТОК

Використана методика розрахунку оболонок від'ємної Гаусової кривини методом сіток. Розглянуто розрахунок однопорожнинного гіперолоїда. Вивчається моментний напружений стан при навантаженні від власної ваги. Розглянуто питання внутрішньої сходимості розв'язку.

Ключові слова: оболонка, однопорожнинний гіперолоїд, метод сіток, моментна теорія, скінченні різниці, гіперолоїд, скінченні різниці, моменти, оболонки.

В статті розглядається розрахунок однопорожнинного гіперолоїда при різних навантаженнях за моментною теорією методом сіток. Система рівнянь теорії оболонок записана в переміщеннях має вигляд:

$$\begin{aligned} \nabla^4 W + \frac{12}{h^2} \left[\frac{1}{R_1} \frac{\partial U}{\partial \theta} (K_1 + \mu K_2) + \frac{1}{R_1 r} \frac{\partial r}{\partial \theta} U (K_2 + \mu K_1) + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \theta} U (K_2 + \mu K_1) + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} (K_2 + \mu K_1) + (K_1^2 + 2\mu K_1 \times K_2 + K_2^2) \right] W = \frac{g_n}{D}; \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{r}{R_1} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r K_1 W) + \mu \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial r}{\partial \theta} U \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} (K_2 r W) \right] + \frac{(1-\mu) R_1}{2} \frac{\partial^2 U}{r \partial \varphi^2} + \frac{(1-\mu) r}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) - \\ - \frac{\partial r}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{1}{R_1 r} \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 U - K_2 W \frac{\partial r}{\partial \theta} - \mu \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial r}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + K_1 W \frac{\partial r}{\partial \theta} \right) = - \frac{R_1 r}{B} g_1 \quad (1) \\ \frac{R_1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + R_1 (K_2 + \mu K_1) \frac{\partial W}{\partial \varphi} + \frac{1-\mu}{2} \times \\ \times \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{r^2}{R_1} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{V}{r} \right) \right] + \\ + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial r}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial r}{\partial \theta} \frac{r}{R_1} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{V}{r} \right) = - \frac{R_1 r}{B} g_2; \end{aligned}$$

В статті прийнято, що зміна кривини і кручення, обумовлені компонентами переміщення дотичними до серединної поверхні, як правило, приймаються несуттєвими. Обґрунтування використання цього методу було введено в науку Х.М. Муштарі і Л.Донеллом [1], та широко використовується в задачах стійкості оболонок обертання.

В (1) прийняті позначення:

$$\begin{aligned} \nabla^4 W = \frac{1}{R_1 r} \left[\frac{r}{R_1} \frac{\partial^2 (\nabla^2 W)}{\partial \theta^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{r}{R_1} \right) \frac{\partial (\nabla^2 W)}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + \frac{R_1}{r} \frac{\partial^2 (\nabla^2 W)}{\partial \varphi^2} \right]; \quad (2) \end{aligned}$$

$$\nabla^2 W = \frac{1}{R_1 r} \left[\frac{r}{R_1} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{r}{R_1} \right) \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{R_1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right];$$

U, V, W – компоненти зміщення (рис. 1)

h – товщина оболонки; D, B – циліндрична жорсткість на розтяг елемента оболонки; r, R – коефіцієнти першої квадратичної форми Гауса; K₁, K₂ – кривини поверхні; μ = 0,2 – коефіцієнт Пуассона;

g₁, g_n, g₂ – компоненти інтенсивності навантаження.

Геометрія поверхні визначається наступними параметрами:

$$r = \frac{a}{c} \sqrt{z^2 + c^2} \quad a, c - \text{параметри гіперболи;}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dr}{dz} = \frac{a}{rc} \sqrt{r^2 - a^2}, \quad r = a(1 - \alpha^2 \operatorname{tg}^2 \theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{a\alpha^2}{\cos^2 \theta \sqrt{(1 - \alpha^2 \operatorname{tg}^2 \theta)^3}},$$

$$R_1 = \frac{\alpha}{c^2} \sqrt{[(1 + \alpha^2)r^2 - a^2]^3} \quad (3)$$

$$K_1 = -\frac{1}{R_1}; \quad K_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{r}{\cos \theta}.$$

Співвідношення Кодацці:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{r}{R_1} \right) = -\frac{1}{R_1} \frac{\partial r}{\partial \theta}, \quad \text{або} \quad \frac{\partial r}{\partial \theta} = R_1 \sin \theta. \quad (4)$$

Складність рішення поставленої задачі обумовлюється великою розмірністю задачі, високим порядком диференціювання рівнянь в часткових похідних. Їх коефіцієнти являються складними функціями координат на поверхні оболонки. Тому при рішенні поставленої задачі переходять до дискретних методів алгебраїзації рівнянь серед яких найбільш ефективним є метод кінцевих елементів і метод сіток [2].

