

УДК 539.3

А.О. Сяський, К.П. Музичук

Рівненський державний гуманітарний університет

ЗГИН КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ З ЕЛІПТИЧНИМ РОЗРІЗОМ ЗА УМОВИ КОНТАКТУВАННЯ ЙОГО БЕРЕГІВ

Досліджується вплив ортотропії матеріалу на розподіл силових і моментних напружень на контурі еліптичного отвору в кусково-однорідній пластинці з розрізом, береги якого контактують за дії згинального навантаження. Наближений розв'язок задачі визначається методом механічних квадратур і колокації.

Ключові слова: ортотропна пластинка, еліптичний отвір, інтегрально-диференціальні рівняння, зона спаю, контактні зусилля, циліндричний згин.

Вступ. Розвиток сучасних технологій привів до широкого використання в машинобудуванні і будівництві кусково-однорідних пластин із композитних матеріалів. Наявність в них розрізів і тріщин зумовлює появу на їх кінцях зон пластичної деформації та руйнування. За дії згинальних навантажень на пластинчастий елемент береги розрізів будуть контактувати частково або по всій довжині.

Дослідження напруженого стану в однорідних ізотропних пластинках з коловим розрізом за умови контактування його берегів по всій довжині при різних видах згинального навантаження проведено в [1, 2]. Для ортотропних пластин такі задачі не розглядалися.

Пропонується розв'язок задачі про взаємодію берегів розрізу на еліптичній поверхні розмежування матеріалів в кусково-однорідній ортотропній пластинці при її циліндричному згині.

Постановка задачі. Граничні умови. Розглянемо нескінченну ортотропну пластинку товщиною $2h$ з криволінійним отвором, контур якого Γ має форму еліпса. Сумістимо із середньою площиною пластинки комплексну площину $z = x + iy$. Систему прямокутних (x, y) і полярних (r, δ) координат оберемо так, щоб початок відліку співпадав з центром отвору, а полярна вісь співпадала з віссю абсцис. Вісь Oz спрямуємо перпендикулярно до площини xOy . Будемо вважати, що головні осі ортотропії матеріалу пластинки співпадають з координатними осями.

Нехай в отвір пластинки (рис. 1) вставлено жорсткий диск такої ж форми та розмірів. На ділянці $[\pi + \alpha_1^*; \pi + \beta_1^*]$ вони спаяні між собою. На решті контуру Γ між пластинкою та диском наявний розріз. Під дією рівномірно розподілених моментів M_1, M_2 , які діють на нескінченності в напрямках координатних осей, береги розрізу на ділянці $[\alpha_0^*; \beta_0^*]$ вступають у гладкий контакт. При заданому навантаженні пластинка одночасно перебуває в умовах узагальненого плоского напруженого стану і циліндричного згину. Розв'язок задачі полягає у визначенні компонентів напруженого стану на контурі отвору пластинки.

Конформне відображення зовнішності S^- одиничного кола γ в площині $\xi = \rho e^{i\lambda}$ на область, яку займає середня площина пластинки, здійснюється за допомогою функції [4]

$$z = \omega(\xi) = R_0 \left(\xi + \frac{\varepsilon}{\xi} \right), \quad (1)$$

де $R_0 = \frac{a+b}{2} = 1$; a, b - півосі еліпса; $a = 1 + \varepsilon$; $b = 1 - \varepsilon$; ε - ексцентриситет еліпса; $i = \sqrt{-1}$.

Граничні умови задачі в зоні контакту обираємо у вигляді рівності нормальних зміщень контурних точок пластинки і диска. При відсутності тертя їх можна записати у вигляді [1]

$$U_n + h \frac{\partial w}{\partial n} = U_n^0 + h \frac{\partial w_0}{\partial n}; M_\rho = -h T_\rho; S_{\rho\lambda} = P = 0, \lambda \in [\alpha_0; \beta_0], \quad (2)$$

де U_n, U_n^0 - нормальні лінійні зміщення контурних точок середньої площини пластинки і диска; $T_\rho, S_{\rho\lambda}$ - нормальні та дотичні контактні зусилля між пластинкою і диском; M_ρ, P - нормальні

