

УДК 539.3

О.А. Мікуліч

Луцький національний технічний університет

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПЛАСТИНЧАСТИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ЖОРСТКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ ЗА УСТАЛЕНИХ КОЛИВАНЬ

Запропоновано методику дослідження напруженого стану при усталених коливаннях нескінченних пластинок з жорсткими включеннями довільної форми. Розв'язання задачі проводилося на основі методу граничних інтегральних рівнянь, апарату теорії функцій комплексної змінної та методу механічних квадратур. Проведено числові розрахунки для випадків різної форми включень.

Ключові слова: *пластинчасті елементи, жорсткі включення, концентрація напружень.*

Постановка проблеми. Сучасні світові тенденції характеризуються значним збільшенням кількості населення та обмеженістю зростання виробництва продуктів харчування. Тому розвиток харчової промисловості є на сьогодні одним з основних перспективних напрямків розвитку економіки країни. Крім цього, це дозволить вийти Україні на міжнародні ринки та посісти там одне з провідних місць.

Для забезпечення зростання обсягів виготовлення конкурентної продукції харчової промисловості поряд із збільшенням об'ємів сільськогосподарської сировини та її якості, необхідно модернізувати обладнання для переробки та виробництва. Це дозволить здешевити продукцію та підвищити її якість.

На більшості вітчизняних переробних підприємствах для виготовлення продуктів харчування використовується застаріле обладнання, що є технологічно- та енергомістке. Тому актуальною є проблема розробки та модернізації машин та устаткування харчової промисловості.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У сучасному переробному виробництві широко застосування набули пластинчасті елементи конструкцій складної форми, що є моделями змішувальних та елеваторних комплексів, обшивкових частин та ін. Вони зазнають впливу вібраційних навантажень, що зумовлює необхідність розробки уточнених методик дослідження напруженого стану для оцінки їх надійності та довговічності. Такі елементи містять жорсткі включення складної форми. Концентрація динамічних напружень у таких пластинчастих елементах конструкцій залежить не лише від навантаження, а і також від форми (геометрії) жорстких включень.

У літературі дослідження динамічного напруженого стану нескінченних пластинок з жорсткими включеннями проводилося різними методами. У роботах О.М. Гузя, В.Д. Кубенка [1], Г.М. Савіна [2] вивчення усталених коливань нескінченних пластинок з круговими жорсткими включеннями проводилося з використанням методу рядів. У працях Муна, Пао та ін. розв'язання такого класу задач відбувалося на основі методу багатократних відображень.

У роботах П. Бенерджі, Р. Баттерфілда, К. Бреббія та ін. [3] розв'язання задач зведено до сингулярних та регулярних інтегральних рівнянь.

У [4] запропоновано методику вивчення динамічного напруженого стану нескінченних пластинок з отворами за усталених коливань, що ґрунтується на сумісному використанні методу граничних інтегральних рівнянь та апарату теорії функції комплексної змінної, методу механічних квадратур та колокації. Числові розрахунки показали, що розроблений алгоритм ефективний для випадку отворів довільної форми, тому доцільно поширити даний підхід і для випадку пластинок, що містять жорсткі включення.

Результати дослідження. Розглянемо нескінченну пластинку, у яку впаяно жорстке включення, границя якого обмежена контуром L . Позначимо через D область, яку вона займає. У центрі ваги включення пружної пластинки розмістимо початок декартової системи координат Ox_1x_2 .

Дослідимо випадок, що є динамічним аналогом задачі про концентрацію напружень біля отворів при двоосьовому основному напруженому стані. Для усталених коливань він реалізується з допомогою плоскої пружної хвилі, що падає на отвір та хвиля породжує відбиті хвилі. Сумарне хвильове поле визначає напружений стан у пружній пластинці. На контурі включення виникають відбиті хвилі стиску, потенціали Ψ та Φ яких задовольняють рівнянням Гемгольца [1]:

$$\Phi = \Phi_0 e^{i\omega(\tau - \alpha_1 x_1)}, \quad \Psi = 0, \quad (1)$$

де $\Phi_0 = \frac{1}{\mu\omega_2^2}$; ω – частота; τ – час; $\omega_1 = \frac{\omega}{c_1}$, $\omega_2 = \frac{\omega}{c_2}$; c_1, c_2 – швидкість хвиль розширення та зсуву: $c_1^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}$, $c_2^2 = \frac{E}{2\rho(1+\nu)}$; E – модуль пружності I-го роду; ρ – густина матеріалу; ν – коефіцієнт Пуассона; μ – стала Ляме, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Для випадку жорсткого (фіксованого) включення граничні умови запишуться у вигляді [1]:

$$(u_1 - iu_2)|_L = 0. \tag{2}$$

При плоскому напруженому стані потенціальне зображення загального розв'язку для переміщень виберемо у вигляді [2]:

$$u_i(x_1, x_2) = \int_L p_j(x_1^0; x_2^0) \cdot U_{ji}^*(x_1; x_2; x_1^0; x_2^0) ds, \tag{3}$$