Для дискретизації задачі на серединній поверхні, зазвичай, будують координатні лінії, що співпадають з лініями кривини поверхні. Рівняння континуальної системи (1) апроксимуються кінцево-різнісними аналогами в центральних різницях першого порядку точності, використовуючи при цьому цілочисельні координати, що відповідають номерам вузлів різнісної сітки в напрямку θ і φ. Для визначення коефіцієнтів рівнянь (першої і другої квадратичної форми) використовуються вузли між лініями основної сітки.

Кінцево-різнісні аналоги рівнянь для вузла сітки (i, k) мають вигляд:

$$\begin{aligned} & - \left[\left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+0.5} + \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} + (1 - \mu) \lambda^2 \left(\frac{R_1}{r} \right)_{i,k} + \right. \\ & \left. + \frac{\nabla \theta^2}{R_1 r} \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)_{i,k}^2 \right] U_{i,k} + \left[\left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+0.5} + \frac{\mu}{2} \Delta \theta \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial r}{\partial \theta} \right)_{i,k+1} - \frac{\mu}{2} \Delta \theta \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial r}{\partial \theta} \right)_{i,k} \right] U_{i,k+1} + \\ & \left. + \left[\left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} - 0.5 \mu \Delta \theta \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial r}{\partial \theta} \right)_{i,k-1} + \right. \right. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
& + 0.5\mu\Delta\theta\left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)_{i,k}\left]U_{i,k-1} + 0.5(1-\mu)\lambda^2\left(\frac{R_1}{r}\right)_{i,k} \times \right. \\
& \times (U_{i+1,k} + U_{i-1,k}) + 0.25\lambda\left(\mu + (1-\mu)0.5\frac{r_{i,k}}{r_{i,k+1}}\right) \times \\
& \times (V_{i+1,k+1} + V_{i-1,k+1}) + 0.25\lambda\left[\mu + 0.5(1-\mu)\frac{r_{i,k}}{r_{i,k-1}}\right] \times \\
& \times (V_{i-1,k-1} - V_{i+1,k-1}) - 0.25\lambda\Delta\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)_{i,k} (V_{i+1,k} - \\
& - V_{i-1,k}) - \Delta\theta^2\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)_{i,k} (K_2 + \mu K_1)_{i,k} W_{i,k} + \quad (5) \\
& + 0.5\Delta\theta r_{i,k+1} (K_1 + \mu K_2)_{i,k+1} W_{i,k+1} - 0.5\Delta\theta r_{i,k-1} \times \\
& \times (K_1 + \mu K_2)_{i,k-1} W_{i,k-1} = -\frac{\Delta\theta^2}{B}(R_1 r g)_{i,k}; \\
& - \left[2\left(\frac{R_1}{r}\right)_{i,k} + \frac{1-\mu}{2\lambda^2}\left(\frac{r^2}{R_1}\right)_{i,k+0.5}\left(\frac{1}{r}\right)_{i,k} + \frac{1-\mu}{2\lambda^2} \times \right. \\
& \times \left(\frac{r^2}{R_1}\right)_{i,k-0.5}\left(\frac{1}{r}\right)_{i,k}\left]V_{i,k} + \left(\frac{R_1}{r}\right)_{i,k} (V_{i+1,k} + \quad (6) \\
& + V_{i-1,k}) + \left[\frac{1-\mu}{2\lambda^2}\left(\frac{r^2}{R_1}\right)_{i,k+0.5}\left(\frac{1}{r}\right)_{i,k+1} + \frac{1-\mu}{4\lambda}\Delta\varphi \times \right. \\
& \times \left(\frac{r}{R_1}\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)_{i,k}\left(\frac{1}{r}\right)_{i,k+1}\left]V_{i,k+1} + \left[\frac{1-\mu}{2\lambda^2}\left(\frac{r^2}{R_1}\right)_{i,k-0.5} \times \right. \\