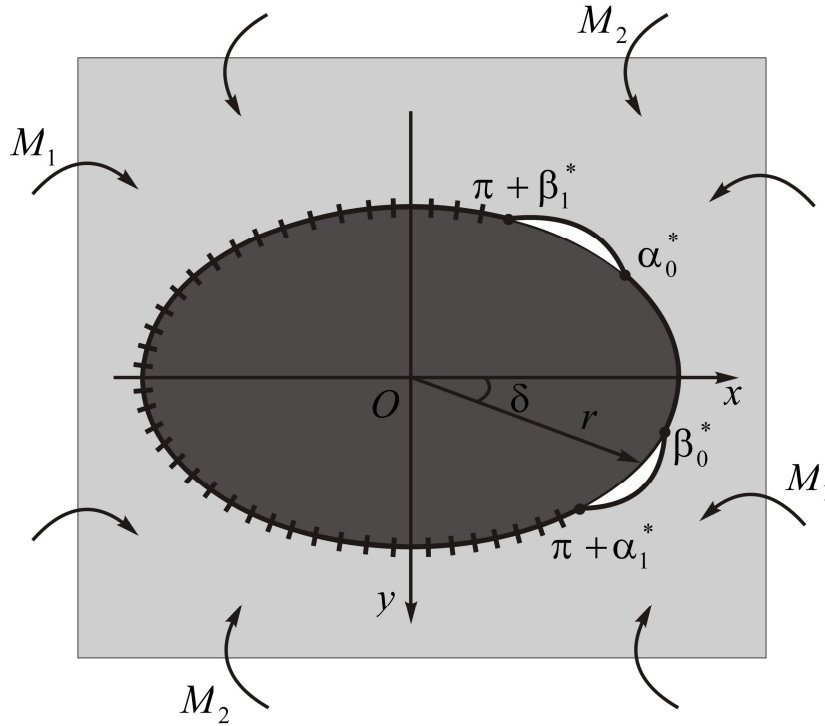


Рис. 1. Розрахункова схема задачі

та узагальнені дотичні згинальні моменти; w - прогин пластини; $\frac{\partial w}{\partial n}$, $\frac{\partial w_0}{\partial n}$ - нормальні складові кута повороту нормалі до середньої площини пластинки і диска; $[\alpha_0; \beta_0]$ - образ ділянки $[\alpha_0^*; \beta_0^*]$ при відображенні (1).

Використовуючи співвідношення [4-6]

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\tilde{a}(\lambda) \frac{\partial w}{\partial x} + \tilde{b}(\lambda) \frac{\partial w}{\partial y}}{|\omega'(\sigma)|}; \quad \frac{\partial w_0}{\partial n} = \frac{\tilde{a}(\lambda) \frac{\partial w_0}{\partial x} + \tilde{b}(\lambda) \frac{\partial w_0}{\partial y}}{|\omega'(\sigma)|}; \quad U_n = \frac{\tilde{a}(\lambda)U + \tilde{b}(\lambda)V}{|\omega'(\sigma)|};$$

$$U_n^0 = \frac{\tilde{a}(\lambda)U_0 + \tilde{b}(\lambda)V_0}{|\omega'(\sigma)|}; \quad f_1' + if_2' = ih(T_\rho + iS_{\rho\lambda})(\tilde{a}(\lambda) + i\tilde{b}(\lambda));$$

$$g_1' + ig_2' = i(M_\rho + iP)(\tilde{a}(\lambda) + i\tilde{b}(\lambda)), \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0], \quad (3)$$

граничні умови (2) перетворимо до вигляду

$$\tilde{a}(\lambda) \left(U + h \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \tilde{b}(\lambda) \left(V + h \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \tilde{a}(\lambda) \left(U_0 + h \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \tilde{b}(\lambda) \left(V_0 + h \frac{\partial w_0}{\partial y} \right);$$

$$a(\lambda)(hf_2'(\lambda) + g_2'(\lambda)) - b(\lambda)(hf_1'(\lambda) + g_1'(\lambda)) = 0;$$

$$a(\lambda)g_1'(\lambda) + b(\lambda)g_2'(\lambda) = 0; \quad a(\lambda)f_1'(\lambda) + b(\lambda)f_2'(\lambda) = 0, \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0], \quad (4)$$