причому p_1, p_2 є комплексними невідомими потенціальними функціями. Представлення для зображень функцій U_{ij}^* вибрано з врахуванням умов Зоммерфельда [2]:

$$U_{ij}^* = \frac{1}{2\pi\rho c_2^2} (\psi\delta_{ij} - \chi r_i r_j), \tag{4}$$

де

$$\psi = \frac{i\pi}{2} \left(-H_0^2 \left(\frac{\omega r}{c_2} \right) + \frac{c_2}{\omega r} \left(H_1^2 \left(\frac{\omega r}{c_2} \right) - \frac{c_2}{c_1} H_1^2 \left(\frac{\omega r}{c_1} \right) \right) \right),$$

$$\chi = \frac{i\pi}{2} \left(H_2^2 \left(\frac{\omega r}{c_2} \right) - \frac{c_2^2}{c_1^2} H_2^2 \left(\frac{\omega r}{c_1} \right) \right),$$

$r_i = \frac{\partial r}{\partial x_i}$, $r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}$; $H_\kappa^2(z) = J_\kappa(z) - iY_\kappa(z)$ – функції Ганкеля II-го роду;

$J_\kappa(z)$, $Y_\kappa(z)$ – відповідно функції Бесселя I-го та II-го роду, $i, j=1, 2$. Інтегрування вздовж границі проводиться за змінними x_1^0, x_2^0 . Тут і далі біля переміщень та напружень опущений часовий множник $e^{i\omega\tau}$.

Враховуючи, що функції U_{ij}^* та переміщення u_j є комплексними, запишемо задачу про дослідження концентрації напружень у нескінченній пластинці з жорстким включенням у дійсному вигляді. Дійсна та уявна частини зображень (3) запишуться у вигляді:

$$u_j^R = \int_L (p_i^R U_{ij}^{*R} - p_i^I U_{ij}^{*I}) ds, \quad u_j^I = \int_L (p_i^I U_{ij}^{*R} + p_i^R U_{ij}^{*I}) ds, \tag{5}$$

де $u_j^R = \text{Re} u_j$, $u_j^I = \text{Im} u_j$, $j=1, 2$; $p_i^R = \text{Re} p_i$, $p_i^I = \text{Im} p_i$, $i=1, 2$; $U_{ij}^{*R} = \text{Re} U_{ij}^*$, $U_{ij}^{*I} = \text{Im} U_{ij}^*$.

Підставляючи зображення (5) з врахуванням виразів (4) у граничні умови (2), отримаємо інтегральне рівняння для визначення невідомих p_1, p_2 виду:

$$u_1^R - iu_2^R = -\frac{1+\nu}{\pi E i} \left(\int_L F_1^R q^R dt + \int_L F_2^R \bar{q}^R d\bar{t} - \int_L F_1^I q^I dt - \int_L F_2^I \bar{q}^I d\bar{t} \right);$$

$$u_1^I - iu_2^I = -\frac{1+\nu}{\pi E i} \left(\int_L F_1^R q^I dt + \int_L F_2^R \bar{q}^I d\bar{t} + \int_L F_1^I q^R dt + \int_L F_2^I \bar{q}^R d\bar{t} \right), \tag{6}$$

причому $F_i^R = F_i^R(x_1, x_2, x_1^0, x_2^0)$, $F_i^I = F_i^I(x_1, x_2, x_1^0, x_2^0)$, $i=1, 2$ – відомі функції дійсного аргументу, що містять функції Бесселя II-го та I-го роду відповідно; $q^R = ip^R \frac{ds}{dt}$, $q^I = ip^I \frac{ds}{dt}$ – невідомі функції.

Враховуючи вирази для визначення переміщень u_1, u_2 через потенціали Ψ та Φ [1, 2], отримаємо значення правих частин інтегральних рівнянь (6).