& \times \left(\frac{1}{r}\right)_{i,k-1} - \frac{1-\mu}{4\lambda}\Delta\varphi\left(\frac{r}{R_1}\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)_{i,k}\left(\frac{1}{r}\right)_{i,k-1}\left]V_{i,k-1} + \\
& + 0.5\Delta\varphi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)_{i,k} (U_{i+1,k} - U_{i-1,k})\frac{3-\mu}{2} + \frac{1+\mu}{8\lambda}(U_{i+1,k+1} - U_{i+1,k-1} + U_{i-1,k-1} - U_{i-1,k+1}) + \\
& + 0.5\Delta\varphi(R_1)_{i,k} (K_2 + \mu K_1)_{i,k} (W_{i+1,k} - W_{i-1,k}) = \\
& = -\frac{\Delta\varphi^2}{B}(R_1 r g_2)_{i,k}; \\
& \left\{\left[\left(\frac{r}{R_1}\right)_{i,k+0.5}^2\left(\frac{1}{R_1 r}\right)_{i,k+1} + \rho_{i,k}^2\left(\frac{1}{R_1 r}\right)_{i,k} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{r}{R_1}\right)_{i,k-0.5}^2\left(\frac{1}{R_1 r}\right)_{i,k-1} + 2\left(\frac{R_1}{r^3}\right)_{i,k}\lambda^4\right]W_{i,k} - \right. \\
& \left. - \left[\rho\left(\frac{1}{R_1 r}\right)_{i,k}\left(\frac{r}{R_1}\right)_{i,k+0.5} + \left(\frac{r}{R_1}\right)_{i,k+0.5}\left(\frac{1}{R_1 r}\right)_{i,k+1} \times \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \rho_{i,k+1} \left] W_{i,k+1} - \left[\rho \left(\frac{1}{R_1 r} \right)_{i,k} \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} \left(\frac{1}{R_1 r} \right)_{i,k-1} \rho_{i,k-1} \right] W_{i,k-1} - \\
 & - 2\rho \left(\frac{1}{r^2} \right)_{i,k} \lambda^2 (W_{i+1,k} + W_{i-1,k}) + \left[\left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+0.5} \times \right. \\
 & \left. \times \left(\frac{1}{r^2} \right)_{i,k+1} \lambda^2 + \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+0.5} \left(\frac{1}{r^2} \right)_{i,k} \lambda^2 \right] \times \\
 & \times (W_{i+1,k+1} + W_{i-1,k-1}) + \left[\left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} \left(\frac{1}{r^2} \right)_{i,k-1} \times \right. \\
 & \left. \times \lambda^2 + \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} \left(\frac{1}{r^2} \right)_{i,k} \lambda^2 \right] (W_{i+1,k-1} + \\
 & + W_{i-1,k-1}) + \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+0.5} \left(\frac{1}{R_1 r} \right)_{i,k+1} \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+1.5} \times \\
 & \times W_{i,k+2} + \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} \left(\frac{1}{R_1 r} \right)_{i,k-1} \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-1.5} W_{i,k-2} + \\
 & + \left(\frac{R_1}{r^3} \right)_{i,k} \lambda^4 (W_{i+2,k} + W_{i-2,k}) \left. \right\} + \frac{12}{h^2} (K_1^2 + \\
 & + 2\mu K_1 K_2 + K_2^2)_{i,k} (r R_1)_{i,k} \Delta \theta^4 W_{i,k} + \frac{6}{h^2} \Delta \theta^3 \times \\
 & \times r_{i,k} (U_{i,k+1} - U_{i,k-1}) (K_1 + \mu K_2)_{i,k} + \frac{12}{h^2} \Delta \theta^4 \times \\
 & \times \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)_{i,k} (K_2 + \mu K_1)_{i,k} U_{i,k} + \frac{6}{h^2} \Delta \theta^4 (K_2 + \\
 & + \mu K_1)_{i,k} (R_1)_{i,k} \frac{V_{i+1,k} - V_{i-1,k}}{\Delta \varphi} = \\
 & = \left(\frac{R_1 r g_n}{D} \right)_{i,k} \Delta \theta^4;
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Розглядається розрахунок градирні (рис. 6.) з параметрами: $a=35$ м, $c=82,4$ м, $h=0,18$ м, $\alpha = c/a = 2,3211$ при різному кроці сітки n . Навантаження прийняті від ваги G і внутрішнього тиску $g_n - \text{const}$.