де $\tilde{a}(\lambda) = b \cos \lambda$; $\tilde{b}(\lambda) = a \sin \lambda$; $\sigma = e^{i\lambda}$; U , V - лінійні зміщення в напрямках координатних осей контурних точок середньої площини пластинки; U_0 , V_0 - лінійні зміщення диска як жорсткого цілого; $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ - кути повороту нормалі до середньої площини пластинки в

напрямках координатних осей; $\frac{\partial w^0}{\partial x}$, $\frac{\partial w^0}{\partial y}$ - кути повороту диска як жорсткого цілого.

На ділянці спаю $[\pi + \alpha_1^*; \pi + \beta_1^*]$ при ідеальному механічному контакті граничні умови задачі матимуть вигляд [6]

$$U + iV = U_0 + iV_0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w^0}{\partial x} + i \frac{\partial w^0}{\partial y}, \quad \lambda \in [\pi + \alpha_1; \pi + \beta_1], \quad (5)$$

причому $[\pi + \alpha_1; \pi + \beta_1]$ - образ ділянки $[\pi + \alpha_1^*; \pi + \beta_1^*]$ при відображенні (1).

Інтегрально-диференціальні рівняння задачі. Компоненти вектора зміщення контурних точок U , V та кути повороту нормалі до пластинки в напрямках координатних осей $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ при заданому навантаженні визначаються за формулами [4, 7]

$$U = \frac{1}{2E_x h} [(\beta_1 \beta_2 - \nu_x) f_1(\lambda) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\pi} \oint_{\gamma} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \bar{C}_1];$$

$$V = \frac{1}{2E_x h} [(\beta_1 \beta_2 - \nu_x) f_2(\lambda) - \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \oint_{\gamma} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \bar{C}_2];$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{k}{\tilde{\Delta}} [(\beta_1 \beta_2 + \nu_x) g_1(\lambda) - \frac{\beta_1 + \beta_2}{\pi} \int_{\gamma} g_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt - F_1(\lambda) - \tilde{C}_1(a(\beta_1 + \beta_2) + b(\beta_1 \beta_2 + \nu_x)) \sin \lambda + \bar{C}_3];$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{k}{\tilde{\Delta}} [(\beta_1 \beta_2 + \nu_x) g_2(\lambda) + \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\gamma} g_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt - F_2(\lambda) + \tilde{C}_1(a(\beta_1 \beta_2 + \nu_x) + b\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)) \cos \lambda + \bar{C}_4]. \quad (6)$$

Тут
$$F_1(\lambda) = \frac{M_1(\beta_1 + \beta_2)}{\tilde{\Delta}_1} (a\tilde{\Delta} + b\tilde{\Delta}_1) \cos \lambda + \frac{M_2 \beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\tilde{\Delta}_1} a\tilde{\Delta}_2 \cos \lambda;$$

$$F_2(\lambda) = \frac{M_1(\beta_1 + \beta_2)}{\tilde{\Delta}_1} \beta_1 \beta_2 \tilde{\Delta}_2 b \sin \lambda + \frac{M_2 \beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\tilde{\Delta}_1} (\beta_1 \beta_2 \tilde{\Delta} b + \tilde{\Delta}_1 a) \sin \lambda;$$

$$k = \frac{\beta_1^2 \beta_2^2}{D_{11}}; \quad D_{11} = \frac{2E_x h^3}{3(1 - \nu_1 \nu_2)}; \quad \tilde{\Delta}_2 = (\beta_1^2 - \nu_x)(\beta_2^2 - \nu_x); \quad \tilde{\Delta}_1 = (\beta_1 + \beta_2)(\beta_1 \beta_2 - \nu_x)(\beta_1 \beta_2 + \nu_x);$$

$\tilde{\Delta} = \beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)^2 - (\beta_1 \beta_2 + \nu_x)^2$; β_1, β_2 - корені характеристичного рівняння [3]; E_x, ν_x - модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки в напрямку осі Ox ; $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3, \bar{C}_4, \tilde{C}_1$ - довільні сталі.

