УДК 514.8

С.І. Пустюльга, Ю.В. Клак, І.В. Прушко
Луцький національний технічний університет

АНАЛІЗ ЧАСОВИХ РЯДІВ У ВИГЛЯДІ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНИХ ФРАКТАЛЬНИХ СТРУКТУР

У роботі запропоновано алгоритми опису часових рядів, як фрактальних структур, за допомогою систем лінійних рівнянь статико-геометричного методу. Наведено методику визначення геометричних параметрів фракталів, локально, за допомогою характеристик формоутворюючих сил. Через значення сил у вузлах фрактальної структури запропоновано алгоритм для визначення фрактальної розмірності заданих часових рядів.

Постановка проблеми. Прогнозування об'ємів пасажирських перевезень (як довгострокове, так і короткострокове) є для сучасних компаній одним із найважливіших аспектів управлінської діяльності. При довгостроковому прогнозуванні враховуються тенденції світового ринку автоперевезень, які знаходять віддзеркалення в збільшенні або зменшенні частоти рейсів на різних напрямах при складанні розкладу та маршрутів. Короткострокове прогнозування дозволяє оперативно відреагувати на зміну ситуації на ринку перевезень і збудувати стратегію компанії, виходячи з передбачуваного об'єму пасажиропотоку [3]. Одним із варіантів формування прогнозу об'ємів пасажирських перевезень є прогнозування на основі обробки часових рядів, яке дозволяє отримати достатньо надійні результати.

Починаючи з кінця минулого століття тема аналізу хаотичних часових рядів упевнено займає одне з лідируючих позицій. Причому ряди розглядаються самі різні, починаючи від традиційних (геофізичних, економічних, медичних) і закінчуючи тими, які стали популярними порівняно недавно, а саме ряди, що є моделями пасажиропотоків [1]. Всі ці ряди, зазвичай, породжуються складними системами, опис яких у вигляді диференціальних рівнянь або дискретних відображень пов'язаний із великими труднощами. Проте надійно встановлено, що такі ряди, як правило, є фракталами. Це означає, що не дивлячись на крайню нерегулярність, характер їх поведінки залишається незмінним на всіх масштабах, аж до мінімального. Основною характеристикою таких самоподібних структур, як відомо, є розмірність D, введена Хаусдорфом для компактної множини в довільному метричному просторі. Якщо як апроксимацію графіків часових рядів розглядати комплекси, що складаються з двовимірних простих фігур (наприклад, клітин), з геометричним показником δ, то, як випливає із визначення Хаусдорфа, розмірність D визначається із степеневого закону:

$$N(\delta) \sim (1/\delta)^D \text{ при } \delta \to 0 \qquad (1)$$

де $N(\delta)$ - кількість клітин комплексу, з масштабом розбиття δ.

Про те на практиці, при спробі обчислити D безпосередньо з формули (1), виникає серйозна проблема. Вона пов'язана з тим, що з одного боку, реальні часові ряди завжди мають мінімальним масштаб структури δ_0, а з іншого, для всіх відомих апроксимацій наближення до асимптотичного режиму (1) зазвичай є дуже повільним.

Аналіз останніх досліджень. У роботі [2] запропонований підхід, де для реальних часових рядів така послідовність апроксимацій клітинами відбувається автоматично. Ідея полягає у введенні нового поняття: індекс фрактальності μ і розмірність мінімального покриття D_μ. Показано, що використання індексу μ дозволяє виявити для цих рядів степеневий закон, який виконується з дивовижною точністю. При порівнянні індексу μ з іншими фрактальними показниками виявляється, що для надійного визначення цього індексу з прийнятною точністю потрібно даних на два порядки менше, ніж, наприклад, для визначення показника Херста H. Це приводить до можливості побудови локального фрактального аналізу часових рядів за допомогою функції $\mu(t)$. Використання функції $\mu(t)$ дозволяє істотно просунутися у вирішенні завдань ідентифікації і прогнозування. Зокрема показано, що індекс μ є ідентифікатором локального тренда для часових рядів [2].