Граничні умови: верхнє січення оболонки при $\theta_{\min} = -8,626^\circ$ вільне від в'язів зашцимлення $S=0$, $N_1=0$, $R_1=0$, $M_1=0$. $\theta = 18,66^\circ$ (нижній край оболонки) повне зашцимлення $a = V = W = \frac{\partial W}{\partial \theta} = 0$.

Для визначення значення функцій переміщень на контурі і за контуром використовують слідуєчі різнісні аналоги (8, 9, 10, 11)

Функція V для краю $\varphi = \varphi_{\min}$

$$\begin{aligned}
& -2\left(\frac{R_1}{r}\right)_{i,k} + \frac{1-\mu}{2\lambda^2}\left(\frac{r^2}{R_1}\right)_{i,k+0.5}\left(\frac{1}{r}\right)_{i,k} + \frac{1-\mu}{2\lambda^2} \times \\
& \times \left(\frac{r^2}{R_1}\right)_{i,k-0.5}\left(\frac{1}{r}\right)_{i,k} \Big] V_{i,k} + 2\left(\frac{R_1}{r}\right)_{i,k} V_{i+1,k} + \\
& + \frac{\Delta\varphi}{2}(1+\mu)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)_{i,k} U_{i,k} + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1-3\mu}{4}\right) \times \quad (8) \\
& \times (U_{i,k-1} + U_{i,k+1}) + [\Delta\varphi(R_1)_{i,k}(K_2 + \mu K_1)_{i,k}] \times \\
& \times (W_{i,k} + W_{i+1,k}) + \frac{1+\mu}{4\lambda}(U_{i+1,k+1} - U_{i+1,k-1}) + \\
& + \frac{3-\mu}{2}\Delta\varphi\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\frac{1}{r}\right)_{i,k} U_{i+1,k} + \frac{1-\mu}{2\lambda^2}\left[\left(\frac{r^2}{R_1}\right)_{i,k+0.5} + \right. \\
& \left. + \frac{\Delta\theta}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\frac{r}{R_1}\right)_{i,k}\right]\left(\frac{V}{r}\right)_{i,k} + \frac{1-\mu}{2\lambda^2}\left(\frac{r^2}{R_1}\right)_{i,k-0.5} - \\
& - \frac{\Delta\theta}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\frac{r}{R_1}\right)_{i,k}\left]\left(\frac{V}{r}\right)_{i,k-1} = \\
& - \frac{\Delta\varphi^2}{B}(R_1 r g_2)_{i,k} + 2\frac{\Delta\varphi}{B}(R_1)_{i,k}(N_2)_{i,k};
\end{aligned}$$

Функція U для краю θ_{\min}

$$\begin{aligned}
& -\left[\left(\frac{r}{R_1}\right)_{i,k+0.5} + \left(\frac{r}{R_1}\right)_{i,k-0.5} + (1-\mu)\lambda^2\left(\frac{R_1}{r}\right)_{i,k} + \right. \\
& \times \Delta\theta^2\left(\frac{1}{R_1 r}\right)_{i,k}\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)_{i,k}^2 + 2\mu\Delta\theta\left(\frac{r}{R_1}\right)_{i,k-0.5} \times \\
& \left. \times \left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\frac{1}{r}\right)_{i,k}\right] U_{i,k} + \left[\left(\frac{r}{R_1}\right)_{i,k+0.5} + \left(\frac{r}{R_1}\right)_{i,k-0.5} + \mu\Delta\theta\left(\left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)_{i,k+1} - \left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)_{i,k}\right)\right] U_{i,k+1} + \quad (9) \\
& + \frac{1-\mu}{2}\lambda^2\left(\frac{R_1}{r}\right)_{i,k}(U_{i+1,k} + U_{i-1,k}) + \Delta\theta r_{i,k+1} \times \\
& \times (K_1 + \mu K_2)_{i,k+1} W_{i,k+1} - \Delta\theta(K_1 + \mu K_2)_{i,k} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[r_{i,k} - 2(R_1)_{i,k} \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} \right] W_{i,k} - \Delta\theta^2 \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)_{i,k} \times \\ & \times (K_2 + \mu K_1)_{i,k} W_{i,k} + \left(\lambda \frac{\mu}{2} + \frac{1-\mu}{4} \lambda \frac{r_{i,k}}{r_{i,k+1}} \right) \times \\ & \times (V_{i+1,k+1} - V_{i-1,k+1}) - \left[\frac{1+\mu}{4} \lambda + \frac{\Delta\theta}{r} \lambda \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \frac{1}{r} \right)_{i,k} - \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} \mu \lambda \left(\frac{R_1}{r} \right)_{i,k} \right] (V_{i+1,k} - V_{i-1,k}) = \\ & = 2\Delta\theta \frac{(R_1)_{i,k}}{B} \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} (N_1)_{i,k} - \frac{\Delta\theta^2}{B} (R_1 r g_1)_{i,k}; \end{aligned}$$