Для числового визначення невідомих функцій q^R, q^I застосуємо метод механічних квадратур сумісно з методом колокації. Проведемо параметризацію границі контуру включення L у вигляді: $x_1 = \varphi(\theta); x_2 = \psi(\theta), 0 < \theta < 2\pi$. Тоді на границі $t = \varphi(\theta) + i\psi(\theta) = g(\theta)$.

Враховуючи, що підінтегральна функція F_2^R при малих значеннях аргументу є нерегулярною, використаємо асимптотичні вирази для функцій Бесселя другого роду при малих значеннях аргументу [5] для встановлення їх особливостей. Для інтегралів, що мають логарифмічну особливість використаємо квадратурні формули виду [2]:

$$\int_{\Omega} f(t, z_\nu) \ln r dt = h \sum_{n=1}^K f_{\nu n} \left(\ln \frac{r_n}{\xi_n} - \sum_{m=1}^M \frac{\xi_n^m}{m} \cos(\theta - \theta_n) \right) g'_n, \quad g'_n = g'(\theta_n), \quad \theta_n = hn,$$

$$z_\nu = z(\tilde{\theta}_\nu), \quad \tilde{\theta}_\nu = \theta_\nu + h/2, \quad \nu = \overline{1, K}, \quad h = 2\pi / K, \quad M = \frac{K}{2},$$

а для решти інтегралів – наступні квадратурні співвідношення [2]:

$$\int_{\Omega} qf(t, z_\nu) dt = h \sum_{n=1}^K q_n f_{\nu n} g'_n,$$

де $f_{\nu n} = f(t_n, z_\nu)$.

Після заміни інтегралів вказаними квадратурними формулами, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) для визначення невідомих $q_n^R = q^R(t_n), q_n^I = q^I(t_n)$.

Для визначення напружень у довільній точці пластинки на площинці з нормаллю \vec{n} використаємо співвідношення [1, 2]:

$$2(\sigma_n - i\tau_{sn}) = \frac{2E}{1-\nu} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u_1 - iu_2) \right) + e^{2i\alpha} \frac{2E}{1+\nu} \left(\frac{\partial}{\partial z} (u_1 - iu_2) \right), \quad (7)$$

де α – кут між нормаллю до площинки і віссю Ox_1 ; $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right).$$

Підставляючи залежності (3) у формули (7) для визначення напружень, отримаємо:

$$\begin{aligned} 2(\sigma_n^R - i\tau_{sn}^R) &= \int_L f_1^R q^R dt + \int_L f_2^R \bar{q}^R dt - \int_L f_1^I q^I dt - \int_L f_2^I \bar{q}^I dt, \\ 2(\sigma_n^I - i\tau_{sn}^I) &= \int_L f_1^R q^I dt + \int_L f_1^R \bar{q}^I dt + \int_L f_1^I q^R dt + \int_L f_1^I \bar{q}^R dt, \end{aligned}$$

причому $f_i^R = f_i^R(x_1, x_2, x_1^0, x_2^0), f_i^I = f_i^I(x_1, x_2, x_1^0, x_2^0), i=1, 2$ – є функціями дійсного аргументу, що містять функції Бесселя II-го та I-го роду.

Враховуючи нерегулярність підінтегральних функцій $f_i^R, i=1, 2$ при малих значеннях аргументу, використаємо асимптотичні вирази для функцій Бесселя другого роду при малих значеннях аргументу [5] для встановлення їх особливостей.

Вирази для визначення напружень запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} 2(\sigma_n^R - i\tau_{sn}^R) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1+\nu}{2} \int_L \left(\left(\frac{dz}{d\bar{z}} \frac{\bar{z}-\bar{t}}{z-t} - 1 \right) \frac{1}{z-t} \right) q^R dt - \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(-\frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\bar{z}-\bar{t}} + \right. \\ &\left. + \frac{dz}{d\bar{z}} \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{z-t} \right) \bar{q}^R d\bar{t} + \int_L G_1^R q^R dt + \int_L G_2^R \bar{q}^R d\bar{t} - \int_L f_1^I q^I dt - \int_L f_2^I \bar{q}^I d\bar{t}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$2(\sigma_n^I - i\tau_{sn}^I) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1+\nu}{2} \int_L \left(\left(\frac{dz}{d\bar{z}} \frac{\bar{z}-\bar{t}}{z-t} - 1 \right) \frac{1}{z-t} \right) q^I dt + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(-\frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\bar{z}-\bar{t}} + \frac{dz}{d\bar{z}} \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{z-t} \right) \bar{q}^I d\bar{t} + \int_L G_1^R q^I dt + \int_L G_2^R \bar{q}^I d\bar{t} + \int_L f_1^I q^R dt + \int_L f_2^I \bar{q}^R d\bar{t}. \quad (9)$$

де функції f_i^I , $G_i^R = G_i^R(x_1, x_2, x_1^0, x_2^0)$, $i=1, 2$ є обмеженими і неперервними скрізь в області D функціями дійсного аргументу.