Щоб пов'язати локальну динаміку відповідного процесу з фрактальною розмірністю часового ряду необхідно визначити розмірність D локально. Для цього пропонується знайти послідовність апроксимацій, яка при фіксованому δ була б у локальному розумінні оптимальною. Якщо помножити обидві частини (1) на δ^2, то визначення розмірності можна переписати у вигляді степеневого закону для площі апроксимацій $S(\delta)$:

$$S(\delta) \sim \delta^{2-D} \text{ при } \delta \to 0 \qquad (2)$$

Відмітимо, що така форма на відміну від (1) взагалі кажучи не вимагає, щоб симплекси, з яких складається апроксимація, були однаковими. Достатньо того, щоб вони мали один і той же геометричний чинник δ. Це дозволить використовувати апроксимації, які при даному δ в деякому розумінні найкраще наближають початкову функцію. Однак математичний опис часового ряду та підрахунок площ за запропонованими симплексами не є ефективним.

Разом із тим такі фрактальні структури достатньо просто можна описувати статико-геометричним методом проф. Ковальова С.М. [4] за допомогою систем лінійних рівнянь, а підрахунок площі здійснювати за симплексами у вигляді трикутників.

Основна мета роботи. Запропонувати алгоритми опису часових рядів, як фрактальних структур, за допомогою систем лінійних рівнянь статико-геометричного методу. Визначити параметри фракталів, локально, за допомогою характеристик формоутворюючих сил. Через значення сил у вузлах запропонувати ефективні алгоритми для визначення фрактальної розмірності заданих часових рядів.

Основна частина. Заданий часовий ряд, що характеризує об'єми пасажиропотоків у роботі транспортної компанії за певний період. Аналізуючи ряд, локально виділяємо ділянку з аффінно подібною структурою для всього часового ряду, тобто певний інтервал A - $t_{i-1}......t_{ni}$ (рис. 1).

Рис. 1

Нехай на інтервалі A - $t_{i-1}......t_{ni}$ задана множина упорядкованих точок y_i із рівномірним кроком вузлів по відрізку $t_0 < t_1 < ... < t_{ni}$ (рис. 2).

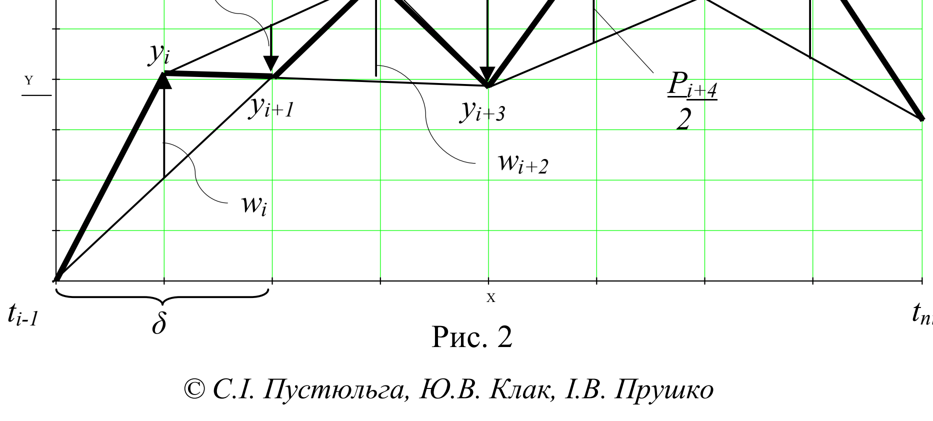

Рис. 2

Тоді геометрична характеристика масштабу клітини буде визначатись $t_i - t_{i-1} = \delta = (t_{ni} - t_0)/n \quad (i = 1, 2...n)$. Для множини локально виділених точок часового ряду складаємо систему скінченно-різницевих рівнянь статико-геометричного методу:

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + kP_i = 0, \tag{3}$$

із якої знаходимо значення формоутворюючих зусиль у вузлах супровідної ламаної фрактальної структури. Графік цих векторів опосередковано характеризує "величину фрактальності" виділеного фрагменту [5]. Чим більша осциляція величин формоутворюючого навантаження відносно горизонтальної осі (рис. 3), тим більша фрактальна розмірність представленого геометричного об'єкту (рис. 2), яка знаходиться у межах від 1 до 2.