Підставляючи (6) в граничні умови (4) і (5), отримаємо після певних перетворень систему сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь з логарифмічними ядрами для визначення функцій f_j', g_j' ($j = 1, 4$)

$$\tilde{a}(\lambda) [(\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_4'(t) \ln \left| \cos \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + C_1] + \tilde{b}(\lambda) [(\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_3'(\bar{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda-\bar{t}}{2} \right| d\bar{t} + C_2] + \frac{\tilde{a}(\lambda)Z}{\tilde{\Delta}} [(\beta_1\beta_2 + \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} g_1'(t) dt - \\
 & -\frac{\beta_1+\beta_2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} g_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \frac{\beta_1+\beta_2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} g_4'(\bar{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda-\bar{t}}{2} \right| d\bar{t} - \\
 & -\tilde{C}_1(a(\beta_1+\beta_2) + b(\beta_1\beta_2 + \nu_x)) \sin \lambda] + \tilde{a}(\lambda)C_3 + \frac{\tilde{b}(\lambda)Z}{\tilde{\Delta}} [(\beta_1\beta_2 + \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} g_2'(t) dt + \\
 & + \frac{\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} g_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \frac{\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} g_3'(\bar{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda-\bar{t}}{2} \right| d\bar{t} + \\
 & + \tilde{C}_1(a(\beta_1\beta_2 + \nu_x) + b\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)) \cos \lambda] + \tilde{b}(\lambda)C_4 = \frac{\tilde{a}(\lambda)Z}{\tilde{\Delta}} F_1(\lambda) + \frac{\tilde{b}(\lambda)Z}{\tilde{\Delta}} F_2(\lambda);
 \end{aligned}$$

$$\tilde{a}(\lambda)f_1'(\lambda) + \tilde{b}(\lambda)f_2'(\lambda) = 0; \quad \tilde{a}(\lambda)g_1'(\lambda) + \tilde{b}(\lambda)g_2'(\lambda) = 0;$$

$$\tilde{a}(\lambda)(hf_2'(\lambda) + g_2'(\lambda)) - \tilde{b}(\lambda)(hf_1'(\lambda) + g_1'(\lambda)) = 0, \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0];$$

$$\begin{aligned}
 & (\beta_1\beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) dt + (\beta_1\beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_1}^{\bar{\lambda}} f_3'(\bar{t}) d\bar{t} + \frac{\beta_1+\beta_2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) \ln \left| \cos \frac{\bar{\lambda}-t}{2} \right| dt + \\
 & + \frac{\beta_1+\beta_2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_4'(\bar{t}) \ln \left| \sin \frac{\bar{\lambda}-\bar{t}}{2} \right| d\bar{t} + C_1 = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\beta_1\beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) dt + (\beta_1\beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_1}^{\bar{\lambda}} f_4'(\bar{t}) d\bar{t} - \frac{\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) \ln \left| \cos \frac{\bar{\lambda}-t}{2} \right| dt - \\
 & - \frac{\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_3'(\bar{t}) \ln \left| \sin \frac{\bar{\lambda}-\bar{t}}{2} \right| d\bar{t} + C_2 = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\beta_1\beta_2 + \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\beta_0} g_1'(t) dt + (\beta_1\beta_2 + \nu_x) \int_{\alpha_1}^{\bar{\lambda}} g_3'(\bar{t}) d\bar{t} - \frac{\beta_1+\beta_2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} g_2'(t) \ln \left| \cos \frac{\bar{\lambda}-t}{2} \right| dt - \\
 & - \frac{\beta_1+\beta_2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} g_4'(\bar{t}) \ln \left| \sin \frac{\bar{\lambda}-\bar{t}}{2} \right| d\bar{t} - \tilde{C}_1(a(\beta_1+\beta_2) + b(\beta_1\beta_2 + \nu_x)) \sin \lambda + \frac{\tilde{\Delta}}{Z} C_3 = F_1(\lambda);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\beta_1\beta_2 + \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\beta_0} g_2'(t) dt + (\beta_1\beta_2 + \nu_x) \int_{\alpha_1}^{\bar{\lambda}} g_4'(\bar{t}) d\bar{t} + \frac{\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} g_1'(t) \ln \left| \cos \frac{\bar{\lambda}-t}{2} \right| dt + \\
 & + \frac{\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} g_3'(\bar{t}) \ln \left| \sin \frac{\bar{\lambda}-\bar{t}}{2} \right| d\bar{t} + \tilde{C}_1(a(\beta_1\beta_2 + \nu_x) + b\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)) \cos \lambda +
 \end{aligned}$$

$$+\frac{\tilde{\Delta}}{Z}C_4 = F_2(\lambda), \lambda \in [\pi + \alpha_1; \pi + \beta_1], \bar{\lambda} \in [\alpha_1; \beta_1], \lambda = \bar{\lambda} + \pi. \quad (7)$$