Здійсимо граничний перехід у співвідношеннях (8)-(9), використовуючи формули Племелья–Сохоцького [2] при $(x_1, x_2) \rightarrow L$ та отримуємо інтегральні рівняння для знаходження напружень на границі включення:

$$2(\sigma_n^R - i\tau_{sn}^R) = \bar{q}^R + \frac{1}{2\pi i} \frac{1+\nu}{2} \int_L \left(\left(\frac{dz}{d\bar{z}} \frac{\bar{z}-\bar{t}}{z-t} - 1 \right) \frac{1}{z-t} \right) q^R dt - \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(-\frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\bar{z}-\bar{t}} + \frac{dz}{d\bar{z}} \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{z-t} \right) \bar{q}^R d\bar{t} + \int_L G_1^R q^R dt + \int_L G_2^R \bar{q}^R d\bar{t} - \int_L f_1^I q^I dt - \int_L f_2^I \bar{q}^I d\bar{t}; \quad (10)$$

$$2(\sigma_n^I - i\tau_{sn}^I) = \bar{q}^I + \frac{1}{2\pi i} \frac{1+\nu}{2} \int_L \left(\left(\frac{dz}{d\bar{z}} \frac{\bar{z}-\bar{t}}{z-t} - 1 \right) \frac{1}{z-t} \right) q^I dt - \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(-\frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\bar{z}-\bar{t}} + \frac{dz}{d\bar{z}} \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{z-t} \right) \bar{q}^I d\bar{t} + \int_L G_1^R q^I dt + \int_L G_2^R \bar{q}^I d\bar{t} + \int_L f_1^I q^R dt + \int_L f_2^I \bar{q}^R d\bar{t}, \quad (11)$$

тут перші два інтеграли є у розумінні головного значення.

Напруження на границі включення визначалися числово на основі методу механічних квадратур. Для інтегралів, що мають особливість типу Коші, застосовані квадратурні формули виду [3]:

$$\int_{\Omega} \frac{q}{t-z_\nu} dt = h \sum_{n=1}^K q_n \frac{g'_n}{t_n - z_\nu}, \quad t_n = g(\theta_n), \quad g'_n = g'(\theta_n), \quad \theta_n = hn, \\ z_\nu = z(\tilde{\theta}_\nu), \quad \tilde{\theta}_\nu = \theta_\nu + h/2, \quad \nu = \overline{1, K}, \quad q_n = q(t_n), \quad h = 2\pi / K.$$

У якості тестування запропонованої методики розглянемо задачу про розподіл максимальних динамічних напружень на границі жорсткого включення кругової форми при різних значеннях коефіцієнту Пуассона у випадку дії “падаючої” хвилі стиску, потенціали якої задаються згідно залежностей (1). У [1] задача розв’язувалася методом рядів. Тут показано залежність максимальних значень нормалізованих напружень на границі жорсткого включення у точках $\theta = 0$ та $\theta = \pi$ (рис.1, б). На основі розробленого алгоритму отримано розв’язок задачі, представлений на рис.1, а. При розрахунках було вибрано $n = 50$ точок розбиття границі включення.

При порівнянні результатів, наведених у [1] та розрахованих числово на основі формул (10)-(11) видно, що напруження відрізняються на 2–3%, що підтверджує ефективність запропонованого підходу.

Дослідимо вплив геометрії включення на розподіл максимальних динамічних напружень у нескінченних пружних пластинках. На основі розробленої методики визначимо залежність максимальних динамічних напружень від зведеної частоти падаючої хвилі стиску, що задається потенціалами (1), на границі еліптичного (рис. 2) та квадратного (рис. 3) включень.