Функція **W** для краю θ_{\min}

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+0.5} \left(\frac{1}{R_1 r} \right)_{i,k+1} \left(\left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+0.5} + \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} \right) + \right. \\ & \left. + \rho_{i,k}^2 \left(\frac{1}{R_1 r} \right)_{i,k} + 2 \left(\frac{R_1}{r^3} \right)_{i,k} \lambda^4 + 4(1-\mu) \lambda^2 \left(\frac{1}{r^3} \right)_{i,k} \times \right. \\ & \quad \times \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)_{i,k} \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} \Delta\theta + 12 \frac{\Delta\theta^4}{h^2} (r R_1)_{i,k} (K_1^2 + \\ & \quad + 2\mu K_1 K_2 + K_2^2)_{i,k} \left. \right] W_{i,k} - \left[\rho_{i,k} \left(\frac{1}{R_1 r} \right)_{i,k} \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+0.5} + \right. \\ & \quad \left. + \rho_{i,k+1} \left(\frac{1}{R_1 r} \right)_{i,k+1} \left(\left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} + \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+0.5} \right) + \right. \\ & \quad \left. + 2(1-\mu) \lambda^2 \left(\frac{1}{r^2} \right)_{i,k} \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} \right] W_{i,k+1} - \left[\rho_{i,k} \times \left(\frac{1}{R_1 r} \right)_{i,k} \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} - 2(1-\mu) \lambda^2 \left(\frac{1}{r^2} \right)_{i,k} \times \right. \\ & \quad \times \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} \left. \right] W_{i,k-1} - 2\lambda^2 \left[\rho_{i,k} \left(\frac{1}{r^2} \right)_{i,k} + (1-\mu) \times \right. \\ & \quad \times \left. \left(\frac{1}{r^3} \right)_{i,k} \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)_{i,k} \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} \Delta\theta \right] (W_{i+1,k} + W_{i-1,k}) + \\ & \quad + \left[\lambda^2 \left(\frac{1}{r^2} \right)_{i,k+1} \left(\left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+0.5} + \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} \right) + \left(\frac{1}{r^2} \right)_{i,k} \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+0.5} + (1-\mu) \left(\frac{1}{r^2} \right)_{i,k} \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} \right] \times \\ & \quad \times (W_{i+1,k+1} + W_{i-1,k+1}) + \lambda^2 \left[\left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} \left(\frac{1}{r^2} \right)_{i,k} - \right. \\ & \quad \left. - (1-\mu) \left(\frac{1}{r^2} \right)_{i,k} \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} \right] (W_{i+1,k-1} + W_{i-1,k-1}) + \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{R_1 r} \right)_{i,k+1} \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+1.5} \left[\left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+0.5} + \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} \right] \times \\
& \times W_{i,k+2} + \left(\frac{R_1}{r^3} \right)_{i,k} \lambda^4 (W_{i+2,k} + W_{i-2,k}) + \frac{12}{h^2} \Delta\theta^3 \times \times r_{i,k} (K_1 + \mu K_2)_{i,k} (U_{i,k+1} - U_{i,k}) + \frac{12}{h^2} \Delta\theta^4 \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)_{i,k} \times \\
& \times (K_2 + \mu K_1)_{i,k} U_{i,k} + \frac{6}{h^2} \lambda \Delta\theta^3 (K_2 + \mu K_1)_{i,k} (R_1)_{i,k} \times \\
& \times (V_{i+1,k} - V_{i-1,k}) = \frac{\Delta\theta^4}{D} (R_1 r g_n)_{i,k} - 2 \frac{\Delta\theta^3}{D} (R_1)_{i,k} \times \\
& \times \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} (Q_1^*)_{i,k};
\end{aligned}$$