У співвідношеннях (7) враховано, що

$$f'_1 + if'_2 = ih(T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^*)e^{i\lambda}; \quad g'_1 + ig'_2 = i(M_\rho^* + iP^*)e^{i\lambda}, \lambda \in [\alpha_0; \beta_0];$$

$$f'_3 + if'_4 = ih(T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^*)e^{i\lambda}; \quad g'_3 + ig'_4 = ih(T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^*)e^{i\lambda}, \lambda \in [\pi + \alpha_1; \pi + \beta_1]; \quad \lambda = \bar{\lambda} + \pi;$$

$$T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^* = (T_\rho + iS_{\rho\lambda})\omega'(\sigma); \quad M_\rho^* + iP^* = (M_\rho + iP)\omega'(\sigma); \quad \sigma = e^{i\lambda}; \quad Z = 3\beta_1^2\beta_2^2(1 - \nu_1\nu_2);$$

$$C_1 = \bar{C}_1 - 2E_x h U_0; \quad C_2 = \bar{C}_2 - 2E_x h V_0; \quad C_3 = \frac{Z}{\Delta}\bar{C}_3 - 2E_x h \frac{\partial w^0}{\partial x}; \quad C_4 = \frac{Z}{\Delta}\bar{C}_4 - 2E_x h \frac{\partial w^0}{\partial y}.$$

Крім системи (7) повинні виконуватися силові і моментні умови рівноваги диска [6] та умова однозначності прогину пластинки [7]

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f'_1(t)dt + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f'_3(t)dt &= 0; \quad \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f'_2(t)dt + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f'_4(t)dt = 0; \\ \int_{\alpha_0}^{\beta_0} g'_1(t)dt + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} g'_3(t)dt &= 0; \quad \int_{\alpha_0}^{\beta_0} g'_2(t)dt + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} g'_4(t)dt = 0; \\ \frac{1}{\pi} \left[\int_{\alpha_0}^{\beta_0} g'_2(t) \sin t dt - \beta_1 \beta_2 \int_{\alpha_0}^{\beta_0} g'_1(t) \cos t dt - \int_{\alpha_1}^{\beta_1} g'_4(\bar{t}) \sin \bar{t} d\bar{t} + \beta_1 \beta_2 \int_{\alpha_1}^{\beta_1} g'_3(\bar{t}) \cos \bar{t} d\bar{t} \right] &= \\ &= \frac{2ab(\beta_1\beta_2 + \nu_x) + (\beta_1 + \beta_2)(a^2 + \beta_1\beta_2b^2)}{2\varepsilon(\beta_1 + \beta_2)} \tilde{C}_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Контактні зусилля та згинальні моменти на ділянках контакту і спаю через функції f'_j , g'_j ($j = \overline{1,4}$) визначаються за формулами [6]

$$T_\rho = \frac{-\tilde{b}(\lambda)f'_1(\lambda) + \tilde{a}(\lambda)f'_2(\lambda)}{\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)}; \quad M_\rho = \frac{-\tilde{b}(\lambda)g'_1(\lambda) + \tilde{a}(\lambda)g'_2(\lambda)}{\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)}, \lambda \in [\alpha_0; \beta_0];$$

$$T_\rho = \frac{-\tilde{b}(\lambda)f'_3(\lambda) + \tilde{a}(\lambda)f'_4(\lambda)}{\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)}; \quad S_{\rho\lambda} = \frac{-\tilde{a}(\lambda)f'_3(\lambda) - \tilde{b}(\lambda)f'_4(\lambda)}{\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)};$$

$$M_\rho = \frac{-\tilde{b}(\lambda)g'_3(\lambda) + \tilde{a}(\lambda)g'_4(\lambda)}{\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)}; \quad P = \frac{-\tilde{a}(\lambda)g'_3(\lambda) - \tilde{b}(\lambda)g'_4(\lambda)}{\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)}, \lambda \in [\pi + \alpha_1; \pi + \beta_1]. \quad (9)$$