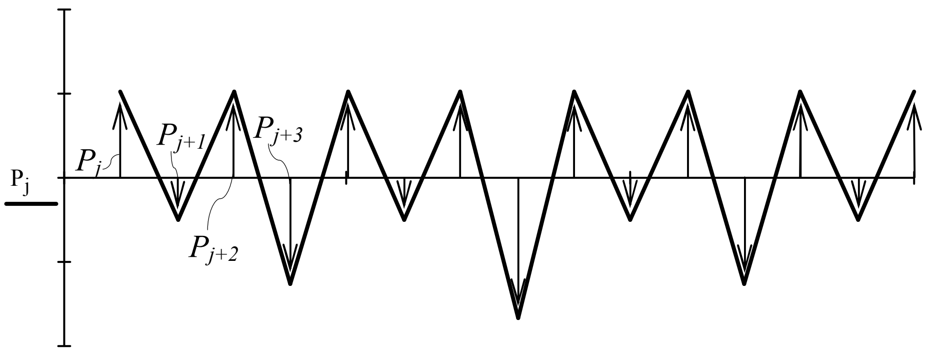

Рис.3

У роботі [2] графік локально виділеної ділянки (рис. 2) покривався прямокутниками так, щоб це покриття було мінімальним за площею в класі покриттів прямокутниками з кроком δ. Поведінка при цьому мінімального $S(\delta)$ на графіку в подвійному логарифмічному масштабі, давала ефект швидкого виходу на асимптотику вже навіть при великих значеннях кроку δ. Знаходження площ покриття проводилось через значення амплітуди фрактального об'єкту.

Використовуючи статико-геометричний метод, у роботі пропонується у якості симплексів для мінімального покриття вибрати трикутники, наприклад $\Delta(y_i, y_{i+1,} y_{i+2})$, з геометричним чинником δ.

Введемо величину:

$$W_i(\delta) = \frac{1}{2} P_i(\delta), \tag{4}$$

де $P_i(\delta)$ - формоутворююче навантаження у вузлах фрактальної структури (рис. 3). Тоді повну площу мінімального покриття із симплексами у вигляді трикутників $\Delta(y_i, y_{i+1,} y_{i+2})$ можна подати наступним чином:

$$S_{\min}(\delta) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} W_i(\delta) \cdot \delta = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{4} P_i(\delta) \cdot \delta \tag{5}$$

Враховуючи (2), можна розмірність мінімального покриття виразити залежністю:

$$2 - D_{\min} = \frac{\ln \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{4} P_i(\delta) \cdot \delta}{\ln \delta}$$

або

$$D_{\min} = 2 - \frac{\ln \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{4} P_i(\delta) \cdot \delta}{\ln \delta} \tag{6}$$

У виразі (6) бачимо, що розмірність мінімального покриття практично виражена і залежить від розподілу у вузлах фрактальної структури зовнішнього формоутворюючого навантаження $P_i(\delta)$ (рис. 3). Тестові приклади показали, що при різних методах підрахунку фрактальної розмірності одного і того ж фрактального об'єкту, вихід на асимптотику закону (2) найшвидше відбувається при використанні запропонованої методики.

Індекс фрактальності, який є ідентифікатором тренду часового ряду визначається із виразу:

$$\mu = D_{\min} - 1,$$

після чого можна вибудовувати локальний фрактальний аналіз часового ряду за допомогою функції $\mu(t)$.

Висновки. У роботі запропоновано алгоритми опису часових рядів, як фрактальних структур, за допомогою систем лінійних рівнянь статико-геометричного методу. Наведено методику визначення геометричних параметрів фракталів, локально, за допомогою характеристик формоутворюючих сил. Через значення сил у вузлах фрактальної структури запропоновано алгоритм для визначення фрактальної розмірності заданих часових рядів.

1. Шишкин Е.И. Моделирование и анализ пространственных и временных фрактальных объектов. Екатеринбург. 2004. – С. 88.
2. Старченко Н.В. Индекс фрактальности и локальный анализ хаотических временных рядов. Дис. канд. физ.-мат. наук. 05.13.18 / М . : МИФИ, 2005. – С. 113.
3. Правдин Н.Н., Негрей В.Я. "Прогнозирование пассажирских перевозок", М, Транспорт, 1980.
4. Ковалёв С.Н. Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций. Дис. докт. техн. наук. 05.01.01 / М . : МАИ, 1986. – С.348.
5. Пустюльга С.І., Придюк В.М., Прушко І.В. "Дискретне векторне формування фрактальних структур": Зб. наук. пр. - Луцьк, 2012. - Вип. 37. – С. 275 – 279.