Згинальний момент на краях: $\theta_{\min} - const$, $\theta_{\max} - const$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\Delta\theta^2}{D} (M_1)_{i,k} = \left[\left(\frac{1}{R_1} \right)_{i,k} \left(\frac{1}{R_1} \right)_{i,k+0.5} + \mu \frac{\Delta\theta}{2} \times \right. \\
& \times \left. \left(\frac{1}{R_1^2 r} \frac{\partial r}{\partial \theta} \right)_{i,k} \right] W_{i,k+1} - \left(\frac{1}{R_1} \right)_{i,k} \left[\left(\frac{1}{R_1} \right)_{i,k+0.5} + \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{R_1} \right)_{i,k-0.5} \right] + 2\mu\lambda^2 \left(\frac{1}{r^2} \right)_{i,k} \left[W_{i,k} + \left[\left(\frac{1}{R_1} \right)_{i,k} \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \left(\frac{1}{R_1} \right)_{i,k-0.5} - \mu \frac{\Delta\theta}{2} \left(\frac{1}{R_1^2 r} \frac{\partial r}{\partial \theta} \right)_{i,k} \right] W_{i,k-1} + \mu\lambda^2 \times \times \left(\frac{1}{r^2} \right)_{i,k} (W_{i+1,k} + W_{i-1,k}); \right.
\end{aligned} \quad (11)$$

Прийнято позначення:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{\Delta\theta}{\Delta\varphi}; \\
\rho_{i,k} &= \left[\left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+0.5} + \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} + 2\lambda^2 \left(\frac{R_1}{r} \right)_{i,k} \right]; \\
\rho_{i,k+1} &= \left[\left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+1.5} + \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k+0.5} + 2\lambda^2 \left(\frac{R_1}{r} \right)_{i,k+1} \right]; \\
\rho_{i,k-1} &= \left[\left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-1.5} + \left(\frac{r}{R_1} \right)_{i,k-0.5} + 2\lambda^2 \left(\frac{R_1}{r} \right)_{i,k-1} \right];
\end{aligned}$$

Враховуючи симетрію задачі, розглядається напружений стан лише в напрямку координати θ з сіткою показаною на рис. 7. при $n=10$. При цьому крок $\Delta\theta = 0,04762$ рад. приймається постійним.

Для внутрішніх вузлів сітки записуються різнісні аналоги (5, 6, 7), відповідні контурні рівняння (9, 10, 11).

Результати рішення представлені на рис. 2-5. в вигляді епюр переміщень та зусиль. Рішення показує що прогини від власної ваги W та V одного порядку. Порівнюючи зусилля N_1 знайдені за безмоментною теорією і N_1 в нашому рішенні, бачимо що найбільше розходження виникає біля нижнього защемленого краю. Таку розбіжність можна пояснити значним краєвим ефектом. M_1 по всій висоті градирні величина дуже мала. Виняток становлять точки розміщені в безпосередній близькості до нижнього защемленого краю, де значення моментів різко зростають, досягаючи екстремуму в защемленні в наслідок значного краєвого ефекту.

Для встановлення точності рішення, задача розв'язана при різних кроках сітки для $n=6, 10, 12, 18, 24, 48$, розбиттях. Результати дослідження представлені в таблиці 1.

Таблиця 1

Кількість розбиттів	січення $Z=-17.10$ м		січення $Z=-103.99$ м	
	W (мм)	U (мм)	N_1 (кН)	M_1 (10^{-2} ·кН·м)
6	-0,85	8,90	120	3,05
12	-0,92	9,64	139	1,27
18	-0,93	9,84	148	1,93
24	-0,94	9,93	157	2,50
48	-0,95	9,99	161	2,82