Кільцеві зусилля T_λ , і моменти M_λ та крутні моменти $H_{\rho\lambda}$ на контурі отвору в позначеннях [4, 6] визначаються за формулами

$$T_\lambda(\lambda) = -T_\rho(\lambda) - \frac{(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)}{4\Delta_1\Delta_2} [B_1(\lambda)R_1 + B_2(\lambda)R_2] - \frac{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)}{4\Delta_1\Delta_2} [B_3(\lambda)R_3^* + B_4(\lambda)R_4^*];$$

$$M_\lambda = -M_\rho - 2(Q_1R_5 + Q_2R_6); \quad H_{xy} = (\beta_1^2 + \beta_2^2 - 2\nu_1)(\tilde{Q}_2R_5 - \tilde{Q}_1R_6);$$

$$H_{\rho\lambda} = \frac{(M_\lambda - M_\rho)(1 - \varepsilon^2) \sin 2\lambda + 2H_{xy}(\alpha^2 + \beta^2)}{2((1 + \varepsilon^2) \cos 2\lambda - 2\varepsilon)}, \lambda \in \gamma. \quad (10)$$

Наближений розв'язок задачі. Система (7) та умови (8) визначають математичну модель поставленої задачі. Знаходження її точного розв'язку пов'язано із значними математичними

труднощами, тому будемо шукати його наближеними методами. Для цього потрібно встановити структуру функцій f'_j, g'_j ($j = \overline{1,4}$) на кінцях зон спаю і контакту.

В околі кінців зони спаю величини $hT_\rho, hS_{\rho\lambda}, M_\rho, P$ мають кореневу особливість, на яку накладається локальна осциляція. Враховуючи (3) можна зробити висновок, що таку ж особливість мають функції f'_3, f'_4, g'_3, g'_4 . Структура величин $hT_\rho, hS_{\rho\lambda}, M_\rho, P$ в зоні гладкого контакту залежить від величини розрізу між пластинкою і диском та характеру їх взаємодії.

Якщо на ділянці $[-\pi + \beta_1; \pi + \alpha_1]$ виникає одна зона контакту $[\alpha_0; \beta_0]$ і дві зони відставання $[\beta_0; \pi + \alpha_1] \cup [\pi + \beta_1; 2\pi + \alpha_0]$, то контактні напруження в зоні контакту обмежені, а на її кінцях дорівнюють нулю. У цьому випадку функції f'_1, f'_2, g'_1, g'_2 також будуть обмеженими. В окремих випадках зони відставання можуть бути відсутніми, а контактні напруження на кінцях розрізу дорівнювати нулю.

При відсутності точок розмикання контакту береги розрізу будуть контактувати по всій довжині і забезпечувати непроникливість пластинчастої конструкції, а напруження в зоні контакту будуть обмеженими і неперервними, а на кінцях цієї зони будуть необмеженими.

Оскільки система (7), (8) має таку ж структуру як і відповідна система при розтягу (стиску) пластинки [6], тому її наближений розв'язок можна визначити методами механічних квадратур і колокації.

Для випадку повного контактування берегів розрізу $\beta_0 = \pi + \alpha_1; -\pi + \beta_1 = \alpha_0$ досліджено вплив ортотропії матеріалу пластинки на розподіл компонентів напруженого стану на контурі еліптичного ($\varepsilon = 0.2$) отвору при $-\alpha_0 = \beta_0 = 60^\circ, M_1 = M_1, M_2 = 0$. Результати їх числового розрахунку ілюструються на рис. 2 – 5. Епюри контактних $hT_\rho, hS_{\rho\lambda}$ і кільцевих зусиль hT_λ зображені на рис. 2, 3, а контактних M_ρ, P , кільцевих M_λ і крутних $H_{\rho\lambda}$ моментів – на рис. 4, 5. Характеристики досліджуваних матеріалів і лінії, які їм відповідають на рис. 2-5, наведені в таблиці 1. В цій же таблиці вказано значення контактних зусиль hT_ρ в центрі зони контакту і контактних моментів M_ρ в центрі зони спаю.