На рис. 2 суцільній кривій відповідає випадок еліптичного включення з півосями a та $0,8a$, пунктирній кривій – випадок еліптичного включення з півосями a та $0,5a$, штрих-пунктирна крива відображає результати розрахунку для еліптичного включення з півосями a та $0,3a$. Значення коефіцієнта Пуассона вибрано $0,3$, кількість точок розбиття границі — 100 . Тут також суцільною кривою 1 наведено результати розрахунку для випадку кругового жорсткого включення.

З рис. 2 видно, що при зменшенні відношення півосей жорсткого еліптичного включення відбувається зростання максимальних динамічних напружень при низьких частотах ($\omega'_2 < 0,2$ для випадку еліптичного жорсткого включення з відношенням півосей $0,8$; $\omega'_2 < 0,27$ для включення з відношенням півосей $0,5$ та $\omega'_2 < 0,6$ при відношенні півосей $0,3$) та незначного спадання близько 5–10% при середніх значеннях частоти падаючої хвилі. При зростанні частоти динамічні напруження у пластинці з еліптичним включенням мало відрізняються від відповідних значень напру-

жень для випадку кругового жорсткого включення.

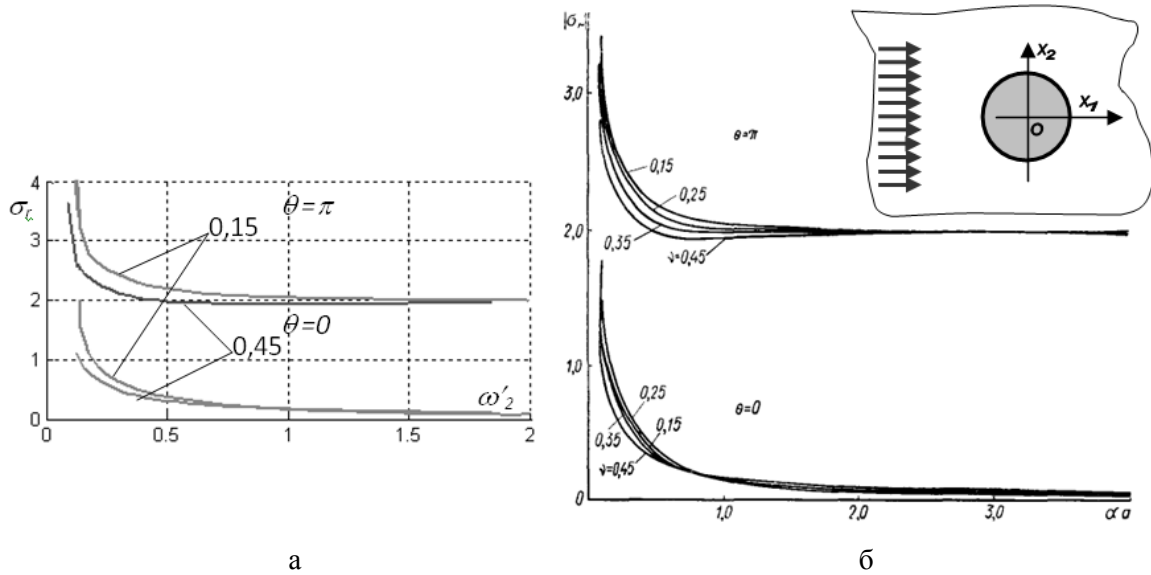


Рис. 1. Дифракція пружних хвиль стиску на кругових включеннях

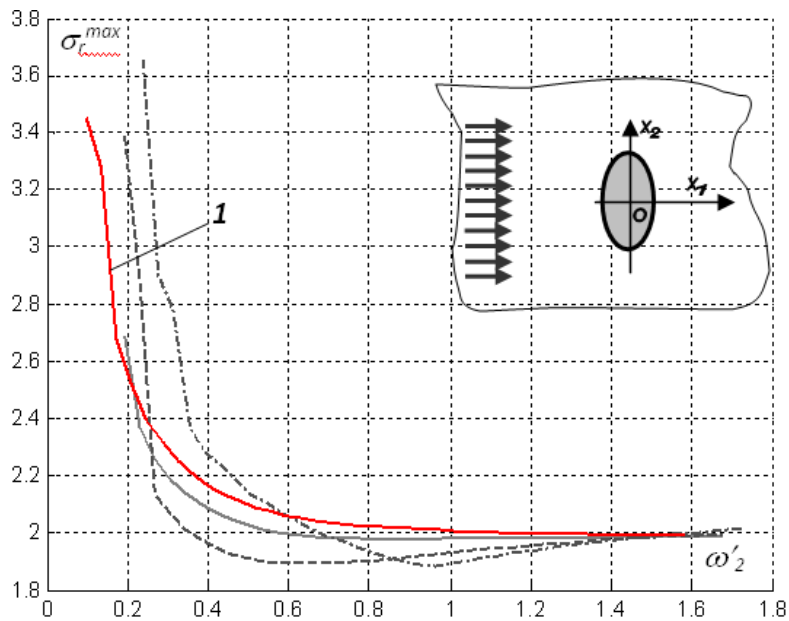


Рис. 2. Розподіл динамічних напружень у пластинці з жорстким еліптичним включенням

Дослідимо вплив орієнтації включення на динамічну концентрацію напружень у пластинці. На рис. 3 суцільна крива відображає результати розрахунку для квадратного включення з стороною $2a$, пунктирна крива – квадратного повернутого на 45° жорсткого включення. При розрахунках рівняння границі квадратного включення описувалося за допомогою функцій, що конформно відображають вибрану область на круг [2]:

$$g(\theta) = a \left(e^{-i\theta} - \frac{e^{3i\theta}}{6} + \frac{e^{7i\theta}}{56} - \frac{e^{11i\theta}}{176} + \dots \right).$$

Числові значення напружень на границі включення отримано для значення коефіцієнта Пуассона 0,3 та 120 точок розбиття границі.

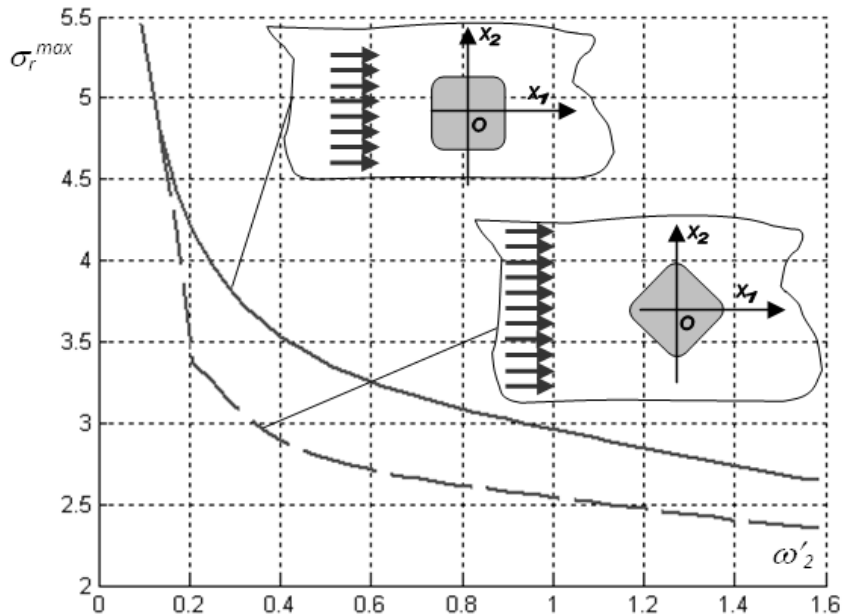


Рис. 3. Концентрація динамічних напружень біля квадратних жорстких включень

З рис. 3 видно, що для випадку повернутого квадратного включення динамічні напруження нижчі на 12–17%.

Висновки

Запропонований у роботі алгоритм дослідження дифракції пружних хвиль у пластинках з жорсткими впаєними включеннями різної форми є ефективний для випадку практично довільної геометрії включення. Проведені тестові розрахунки для пластинки з круговим включенням вказують на ефективність розробленого підходу. Досліджено залежність динамічного розподілу напружень у пластинках з еліптичними та квадратними жорсткими включеннями від розмірів включення та його орієнтації.

1. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракція упругих волн. – К.: Наук. думка, 1978. – 308 с.
2. Савин Н.Г. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наукова думка, 1968. – 888 с.
3. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. Пер. с англ. / Под ред. Григолюка Э.И. – М.: Мир, 1982. – 248 с.
4. Мікуліч О.А. Дифракція пружних хвиль у нескінченних двозв'язних пластинках. – Вісник Донецького університету: Науковий журнал. Серія А "Природничі науки" – Донецьк: ДонНТУ, 2008. – № 2/2008. – С. 114-120.
5. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 486 с.