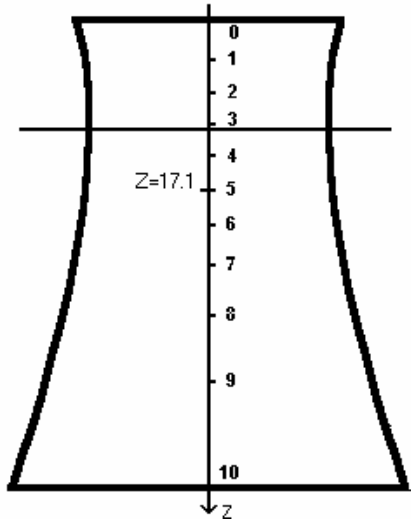


Рис. 1. Градирня

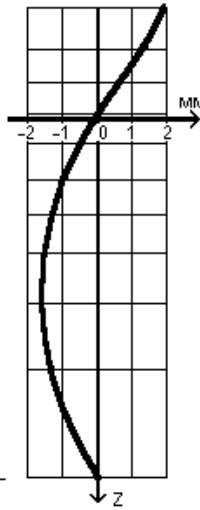


Рис. 2. Епюра W

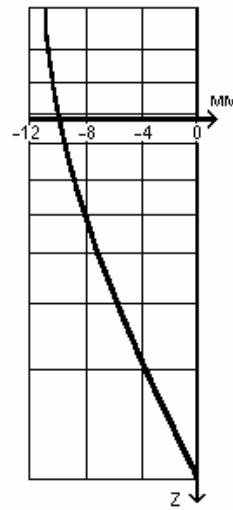


Рис. 3. Епюра U

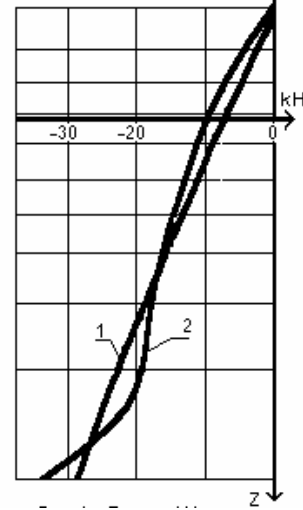


Рис. 4. Епюра N_1
1 – Безмоментна теорія
2 – Метод сіток

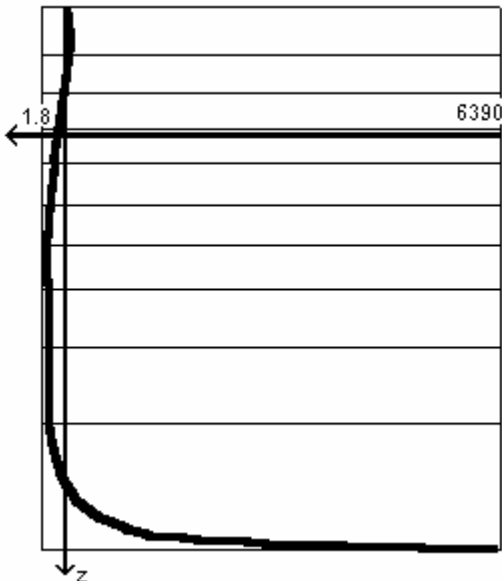


Рис. 5. Епюра M_1 (кН м 10^{-8})

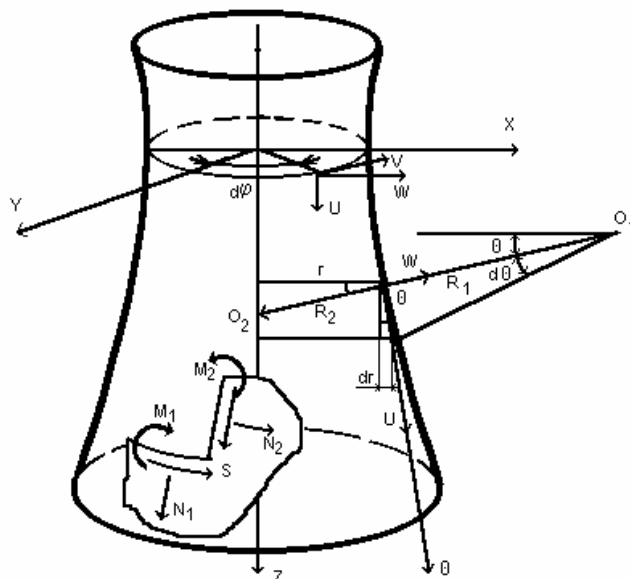


Рис. 6. Схема зусиль градирні

1. Муштари Х.М., Галимов К.З. Нелинейная теория оболочек. – Казань: Таткнигоиздат., 1957–С. 432.
2. Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Гайдачук В.В. Расчет оболочек сложной формы. – К.: Будівельник, 1990. – С. 192.