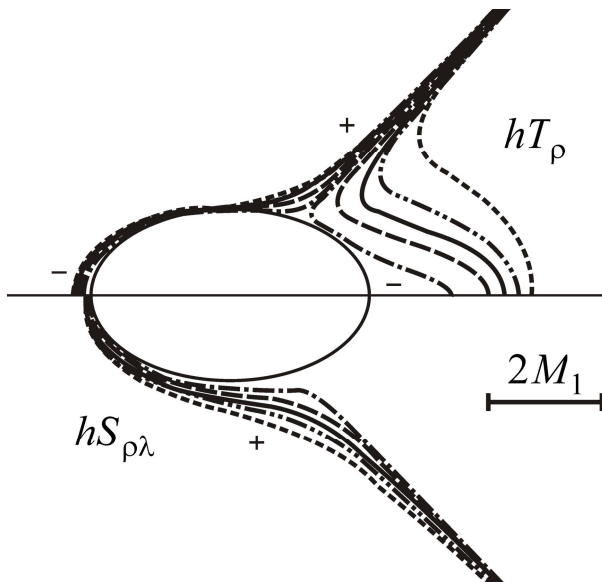


Рис. 2. Розподіл контактних зусиль на контурі отвору

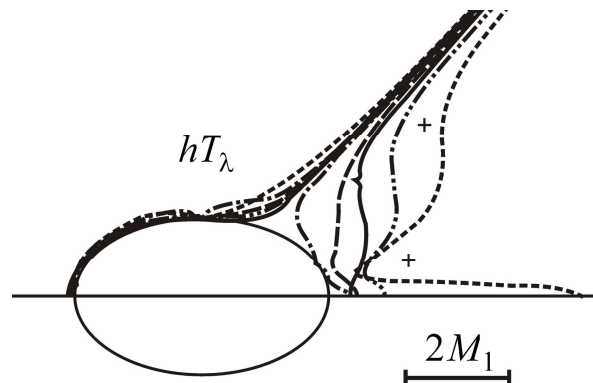


Рис. 3. Розподіл кільцевих зусиль на контурі отвору

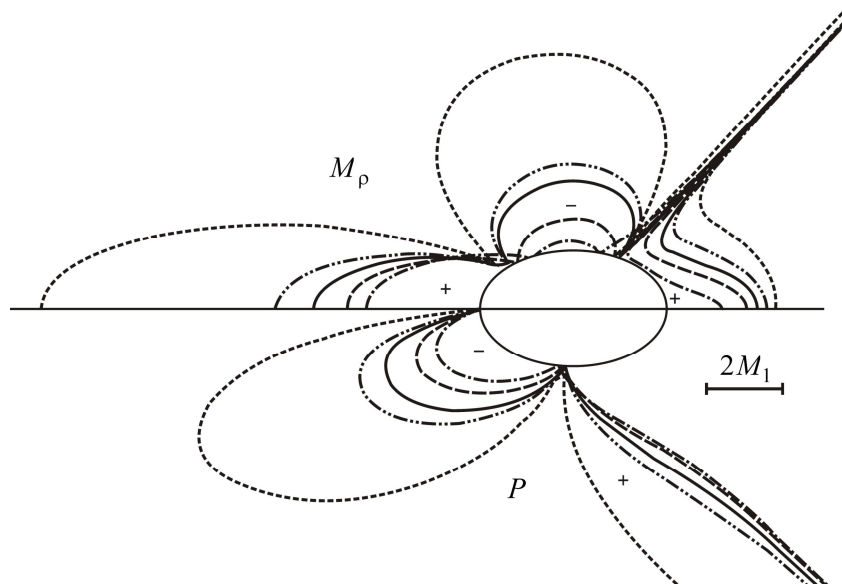


Рис. 4. Розподіл контактних моментів на контурі отвору

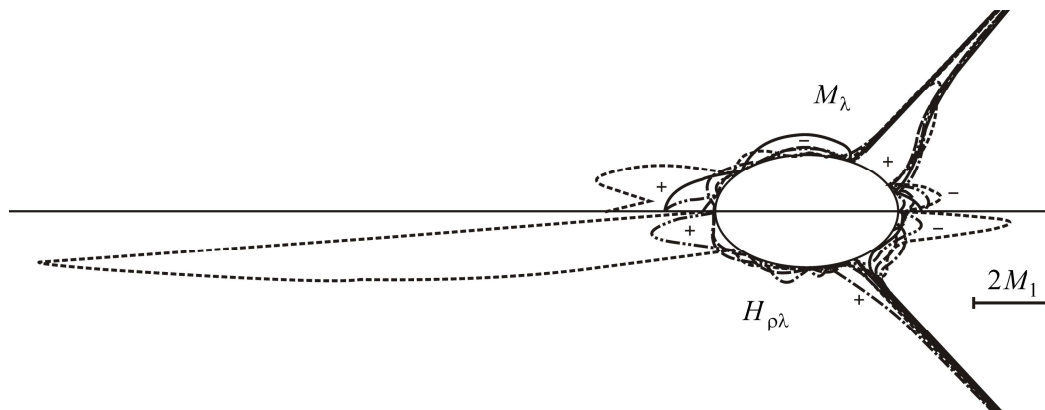


Рис. 5. Розподіл кільцевих та крутних моментів на контурі отвору

Таблиця 1

Характеристики матеріалів і лінії, які їм відповідають на рисунках

Матеріал пластинки	β_1	β_2	ν_x	E_x/E_y	hT_ρ , ($\lambda = 0$)	M_ρ , ($\lambda = \pi$)	Лінії
графіт-епоксид	6.999	0.714	0.250	25	-1.410	2.996	---·
скло-епоксид	2.271	0.763	0.250	3	-2.049	3.509	---
ізотропний	1	1	0.3	1	-2.324	4.341	—
епоксид-скло	0.440	1.310	0.083	1/3	-2.522	5.331	—·—
епоксид-графіт	0.143	1.401	0.010	1/25	-2.856	11.304

Висновки. У наведеному прикладі ортотропія матеріалу суттєво впливає на розподіл моментних напружень по контуру отвору, особливо в зоні спаю. В цій зоні максимальні значення величин M_ρ , P , M_λ , $H_{\rho\lambda}$ різко зростають із зменшенням відношення E_x/E_y . Для силових напружень hT_ρ , $hS_{\rho\lambda}$, hT_λ в зоні спаю вплив ортотропії незначний, а в зоні

контакту він суттєвий. Всі компоненти напруженого стану на кінцях зони спаю і ділянки контакту приймають необмежені значення.

1. Божидарнік В. Згин ізотропної пластинки, ослабленої розрізом по дузі кола з контактуючими берегами / В. Божидарнік, В. Опанасович, П. Герасимчук // Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. – 2006. – Вип. 65. – С. 7-16.
2. Божидарнік В.В. Двосторонній згин пластини з несиметричною наскрізною тріщиною по дузі кола з урахуванням контакту її берегів / В.В. Божидарнік, В.К. Опанасович, П.В. Герасимчук // Проблеми прочності. – 2006, №5 (383). – С. 135-141.
3. Лехницький С. Г. Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницький. – М.: Гостехиздат, 1957. – С. 464.
4. Сяський А. Основні інтегральні залежності в технічній теорії згину ортотропних пластин з еліптичним отвором / А. Сяський, Н. Шевцова // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2006. – Т. 11, №4. – С. 23-29.
5. Бережницький Л. Т. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин / Л. Т. Бережницький, М. В. Делявский, В. В. Панасюк. – Киев: Наук. думка, 1979. – С. 400.
6. Сяський А. Мішана контактна задача для ортотропної пластинки з еліптичним отвором і жорсткого диска / Сяський А., Шинкарчук Н. // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2010. – Том 15. – №4. – С. 7-13.
7. Сяський А. Розрахунок згинальних напружень в ортотропній пластинці з частково підсиленим еліптичним контуром / Сяський А., Кот В., Музичук К. // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2011. – Том 16. – № 3. – С. 26-32.